

1 Úvodní příklady

1.1 Bohrov model atomu vodíku •

V Bohrově modelu vodíkového atomu uvažujeme o elektronu (hmotnost m , náboj $-e$) obíhající po kruhové trajektorii kolem jádra (hmotnost $M \gg m$, náboj $+e$). Jako dostředivá síla, která má v případě kruhové trajektorie velikost mv^2/R , slouží coulombovská přitažlivá síla o velikosti $e^2/4\pi\epsilon_0 R^2$. Niels Bohr zavedl kvantovací podmínku $\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n\hbar$, ze které vyplývá, že velikost momentu hybnosti elektronu může nabývat pouze násobků Planckovy konstanty \hbar . Platí tedy $L = mvR = n\hbar$, kde n je přirozené číslo. Odvoďte vzorec pro možné hodnoty poloměru trajektorie elektronu. Jádro přitom považujte za statické ($M \rightarrow \infty$). Dále odvoďte vzorec pro možné hodnoty energie. Jak se změny výsledky, zahrneme-li do úvah i pohyb jádra? Vyjádřete kvantitativně s použitím M .

1.2 Deuterium

Ionizační energie atomu vodíku je $E_H = 13.5983$ eV. S pomocí Bohrova modelu vypočtete ionizační energii atomu deuteria, ve kterém je elektron vázán k deuteronu (proton+neutron) se stejným nábojem jako má proton. Hmotnosti elektronu, protonu a deuteronu vyjádřené v atomových jednotkách jsou $m_e = 5.4858 \times 10^{-4} m_u$, $m_p = 1.00728 m_u$ a $m_d = 2.01355 m_u$.

1.3 Pozitronium

Elektron a pozitron mohou vytvořit komplex s krátkou dobou života, který se označuje jako pozitronium. Předpokládejme, že by bylo možno pro pozitronium užít Bohrovu teorii atomu vodíku, a vypočtete:

- jeho ionizační energii
- energii přechodu ze základního do prvního excitovaného stavu
- jeho poloměr a_0 v základním stavu

1.4 Přesné spektroskopické měření spektra izotopů vodíku

Přesným měřením bylo zjištěno, že frekvence určitého přechodu z hladiny s $n = 2$ vodíku na jinou hladinu je rovna $f_1 = 799191727409$ kHz. Zanedbejme relativistické efekty a další drobné korekce a předpokládejme, že se vodík řídí Bohrovým modelem.

- Jaká je hodnota n cílové hladiny při přechodu?
- V deuteriu má tatáž absorpční čára frekvenci $f_2 = 799409184973$ kHz. Určete, jaký je poměr hmotnosti jádra deuteria a protonu, je-li poměr hmotnosti elektronu a protonu roven $m_e/m_p = 5.4461702177 \times 10^{-4}$.

1.5 Mionové atomy

Mionový atom se skládá z protonu a μ^- mionu. Vzniká radiačním záchytem: proton (předpokládejme, že je v klidu) zachytí mion (taktéž v klidu) a tato formace se dostane do základního stavu vyzářením jednoho nebo více fotonů (radiační kaskáda). Popište mionový atom Bohrovým modelem.

- Vypočtete hmotnost μ^- mionu, víte-li, že maximální energie vyzářených fotonů je 2.5 keV.
- Stanovte poloměr mionového atomu v jeho základním stavu.
- Určete frekvenční rozlišení $\delta\nu/\nu$ potřebné k odlišení případu, kdy je μ^- mion zachycen protonem a kdy deuteronem (proton+neutron).

1.6 Odhady de Broglieovy vlnové délky •

- (a) Odhadněte de Broglieovu vlnovou délku pro prachovou částici o poloměru $r = 2\mu\text{m}$, hmotnosti $m = 10^{-15}\text{ kg}$ a rychlosti $v = 1\text{ mm/s}$.
- (b) Odhadněte de Broglieovu vlnovou délku tanku T72 o hmotnosti 42 t jedoucího po bojišti rychlostí 50 km/h.
- (c) Zjistěte, pro jaké hodnoty energie neutronu je de Broglieova vlnová délka porovnatelná s meziatomovými vzdálenostmi a pro jaké s rozměry atomového jádra.

