Částice v EM polích, spin

1 Navázání nabité částice na EM pole

- zachycení EM polí pomocí potenciálů – popsána skalárním a vektorovým potenciálem $\varphi(\bar{r}), \bar{A}(\bar{r})$

Maxwellovy rovnice

homogenní
$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\bar{B} &= 0 \\ \nabla\times\bar{E} &= -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \begin{aligned}\bar{B} &= \nabla\times\bar{A} \\ \bar{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

nehomogenní
$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\bar{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ \nabla\times\bar{B} &= \mu_0\bar{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$
čtyři skalární PDR pro čtyři veličiny ϕ, A_x, A_y, A_z

- Hamiltonián částice s nábojem q v EM poli

– již známé: pohyb v elektrostatickém potenciálu ϕ → do Schr.r. vstupuje potenciál $V = q\phi$

Př. homogenní pole $\bar{E} \parallel x$ pro elektron: $\phi(\bar{r}) = -\mathcal{E}x \quad (\bar{E} = -\nabla\varphi) \quad \rightarrow V(\bar{r}) = e\mathcal{E}x$

– inspirace teoretickou mechanikou:

pohybová rovnice s Lorentzovou silou $\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v}\times\bar{B})$ vychází v případě použití

Hamiltoniánu $H = \frac{1}{2m}(\bar{p} - q\bar{A})^2 + q\phi$ → mechanická hybnost $\bar{p}_{mech} = m\dot{\bar{r}} = \bar{p} - q\bar{A}$

kanonická hybnost ↗

– přechod do kvantové mechaniky:

kanonické hybnosti odpovídá $\hat{\bar{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla \quad \rightarrow \quad \hat{\bar{p}}_{mech} = \hat{\bar{p}} - q\bar{A} = \frac{\hbar}{i}\nabla - q\bar{A}$

výsledný Hamiltonián

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\bar{p}} - q\bar{A})^2 + q\phi$$
v souřadnicové reprezentaci
$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\bar{A}\right)^2 + q\phi$$

rozepsání na $\hat{H}_0$ bez pole a interakci s polem

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\bar{A}\right)^2\psi + q\phi\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \overbrace{\left(-\frac{q}{m}\bar{A}\cdot\hat{\bar{p}} + \frac{q^2A^2}{2m} - \frac{q}{2m}\frac{\hbar}{i}\nabla\cdot\bar{A} + q\phi\right)}^{\hat{H}_{int}}\psi$$

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\bar{A}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\bar{A}\right)\psi = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2 - 2q\bar{A}\cdot\frac{\hbar}{i}\nabla\psi - q\frac{\hbar}{i}(\nabla\cdot\bar{A})\psi + q^2A^2\psi$$

Pozn.: člen s $\nabla\cdot\bar{A}$ často odstraněn volbou Coulombovy kalibrace s $\nabla\cdot\bar{A} = 0$

- případ homogenního magnetického pole, souvislost magnetického momentu a $\hat{\bar{L}}$

vektorový potenciál pro konstantní $\bar{B} \parallel z$: $\bar{A} = \frac{1}{2}B(-y, x, 0) = \frac{1}{2}\bar{B}\times\bar{r}$ (splňuje $\nabla\cdot\bar{A} = 0$)

ověření: $B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y = 0 \qquad B_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z = 0 \qquad B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x = B$

– úpravy interakčního členu

$$\hat{H}_{int} = -\frac{q}{m}\bar{A}\cdot\hat{\bar{p}} + \frac{q^2A^2}{2m} - \frac{q}{2m}\frac{\hbar}{i}\underbrace{\nabla\cdot\bar{A}}_{\text{nulové}} = -\frac{q}{m}\frac{B}{2}(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) + \frac{q^2B^2}{8m}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

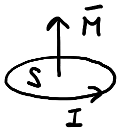
snadno zobecníme na libovolnou orientaci $\bar{B}$

$$\hat{H}_{int} = -\bar{B}\cdot\frac{q}{2m}(\hat{\bar{r}}\times\hat{\bar{p}}) + \frac{q^2B^2}{8m}\hat{r}_\perp^2$$

