4 Harmonický oscilátor

4.1 Vlnové funkce harmonického oscilátoru

Vyřešte stacionární Schrödingerovu rovnici pro harmonický oscilátor s potenciálem $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Nejprve zaveďte bezrozměrné proměnné $X = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ a $\varepsilon = 2E/\hbar\omega$. Řešení získané diferenciální rovnice pro $\Psi(X)$ jsou tvaru: (polynom v X) $\times$ e^{-aX^2}. Určete konstantu a a polynomy, které odpovídají základnímu stavu a několika nejnižším excitovaným stavům. Najděte rovněž spektrum vlastních energií. Výsledky porovnejte s výsledky algebraického postupu.

4.2 Dvourozměrný harmonický oscilátor

Částice o hmotnosti m se pohybuje v dvourozměrném harmonickém potenciálu

$$V(x, y) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \; .$$

Najděte vlnové funkce a energie základního stavu a pěti nejnižších excitovaných stavů. Vyjádřete nalezené vlnové funkce v kartézských i polárních souřadnicích.

4.3 Trojrozměrný harmonický oscilátor •

Uvažujme o částici v trojrozměrném prostoru v potenciálovém poli $\frac{1}{2}m\omega^2\boldsymbol{r}^2$. Hamiltonián má tvar

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2 + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{z}^2 = \hat{H}_x + \hat{H}_y + \hat{H}_z \; ,$$

kde

$$\hat{H}_{x/y/z} = \frac{\hat{p}_{x/y/z}^2}{2m} + \frac{1}{2m}\,\omega^2\hat{x}^2/\hat{y}^2/\hat{z}^2 \; .$$

S využitím metody separace proměnných (můžete provést na abstraktní úrovni nebo na úrovni souřadnicové reprezentace) nalezněte vlastní hodnoty a vlastní vektory $\hat{H}$.

4.4 Gaussovský balík v harmonickém potenciálu

Částice o hmotnosti m se pohybuje v harmonickém potenciálu $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. V čase $t = 0$ je vlnová funkce částice dána vztahem

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \; .$$

Parametr σ nijak nesouvisí s parametry oscilátoru. Jaká je pravděpodobnost, že v čase $t = 0$ naměříme energii $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$?

4.5 Maticové elementy HO •

Uvažujte o jednorozměrném harmonickém oscilátoru s frekvencí ω a hmotností m. Reprezentujte operátor polohy $\hat{x}$ pomocí kreačních a anihilačních operátorů a vypočtěte maticové elementy $(\hat{x}^2)_{0,0}$, $(\hat{x}^2)_{1,1}$, $(\hat{x}^2)_{2,2}$, $(\hat{x}^2)_{0,2}$, $(\hat{x}^2)_{10,5}$. Maticový element $(\hat{x}^2)_{m,n} = \langle m|\hat{x}^2|n\rangle$ je vyjádřen v bázi vlastních stavů oscilátoru, energie stavu $|n\rangle$ je $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

4.6 Polámané pero

Kvantová částice se nachází v základním stavu harmonického oscilátoru řízeného hamiltoniánem

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{x}^2 \ .$$

V jistém okamžiku se oscilátoru poláme pero takovým způsobem, že nová frekvence oscilátoru je $\eta\omega_0$. Stanovte pravděpodobnost, že částici spatříme v základním stavu nového hamiltoniánu

$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\eta\omega_0)^2\hat{x}^2 \ .$$

4.7 Časový vývoj harmonického oscilátoru •

Harmonický oscilátor má frekvenci ω a je řízen hamiltoniánem

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hat{1}\right)\hbar\omega = \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\hat{1}\right)\hbar\omega \ .$$

Označme jako $|n\rangle$ vlastní stav příslušný energii $E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$. V čase $t = 0$ se oscilátor nachází ve stavu

$$|\psi(0)\rangle = \frac{|2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{2}} \ .$$

Najděte střední hodnoty energie, polohy a hybnosti v čase $t > 0$.

4.8 Spřažené oscilátory ✡

Dva identické jednorozměrné harmonické oscilátory (hmotnost každého je m, frekvence ω) jsou spřaženy vazbou Cx_1x_2, kde x_1 a x_2 jsou souřadnice jednotlivých oscilátorů. Najděte vlastní energie systému. Určete střední hodnotu $\langle(\Delta x_1)^2\rangle = \langle(\Delta x_2)^2\rangle$ v základním stavu.

4.9 Harmonický oscilátor v elektrickém poli ✡

Částice o hmotnosti m nesoucí náboj $-e$ se pohybuje v harmonickém potenciálu $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.
(a) Správnou volbou konstant N a α najděte základní stav popsaného harmonického oscilátoru, jehož vlnová funkce může být zapsána jako $\Psi_0(x) = N\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2/2}$. Určete příslušnou energii,
(b) V čase $t = 0$ je zapnuto elektrické pole o velikosti E, které představuje potenciál $V'(x) = eEx$. Jaká je nová vlnová funkce a energie základního stavu?
(c) Předpokládejme, že čas potřebný k zapnutí pole byl mnohem kratší než $1/\omega$. Jaká je pravděpodobnost, že částice zůstane v základním stavu?

4.10 Koherentní stavy ✡

Uvažujme o jednorozměrném harmonickém oscilátoru s frekvencí ω. Nechť $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ jsou anihilační a kreační operátory a $|n\rangle$ je vlastní stav operátoru $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ příslušný vlastní hodnotě n. Na rozvičení nejprve vypočtěte komutátor $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n]$. Koherentní stav je definován vztahem $|\alpha\rangle \propto \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle$, kde α je komplexní parametr.
(a) Zapište stav $|\alpha\rangle$ jako superpozici stavů $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ a určete normovací konstantu.
(b) Ukažte, že $|\alpha\rangle$ je vlastní stav anihilačního operátoru $\hat{a}$ a najděte příslušnou vlastní hodnotu.
(c) Stanovte střední hodnotu operátoru polohy $\hat{x}$.
(d) Předpokládejme, že oscilátor se v čase $t = 0$ nachází v koherentním stavu $|\alpha\rangle$, kde α je nyní reálné. Stanovte střední hodnotu operátoru polohy $\hat{x}$ v čase $t \geq 0$.