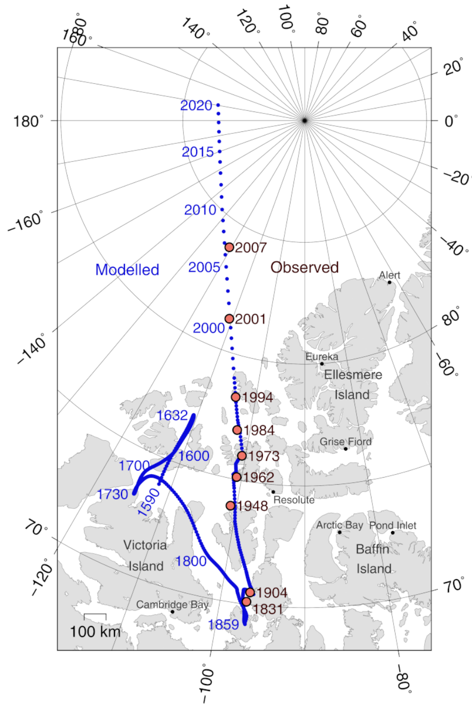
# F6060 Programování zkouška – termín 6. 6. 2024

## 1. Pohyb severního magnetického pólu




Magnetické pole Země je způsobeno obřími proudy proudícími ve žhavé tekuté směsi převážně železa a niklu tvořící vnější zemské jádro. Tyto proudy se ovšem s časem proměňují, což má za následek například přesouvání magnetických pólů definovaných jako místa, ve kterých magnetické indukční čáry směřují kolmo na zemský povrch. V této úloze zpracujete datový soubor `NP.xy` zachycující časový vývoj polohy severního magnetického pólu po několik staletí, konkrétně v letech 1590–2025. Data pocházejí z referenčního modelu IGRF-13[1] a jejich znázornění trajektorií pólu vykreslenou na mapě severu Kanady je v pravém obrázku.[2] V prvním sloupci souboru jsou hodnoty východní zeměpisné délky ve stupních, ve druhém pak severní zeměpisná šířka rovněž ve stupních a v posledním sloupci se nachází letopočet.

1. Prvním úkolem bude znázornit polohy pólu v tzv. azimutální ekvidistantní projekci, která je použita i v pravém obrázku. Za střed projekce přitom zvolíme severní zeměpisný pól. Označíme-li jako $\vartheta$ zeměpisnou šířku (počítá se od rovníku) a jako $\varphi$ zeměpisnou délku, pak azimutální ekvidistantní projekce odpovídá polárnímu grafu, kde je jako vzálenost od středu použit doplněk $\vartheta$ do pravého úhlu, tedy $90^\circ - \vartheta$, a polárním úhlem je přímo úhel $\varphi$. Je tedy třeba vykreslit body s kartézskými souřadnicemi

$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,, \quad \text{kde} \quad r = 90^\circ - \vartheta\,.$$

Měli byste tak dostat obrázek podobný tomu napravo. Pokud chcete, můžete k vykreslení trajektorie pólu použít i polární typ grafu podporovaný např. pythonovskou knihovnou Matplotlib.

2. Druhým Vaším úkolem bude vypočítat a graficky znázornit rychlost pohybu pólu v závislosti na čase. Ve shodě s datovým souborem zvolte pro výpočet rychlosti časový krok 1 rok. Pak stačí určit vzdálenosti dvojic po sobě následujících poloh v souboru, které vyjádřené v km číselně odpovídají rychlosti pohybu pólu v jednotkách km/rok. K určení vzdáleností na povrchu Země sáhneme po sférické geometrii. Vzdálenost dvou míst na povrchu koule o poloměru $R$ lze spočíst pomocí vztahu

$$L = R\arccos\left[\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\right]\,,$$

kde $\vartheta_1$, $\vartheta_2$ jsou zeměpisné šířky a $\varphi_1$, $\varphi_2$ zeměpisné délky uvažovaných dvou míst. Za $R$ dosazujte průměrný poloměr Země 6371 km. Výsledkem bude graf rychlosti severního magnetického pólu v km/rok v závislosti na letopočtu.