$\hat{r}_\perp$ je velikost průmětu do roviny $\perp \bar{B}$

magnetický (dipólový) moment $\hat{\bar{M}} = \frac{q}{2m}(\hat{\bar{r}}\times\hat{\bar{p}}) = \frac{q}{2m}\hat{\bar{L}}$ → $\hat{H}_{int} = -\bar{B}\cdot\hat{\bar{M}}$ + člen úměrný B^2

- toto je orbitální magnetický moment spojený s krouživým pohybem částice (→ L), později přibude ještě spinový spojený s vnitřním vířením nabité hmoty částice
- interpretace pomocí Ampérovy představy magnetického dipólu jako smyčky s proudem



proud obíhající částice $I = \frac{q}{T}$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

plocha smyčky $S = \pi r^2$

} dipólový moment $M = IS = \frac{q\omega}{2\pi}\pi r^2 = \frac{q}{2m}\underbrace{mr^2\omega}_{L}$

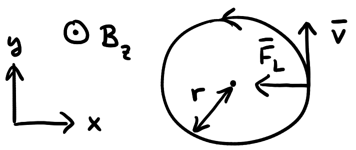
- orbitální magnetický moment pro elektron s $q=-e$ & $m=m_e$:

$\hat{\bar{M}} = -\mu_B\frac{1}{\hbar}\hat{\bar{L}}$, kde μ_B je Bohrův magneton $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 57.88\,\mu eV\cdot T^{-1} \approx 9.274\cdot 10^{-24}\,Am^2$

2 Volné částice v magnetickém poli, Landauovy hladiny

- popis plynu nabitých částic v mag. poli, např. elektronový plyn v kovu
- studoval L.D. Landau v roce 1930 za účelem objasnění diamagnetismu kovů

- klasická představa – kruhové obíhání pod vlivem Lorentzovy síly



Lorentzova síla $\bar{F}_L = -e(\bar{v}\times\bar{B})$ je dostředivou silou → $evB = m\frac{v^2}{r}$

→ kruhová frekvence $\frac{v}{r} = \omega_c = \frac{eB}{m}$ (cyklotronová frekvence)

- Hamiltonián pro elektron a pole $\bar{B}\parallel z$ dané $\bar{A} = \frac{1}{2}B(-y,x,0)$

$$\hat{H}_{int} = \frac{eB}{2m}\hat{L}_z + \frac{e^2B^2}{8m}(\hat{x}^2+\hat{y}^2) = \omega_L\hat{L}_z + \frac{1}{2}m\omega_L^2(\hat{x}^2+\hat{y}^2)$$

zavedeme Larmorovu frekvenci $\omega_L = \frac{eB}{2m} = \frac{\omega_c}{2}$

celý Hamiltonián $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}_\perp^2 + \frac{1}{2}m\omega_L^2\hat{r}_\perp^2 + \omega_L\hat{L}_z + \frac{1}{2m}\hat{p}_z^2$ $\quad \hat{p}_\perp^2 = \hat{p}_x^2+\hat{p}_y^2 \quad \hat{r}_\perp^2 = \hat{x}^2+\hat{y}^2$

pro vlastní stavy $\hat{L}_z$ odpovídá planární pohyb isotropnímu 2D harm. oscilátoru s frekv. ω_L

- řešení ve válcových souřadnicích $\psi(r,\varphi,z) = R(r)\,e^{im\varphi}e^{ik_zz}$ (vlastní stav $\hat{L}_z$ & volný pohyb ve směru osy z)

po dosazení vznikne radiální rovnice HO, řešením je polynom × gaussovka

→ vlastní stavy $\psi(r,\varphi,z) \sim r^{|m|}L_{n_r}^{|m|}\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)e^{-\frac{r^2}{2r_0^2}}e^{im\varphi}e^{ik_zz}$ charakt. délka $r_0 = \sqrt{\frac{m}{\hbar\omega_L}}$

přidružený Laguerrův polynom, viz radiální funkce atomu vodíku vlastní energie $E = \hbar\omega_L(2n_r + |m| + m + 1) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$ $n_r = 0, 1, 2 \dots$ $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ $k_z \in \mathbb{R}$