1.7 Srovnání de Broglieovy vlnové délky elektronu a fotonu

- (a) Najděte vztah mezi de Broglieovou vlnovou délkou elektronu vyjádřenou v nanometrech a jeho energií v elektronvoltech.
- (b) Vypočítejte vlnovou délku a hybnost elektronu s kinetickou energií 1 eV.
- (c) Vypočítejte vlnovou délku a hybnost fotonu se stejnou energií.
- (d) Ukažte, že konstruktivní interference při odrazu rovinné monochromatické vlny s vlnovou délkou λ na dvojici rovin vzdálených d nastává při splnění podmínky $n\lambda = 2d \cos\vartheta$, kde ϑ je úhel dopadu měřený od normály a n je celé číslo. Jaké typické energie elektronů nebo fotonů byste očekávali při provádění rozptylových experimentů na krystalu niklu, který má mřížkový parametr $a = 0.352\text{ nm}$.

1.8 Grupová rychlost de Broglieových vln •

Grupová rychlost vlny je dána vztahem $v_g = d\omega/dk$. Ukažte, že grupová rychlost de Broglieovy vlny příslušející určité částici je rovna přímo rychlosti v , jakou se tato částice pohybuje.

1.9 Difrakce neutronů

Svazek neutronů o konstantní rychlosti, hmotnosti M_n ($M_n \approx 1.67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$) a energii E dopadá kolmo na lineární řetízek (mřížku) atomových jader (může jít např. o jádra dlouhé lineární molekuly). Vzdálenost mezi sousedními jádry označme symbolem l a poloměr jader symbolem r , $r \ll l$. Detektor neutronů je umístěn na opačné straně řetízku, než ze které dopadá svazek neutronů, ve velké vzdálenosti od řetízku a ve směru, který svírá úhel ϑ se směrem dopadajícího svazku.

- (a) Popište závislost počtu detekovaných neutronů na energii E .
- (b) Počet detekovaných neutronů za jednotku času nabývá maxima pro $E = E_1$. Vyjádřete l za předpokladu, že pro žádnou energii menší než E_1 maximum nenastává. Určete l pro $\vartheta = 30^\circ$ a $E_1 = 1.3 \cdot 10^{-20}\text{ J}$.
- (c) Pro jaké energie neutronů bude výsledek významně záviset na rozměru jader?

1.10 Ultrachladné neutrony

Ultrachladné neutrony jsou volné neutrony s de Broglieovou vlnovou délkou ve stovkách Å.

- (a) Vypočítejte rychlost a energii neutronů s vlnovou délkou $\lambda = 900\text{ Å}$ a jejich „teplotu“ (zavedenou jako $T \equiv E/k_B$).
- (b) Jedním ze způsobů, jak získat ultrachladné neutrony je vertikální injektáž chladných neutronů do vysoké věže. Jaká musí být počáteční vlnová délka λ_i chladných neutronů ve spodní části věže o výšce $D = 35\text{ m}$, aby na vrcholku dosáhly $\lambda = 900\text{ Å}$?
- (c) Neabsorbující materiál se neutronům jeví jako oblast s odpudivým potenciálem řádově $V_0 \simeq 10^{-7}\text{ eV}$, např. pro hliník $V_0 = 0.55 \times 10^{-7}\text{ eV}$. Určete index lomu hliníku, tj. poměr vlnové délky ve vakuu a v materiálu, pro neutrony s $\lambda = 900\text{ Å}$.

(d) Uvedené neutrony dopadají na rovinný povrch hliníku ve vakuu. Stanovte interval úhlů dopadu, pro které nastává totální odraz.

1.11 Bose-Einsteinova kondenzace

Bose-Einsteinova kondenzace nastává v systémech neinteragujících bosonů při teplotách nižších, než je prahová teplota T_{BE} . Teplota T_{BE} je přibližně rovna teplotě, při které je de Broglieova vlnová délka odpovídající energii termálního pohybu rovna střední hodnotě vzdálenosti mezi bosony. Odhadněte teplotu T_{BE} pro plyn sodíkových atomů o hustotě $n = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$.