## 2. Konec světa

V této úloze propočítáme nereálný scénář zániku naší planety, který může posloužit nanejvýš jako námět pro sci-fi film nevalné kvality. Příběh začíná náhlým zastavením oběžného pohybu Měsíce vůči Zemi, po němž dojde ke gravitací řízenému přibližování těchto dvou těles. Volný pád Měsíce na Zemi přirozeně skončí katastrofickým zánikem Země a s ní veškerého života. Vaším úkolem bude určit, za jak dlouho od zastavení obíhání Měsíce kolem Země dojde k nárazu. K tomu budete numericky řešit diferenciální rovnici pro vzdálenost $r$ středů Měsíce a Země

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r^2}\,,$$

v níž $G = 6{,}6743\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$ značí gravitační konstantu a $M_1 = 5{,}972\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ a $M_2 = 7{,}342\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ jsou hmotnosti Země a Měsíce. Za počáteční vzdálenost v okamžiku $t = 0$ vezměme střední vzdálenost

[1] International Geomagnetic Reference Field, `https://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html`, soubor poloh severního magnetického pólu je dostupný na adrese `https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/data/poles/NP.xy`

[2] Obrázek pochází z `https://en.wikipedia.org/wiki/North_magnetic_pole`

Měsíce a Země $r_0 = 384400\,\mathrm{km}$. Abychom se v naší simulaci oprostili od jednotek a potlačili příliš široký řádový rozsah čísel vystupujících v diferenciální rovnici, naškálujeme vzdálenost a čas následovně:

$$\xi = \frac{r}{r_0}\,, \qquad \tau = \frac{t}{T}\,, \quad \text{kde} \quad T = \sqrt{\frac{r_0^3}{G(M_1 + M_2)}}\,.$$

S pomocí uvedených škálovaných veličin nabývá diferenciální rovnice jednoduchého tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{1}{\xi^2}$$

a počáteční podmínka přejde do podoby $\xi(\tau = 0) = 1$. Pro výše uvedené hodnoty konstant pak vychází $T = 104{,}2\,\mathrm{h}$. Diferenciální rovnici řešte jednoduchou Eulerovou metodou, která vytváří posloupnost hodnot času, rychlosti a vzdálenosti podle následujícího předpisu ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$):

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1} &= \tau_n + \Delta\tau\,, \\
\nu_{n+1} &= \nu_n - \frac{1}{\xi_n^2}\,\Delta\tau\,, \\
\xi_{n+1} &= \xi_n + \nu_n\,\Delta\tau\,.
\end{aligned}$$

Počáteční hodnoty jsou dle předpokladu rovny $\tau_0 = 0$, $\nu_0 = 0$, $\xi_0 = 1$ a aplikováním uvedených formulí získáváme postupně informaci o pohybu s pevným časovým krokem $\Delta\tau$. Jakmile $\xi_n$ dosáhne nuly nebo se objeví hodnota $\xi_n < 0$ (toto je pravděpodobnější možnost), simulace končí. Veličina $\nu$ představuje škálovanou rychlost $\nu = vT/r_0$, kde $v$ je skutečná rychlost.

1. Považujme nejprve pro jednoduchost Zemi a Měsíc za hmotné body. Eulerovou metodou s krokem $\Delta\tau = 10^{-5}$ odhadněte čas nárazu. Za čas nárazu přitom považujte poslední $\tau_n$, pro které platí $\xi_n \geq 0$. Pro kontrolu můžete svůj numerický výsledek srovnat s analytickým vyjádřením

$$\tau(\xi = 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

2. Započítáme i konečnou velikost obou těles, které si představíme jako koule s poloměry $R_1 = 6371\,\mathrm{km}$ a $R_2 = 1737\mathrm{km}$. Ke srážce v tomto případě dojde, pokud vzdálenost středů klesne na $R_1 + R_2$. Odhadněte tedy odpovídající čas jako poslední $\tau_n$, pro které platí $\xi_n \geq (R_1 + R_2)/r_0$.

3. Pro simulaci z bodu 2 vykreslete časovou závislost vzdálenosti $r$ v jednotkách km a rychlosti $v$ v jednotkách km/h. Časová osa bude mít jednotku h.