- původní spojité spektrum vlastních energií $E_\perp = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2)$ pro pohyb v rovině xy nahrazeno diskrétní sadou energií s odstupem $2\hbar\omega_L = \hbar\omega_c$ – Landauovy hladiny
- každá Landauova hladina má nekonečnou degeneraci – souvisí s libovolnou x, y polohou orbity

Pozn. alternativní odvození Landauových hladin s $\vec{A} = (0, x, 0)$ viz doplněk

3 Vázané stavy vystavené elektrickému a magnetickému poli – Starkův a Zeemanův jev

- systém s nabitými částicemi ve vázaných stavech vložíme do statického pole $\vec{E}$ nebo $\vec{B}$ (zhruba homogenní v oblasti výskytu částic)
- nyní jen kvalitativní popis, výpočty se provádějí poruchovou teorií probíranou později

• Starkův jev – po zapnutí statického elektrického pole
- přidáme potenciál $\Delta V = q\phi$, pro pole $\vec{\mathcal{E}} \parallel x$: $\Delta V = -q\,\mathcal{E}\,x$

a) nedegenerované hladiny – typicky kvadratický posuv hladin $\sim \mathcal{E}^2$ – kvadratický S. jev
(kvůli $|\psi|^2$ sudé v x a tedy $\langle \Delta V \rangle = 0$)

b) degenerované hladiny – typicky rozštěpení hladin $\sim \mathcal{E}$ – lineární S. jev

• Zeemanův jev – štěpení a posuvy hladin (a následně spektrálních čar) v magnetickém poli
- přidáme interakci s mag. polem, pro $\vec{B} \parallel z$ je $\Delta\hat{H} = \frac{1}{\hbar}\mu_B B \hat{L}_z$ (elektrony)

celkový Hamiltonián $\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{1}{\hbar}\mu_B B \hat{L}_z$ $\hat{H}_0$ je Hamiltonián el. v atomu

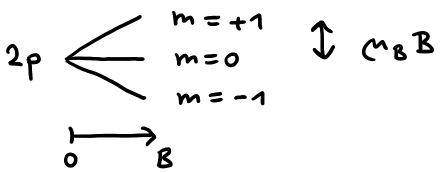
orbitaly, které jsou vl. stavy $\hat{H}_0$ a $\hat{L}_z$, jsou zároveň vl. stavy $\hat{H}$

$\rightarrow$ posuvy energiových hladin $\Delta E = \frac{1}{\hbar}\mu_B B \hbar m = \mu_B B m$

magnetické kvantové číslo

Př. atom s $l = 1$

štěpení p hladiny



(pro zemské pole s $B \approx 50\,\mu T$ je štěpení asi 2.9×10^{-9} eV)

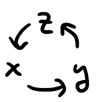
aplikace: mapování magnetického pole Slunce pomocí spekter (solární magnetogramy)

4 Spin

- „vnitřní" moment hybnosti některých částic, který se projeví magnetickým momentem a má také vliv na chování souborů nerozlišitelných částic (fermiony / bosony)
- v relativistické kvantové mechanice přirozený, v nerelativistické zavedený postulátem

• Formálně popsaný operátory spinu – tři složky vektorového operátoru $\hat{\vec{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z)$

splňující komutační relace pro moment hybnosti: $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\,\hat{S}_z$ + cyklická záměna



komutují $\hat{S}^2$ a jedna složka, např. $\hat{S}_z$, algebraickým postupem vyšlo pro jejich společné vlastní stavy

$$\hat{S}^2 |s m_s\rangle = \hbar s(s+1) |s m_s\rangle \qquad s = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \dots \qquad \hat{S}_z |s m_s\rangle = \hbar m_s |s m_s\rangle$$

elektron/proton/neutron mají navždy fixní $s = \frac{1}{2}$, m_s tedy může nabývat dvou hodnot $\pm\frac{1}{2}$

příslušné stavy spinu se značí $|+\rangle$ nebo $|\uparrow\rangle$ a $|-\rangle$ nebo $|\downarrow\rangle$: $\hat{S}_z|\uparrow\rangle = +\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ $\hat{S}_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$

obecný stav je superpozicí $|\chi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$ s $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, můžeme zachytit $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

- vyjádření operátorů spinu v bázi $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$:

