F6060 Programování zkouška – termín 31. 5. 2024

1. Skok Felixe Baumgartnera

Rakouský parašutista a kaskadér Felix Baumgartner se dne 14. 10. 2012 stal prvním člověkem, který bezmotorově překonal rychlost zvuku a to při volném pádu ze stratosféry z výšky 39 km. V této úloze budete simulovat průběh jeho letu numerickým řešením pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{1}{2m}\, S\rho\, v^2\,,$$

která zahrnuje tíhové zrychlení a odporovou sílu úměrnou kvadrátu rychlosti. Odpor vzduchu je přímo úměrný jeho hustotě ρ, která je ve velkých výškách velmi nízká, což bylo klíčové pro překonání rychlosti zvuku v první části letu. Závislost hustoty vzduchu na výšce popíšeme pomocí vztahu

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4\right)$$

s parametry $\rho_0 = 1{,}225\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $A = -8{,}88\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^{-1}}$, $B = -2{,}40\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^{-2}}$, $C = 7{,}58\cdot 10^{-15}\ \mathrm{m^{-3}}$ a $D = 4{,}32\cdot 10^{-19}\ \mathrm{m^{-4}}$. Dále počítejte s následujícími hodnotami konstant: $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, hmotnost $m = 105\ \mathrm{kg}$ a efektivní plocha $S = 0{,}9\ \mathrm{m^2}$. Následuje podrobný návod k numerickému řešení.

Dráhu letu od místa seskoku ve výšce h_0 až k zemskému povrchu rozdělíme na N stejně dlouhých intervalů $\Delta h = h_0/N$. Vhodná hodnota N pro výpočet je například $N = 1000$. Označme jako a_n, v_n, t_n postupně zrychlení, rychlost a čas v okamžiku, kdy se Felix Baumgartner nachází ve výšce $h_n = h_0 - n\Delta h$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots N$. Počáteční hodnoty jsou $v_0 = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ pro počáteční výšku $h_0 = 39000\,\mathrm{m}$. Při průletu jednoho intervalu mezi výškami h_n a h_{n+1} považujme zrychlení dané pohybovou rovnicí za přibližně konstantní, potom lze změny sledovaných veličin během jednoho intervalu snadno určit na základě následujících vzorců

$$\begin{aligned}
a_n &= g - \frac{1}{2m} S\,\rho(h_n)\, v_n^2\,,\\
\Delta t &= \frac{1}{a_n}\left(\sqrt{v_n^2 + 2a_n\Delta h} - v_n\right),\\
t_{n+1} &= t_n + \Delta t\,,\\
v_{n+1} &= v_n + a_n\Delta t\,.
\end{aligned}$$

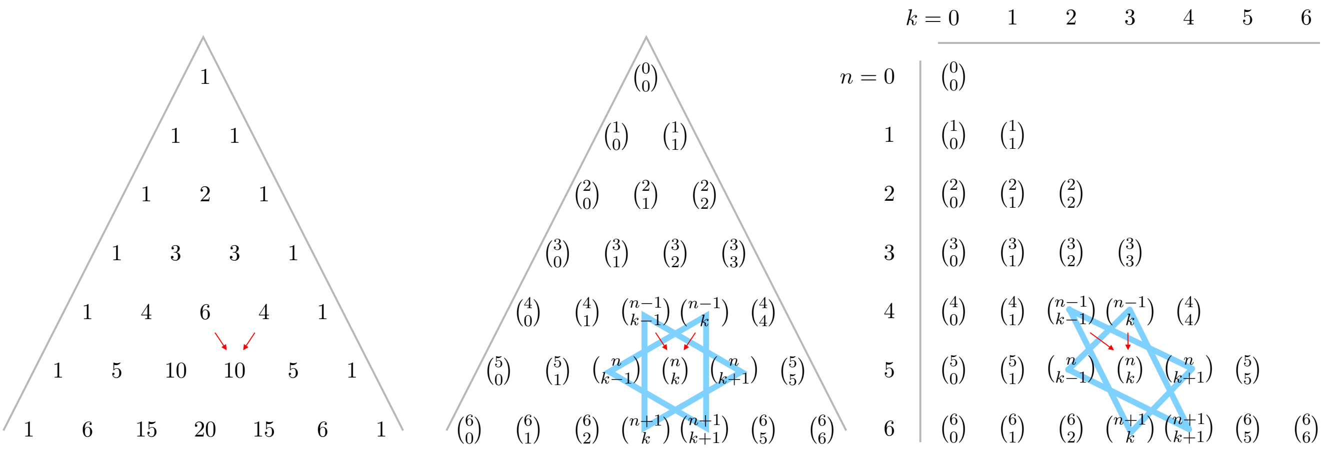
Pomocná veličina Δt odpovídá času potřebnému na průlet mezi h_n a h_{n+1}. Opakovanou aplikací těchto vzorců najděte hodnoty t_n a v_n pro $n = 1, 2, 3, \ldots N$ a vykreslete s jejich využitím výšku Felixe Baumgartnera v závislosti na čase a dále závislost jeho rychlosti na výšce.