  $\hat{S}_z$ je snadné, u $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ vezmeme na pomoc žebříkové $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y \rightarrow \hat{S}_x = \frac{\hat{S}_+ + \hat{S}_-}{2}$, $\hat{S}_y = \frac{\hat{S}_+ - \hat{S}_-}{2i}$

  působení $\hat{S}_+|m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)}\,|m_s+1\rangle$

  $\rightarrow \hat{S}_+|\downarrow\rangle = \hbar|\uparrow\rangle$, $\hat{S}_+|\uparrow\rangle = 0$ a podobně $\hat{S}_-|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle$, $\hat{S}_-|\downarrow\rangle = 0$

  $\hat{S}_\alpha = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_\alpha$ $(\alpha = x, y, z)$ Pauliho matice: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- magnetický moment spojený se spinem elektronu

  $\hat{\vec{M}}_s = -g\mu_B \frac{1}{\hbar}\hat{\vec{S}}$ g-faktor: z Diracovy teorie $g = 2$, skutečný $g = \overbrace{2.00231930436\underline{17}}^{\text{shoda s QED}}$ exp. neurčitost

  celkový magnetický moment elektronu $\hat{\vec{M}} = -\mu_B \frac{1}{\hbar}(\hat{\vec{L}} + g\hat{\vec{S}})$

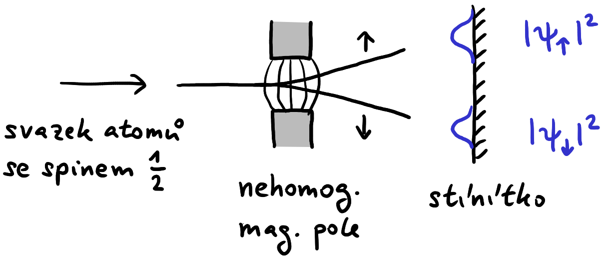
  vazba na magnetické pole $\hat{H}_{int} \approx -\hat{\vec{M}}\cdot\vec{B} = \mu_B\vec{B}\cdot\frac{1}{\hbar}(\hat{\vec{L}} + g\hat{\vec{S}}) = \mu_B\vec{B}\cdot(\frac{1}{\hbar}\hat{\vec{L}} + \frac{g}{2}\hat{\vec{\sigma}})$

- Pauliho rovnice

- spin nelze zachytit souřad. reprezentací jako u orbitálního MH $\hat{\vec{L}}$ (ani operátory, ani stavy)
- další stupeň volnosti → rozšířený Hilbertův prostor
- kombinace spinového stupně volnosti s prostor. závislostí – dvoukomponentní vlnová funkce $\begin{pmatrix} \psi_\uparrow(\vec{r}) \\ \psi_\downarrow(\vec{r}) \end{pmatrix}$

  $|\psi_\uparrow(\vec{r})|^2$ je hustota pravděpodobnosti nalezení elektronu se spinem ve stavu $|\uparrow\rangle$, podobně pro $\downarrow$
- splňuje Pauliho rovnici $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 + q\phi - \frac{q\hbar}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right]\begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow \end{pmatrix}$

- Sternův-Gerlachův experiment (SG separátor)

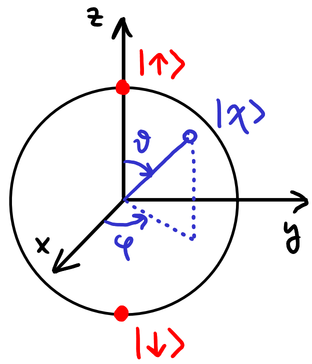


- v nehomogenním mag. poli působí na mag. moment $\vec{M}$

  síla $\vec{F} = -\nabla$ energie $= \nabla\,\vec{M}\cdot\vec{B} \sim$ gradienty $\vec{B}$
- dojde k prostorovému oddělení $\psi_\uparrow$ a $\psi_\downarrow$
- detekce na stínítku vlastně odpovídá měření S_z

- poprvé provedeno 1921-2 – rozdělení svazku atomů Ag v nehomog. poli $\vec{B}$ na <u>dva</u> svazky
- spolu s anomálním Zeemanovým jevem (rozštěpení na dvě hladiny, např. H, Na) inspirovalo zavedení spinu

- Blochova sféra



- elegantní zachycení stavu spinu $s = \frac{1}{2}$ pomocí sférických úhlů

$$|\chi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\vartheta}{2} |\downarrow\rangle$$

- automaticky splněna podmínka normovanosti $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$
- celková fáze vynechána ($|\psi'\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle$ je fyzikálně stejný)

střední hodnoty komponent spinu:

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \hat{\sigma}_x \rangle = \frac{\hbar}{2} (c_1^* \; c_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (c_2^* c_1 + c_1^* c_2) = \frac{\hbar}{2} \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2} (e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}) = \frac{\hbar}{2} \sin\vartheta \cos\varphi$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \hat{\sigma}_y \rangle = \frac{\hbar}{2} (c_1^* \; c_2^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} i (c_2^* c_1 - c_1^* c_2) = \frac{\hbar}{2} \sin\frac{\vartheta}{2} \cos\frac{\vartheta}{2} \, i (e^{-i\varphi} - e^{i\varphi}) = \frac{\hbar}{2} \sin\vartheta \sin\varphi$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \hat{\sigma}_z \rangle = \frac{\hbar}{2} (c_1^* \; c_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} (|c_1|^2 - |c_2|^2) = \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2} \cos\vartheta$$

5 Dynamika spinů ve vnějším poli

- precese spinu ve stacionárním poli — v bázi $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

spin elektronu navázaný na vnější pole ve směru osy z : $\hat{H} = \frac{1}{2} g \mu_B \bar{B} \cdot \bar{\sigma} = \frac{1}{2} g \mu_B B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

časový vývoj stavu $|\psi(t)\rangle = c_1(t) |\uparrow\rangle + c_2(t) |\downarrow\rangle$ popsán nestacionární Sch. rovnicí

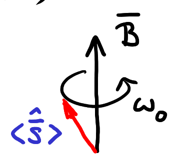
$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{g}{2} \mu_B B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \rightarrow \dot{c}_1 = -i \frac{\omega_0}{2} c_1 \, , \; \dot{c}_2 = +i \frac{\omega_0}{2} c_2$$

s označením $\omega_0 = \frac{g \mu_B B}{\hbar} \approx \frac{eB}{m} = 2\omega_L$

řešením jsou $c_1(t) = c_1(0) e^{-i\frac{\omega_0}{2}t}$, $c_2(t) = c_2(0) e^{+i\frac{\omega_0}{2}t}$

vezmeme pro konkrétnost $c_1(0) = \cos\frac{\vartheta}{2}$ $c_2(0) = \sin\frac{\vartheta}{2}$ (ve vyjádření podle Blocha)

potom $c_1(t) = e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} \cos\frac{\vartheta}{2}$, $c_2(t) = e^{i\frac{\omega_0}{2}t} \sin\frac{\vartheta}{2}$, což dává



střední hodnoty $\langle \hat{S}_x \rangle = \sin\vartheta \cos\omega_0 t$, $\langle \hat{S}_y \rangle = \sin\vartheta \sin\omega_0 t$, $\langle S^z \rangle = \cos\vartheta$

Pozn. Frekvence precese odpovídá energii přechodu spinu mezi vlastními stavy v poli B

- spinová rezonance

- kombinace stac. pole ∥ z a kolmého střídavého $\bar{B} = (B_A \cos\omega t, B_A \sin\omega t, B_0)$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} g \mu_B \left[B_A \cos\omega t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B_A \sin\omega t \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\omega_0 & -\omega_A e^{-i\omega t} \\ -\omega_A e^{i\omega t} & +\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \dot{c}_1 &= -i \frac{\omega_0}{2} c_1 - i \frac{\omega_A}{2} e^{-i\omega t} c_2 \\ \dot{c}_2 &= +i \frac{\omega_0}{2} c_2 - i \frac{\omega_A}{2} e^{i\omega t} c_1 \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \frac{g \mu_B B_0}{\hbar} \qquad \omega_A = \frac{g \mu_B B_A}{\hbar}$$