Pozn.: Náš výpočet pomíjí fakt, že Felix Baumgartner v určitou chvíli otevřel padák (konkrétně ve výšce 1,5 km nad zemí), čímž se skokově zvýšila odporová síla.

2. Pascalův trojúhelník a Davidova hvězda

Pascalův trojúhelník popsaný Blaisem Pascalem v jeho posmrtně vydaném díle „Traité du triangle arithmétique" (1665), ovšem známý již například perským matematikům v 10. století, představuje snadný způsob vyčíslení binomických koeficientů $\binom{n}{k}$, který se obejde bez počítání faktoriálů a dokonce i bez násobení. Jedinou potřebnou aritmetickou operací je zde sčítání. Konstrukce Pascalova trojúhelníku je znázorněná v levém obrázku. Na okrajích jsou umístěny jedničky, vnitřní čísla získáváme sčítáním dvou sousedících čísel z předchozího řádku, jak je vyznačeno červenými šipkami. Tímto postupem vzniknou v trojúhelníku hodnoty binomických koeficientů ve struktuře zachycené na prostředním obrázku. Uvedené konstrukční pravidlo Pascalova trojúhelníku je založeno na vztahu

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$



Mezi binomickými koeficienty v Pascalově trojúhelníku ovšem panuje řada dalších vztahů. Příkladem jsou různé souvislosti v sadách koeficientů vytvářejících v Pascalově trojúhelníku obrazec Davidovy hvězdy (vyznačen modrým podbarvením). Tyto souvislosti zůstávaly lidstvu dlouho skryté, nejznámější z nich byla publikována překvapivě až v roce 1972 Henrym W. Gouldem a zní

$$\mathrm{GCD}\left\{\binom{n-1}{k},\binom{n}{k-1},\binom{n+1}{k+1}\right\}=\mathrm{GCD}\left\{\binom{n-1}{k-1},\binom{n}{k+1},\binom{n+1}{k}\right\},$$

kde $\mathrm{GCD}\{a,b,c\}$ značí největšího společného dělitele čísel a, b, c. Trojice binomických koeficientů ležících na jednom a druhém trojúhelníku tvořícím Davidovu hvězdu mají tedy stejného největšího společného dělitele. [1] My se pro jednoduchost zaměříme na jinou identitu týkající se součinu uvedených binomických koeficientů:

$$\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}=\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}.$$

Lze ji snadno ověřit rozepsáním binomických koeficientů pomocí faktoriálů, naším cílem ovšem bude numerické ověření postupem popsaným v následujícím.

1. Nejprve zkonstruujte Pascalův trojúhelník obsahující binomické koeficienty $\binom{n}{k}$ s $0 \le n, k \le N$, kde N je předepsaná hodnota. Výhodné je zachytit jej ve čtvercové matici o velikosti $(N+1)\times(N+1)$, jak je ukázáno na pravém obrázku pro případ $N=6$. Konstrukci začněte naplněním prvního sloupce a diagonály matice jedničkami, poté stanovte hodnoty z vnitřku trojúhelníku pomocí součtového pravidla naznačeného červenými šipkami.

2. Ověřte rovnost součinů koeficientů tvořících dva trojúhelníky Davidovy hvězdy (nyní deformované). Přitom projděte $n = 2, 3, 4, \ldots, N-1$ a pro každé n rozsah $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Tím budou prověřeny všechny Davidovy hvězdy obsažené v naší tabulce.

[1] Na webové stránce `https://mathworld.wolfram.com/StarofDavidTheorem.html` najdou zájemci další varianty teorému Davidovy hvězdy, které se zabývají největšími společnými děliteli různých formací binomických koeficientů.