- řešení následujícího tvaru zajistí eliminaci časově závislých faktorů v dif. rovnicích

$$c_1(t) = c_{10} \, e^{i\lambda t} e^{-i\frac{\omega}{2}t} \qquad c_2(t) = c_{20} \, e^{i\lambda t} e^{i\frac{\omega}{2}t}$$

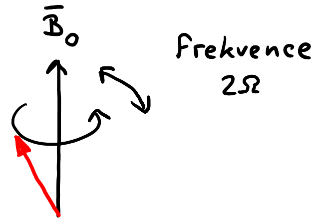
po dosazení vyjdou možné frekvence $\lambda = \pm\Omega$ s $\Omega = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_A^2}$

obecné řešení je superpozicí těchto dvou možností

- partikulární řešení pro poč. podmínky $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$

$$c_1(t) = \left(\cos\Omega t - i\,\frac{\omega_0 - \omega}{2\Omega}\sin\Omega t\right) e^{-i\frac{\omega}{2}t}$$

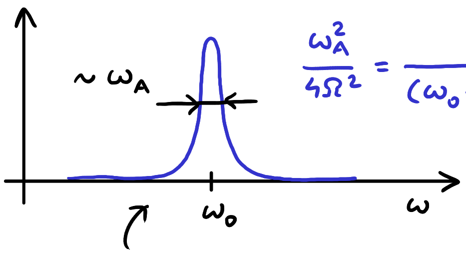
$$c_2(t) = -i\,\frac{\omega_A}{2\Omega}\sin\Omega t\; e^{i\frac{\omega}{2}t}$$



$\rightarrow$ $P(\text{detekce } |\uparrow\rangle) = |c_1(t)|^2 = \cos^2\Omega t + \dfrac{(\omega_0-\omega)^2}{4\Omega^2}\sin^2\Omega t = \cos^2\dfrac{\vartheta}{2}$

$P(\text{detekce } |\downarrow\rangle) = |c_2(t)|^2 = \dfrac{\omega_A^2}{4\Omega^2}\sin^2\Omega t = \sin^2\dfrac{\vartheta}{2}$

míra „kolíbání" spinu současně s precesí



$$\frac{\omega_A^2}{4\Omega^2} = \frac{\omega_A^2}{(\omega_0-\omega)^2 + \omega_A^2}$$

rezonance na frekvenci precese v poli B_0

ESR (Electron Spin Resonance)

$B_0 \approx 0.3\,T$ $\quad \mu = \mu_B$ $\quad f \approx 10\,GHz$

NMR (Nuclear Magnetic Resonance)

$B_0 \approx 1\,T$ $\quad \mu = \mu_{proton}$ $\quad f \approx 40\,MHz$

Doplněk : Landauovy hladiny v Landauově kalibraci $\bar{A} = B(0,x,0)$

– technicky snadnější (převedení na 1D HO místo 2D), ale vlnové funkce jsou nenázorné

vyjdeme z původního Hamiltoniánu s $q=-e$ a nachystáme jej na separaci v kartézských souřadnicích

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\bar{p}} + e\bar{A})^2 = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eB\hat{x})^2 + \hat{p}_z^2\right] = \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2 + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(\hat{x} + \frac{1}{eB}\hat{p}_y\right)^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}_z^2$$

řešení příslušné Sch.r. $\hat{H}\psi = E\psi$ najdeme v separovaném tvaru

$$\psi(x,y,z) = \Psi(x)\, e^{ik_y y}\, e^{ik_z z} \qquad (\text{vlastní stav } \hat{p}_y \to \hbar k_y \text{ a } \hat{p}_z \to \hbar k_z)$$

po dosazení vyjde 1D rovnice pro $\Psi(x)$ – 1D HO posunutý o $x_0 = \frac{\hbar k_y}{eB}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x+x_0)^2\Psi = \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\Psi \quad \to \text{ vlastní energie } \quad E = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

stejné hladiny jako dříve, ale neprůhledné vlnové funkce

$$\psi(x,y,z) \sim H_n\left(\frac{x+x_0}{\sigma}\right) e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2\sigma^2}} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \qquad \text{s charakteristickou délkou } \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}$$

Pozn. energie planárního pohybu nezávisí na k_y $\to$ ∞ degenerace pro fixní k_z nyní kvůli $k_y \in \mathbb{R}$