Masarykova univerzita Brno
Přírodovědecká fakulta
Katedra fyziky

Geometrická teorie mechanických soustav s neholonomními vazbami

Diplomová práce

Jitka Janová **2002**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s využitím citované literatury a bez jakékoli nepřípustné pomoci.

Brno, květen 2OO2

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí své diplomové práce Doc. RNDr. Janě Musilové, CSc, která mi byla velice nápomocna v průběhu studia dané problematiky a přispěla mnoha cennými radami při tvorbě této diplomové práce.

Obsah

1. Úvod: Pohybové rovnice klasických mechanických soustav

Pro fyzikální objekty jako jsou hmotný bod, těleso, či jejich soustavy, a síly na tyto objekty působící zavádí fyzika označení mechanický systém. V newtonovské fyzice je tzv. skutečná síla (např. síla gravitační, pružná,…) příčinou změny rychlostí částic a u těles může jejím působením docházet navíc k deformaci. Pokud omezíme výběr těles na tuhá, pak jediným důsledkem silového působení je změna pohybového stavu tělesa či částice.

V případě, že na polohy a rychlosti hmotných bodů a těles v mechanickém systému nejsou kladeny žádné omezující požadavky, nazýváme tento systém nevázaným. V klasické mechanice je pohyb objektů nevázaného systému zcela určen pohybovými rovnicemi, které vyplývají z Newtonových pohybových zákonů, a počátečními podmínkami. Řešením pohybových rovnic získáváme časovou závislost trajektorií a rychlostí hmotných bodů či těles, což je maximální informace, kterou můžeme o mechanickém systému zjistit. Základním problémem mechaniky je tedy nalezení pohybových rovnic.

Kromě Newtonových pohybových zákonů je možné k pohybovým rovnicím některých mechanických soustav dospět z jediného variačního principu. Například k Lagrangeovým rovnicím vede Lagrangeův princip spočívající v převedení dynamické problematiky na statickou využitím d'Alembertova principu a následném aplikování principu virtuálních posunutí.[1] Ekvivalentním principem je Eulerův variační princip, který je založen na variaci určitého integrálu. V případě Lagrangeových rovnic jde o integrál, jehož integrandem je Lagrangeova funkce a integrace podle času probíhá od t_1 do t_2. Systémy, jejichž pohybové rovnice lze získat z Lagrangeovy funkce jako Lagrangeovy rovnice, se nazývají variační.

V případě, že na polohy a rychlosti hmotných bodů a těles v mechanickém systému jsou kladeny omezující požadavky, řekneme, že systém je podroben vazbám, a k pohybovým rovnicím je nutno přidat rovnice tzv. vazebních podmínek. Vazby můžeme rozlišit podle typu vazebních podmínek na holonomní nebo neholonomní a reonomní nebo skleronomní. Holonomní vazby omezují pouze polohy těles, neholonomní kladou podmínky i na jejich rychlosti, reonomní podmínky se liší od skleronomních explicitní závislostí na čase.

Neholonomními vazbami mohou být např. podmínky omezující pohyb těles při jejich valení po plochách nebo při optimalizaci trajektorií různých těles. Z hlediska Newtonovy mechaniky má přítomnost vazeb za následek existenci reakcí (reakčních neboli vazbových sil), které se ‚postarají' o splnění vazebních podmínek. Je-li např. pohyb částice vázán na hladkou plochu, je v uvažovaném místě vazební síla kolmá na tuto plochu.

Mechanické systémy s neholonomními vazbami jsou předmětem zkoumání již od 19. století. Podrobné analýze byly podrobeny zejména lineární neholonomní vazby, tj. takové, které závisejí lineárně na rychlostech. Základní metodou řešení neholonomních systémů je metoda Lagrangeových multiplikátorů, která využívá principu virtuální práce za předpokladu, že vazební síly tento princip splňují. Poněvadž je splnění principu virtuální práce pro jednodušší typy vazeb zřejmé, požaduje se totéž pro obecné vazby a mechanickými systémy jsou nazývány pouze ty, jejichž vazební síly splňují princip virtuální práce (viz [7]). Metodou Lagrangeových multiplikátorů se řeší především systémy, jejichž neholonomní podmínky jsou lineární ve složkách rychlosti, lze ji ale použít i pro vazební podmínky, které jsou homogenní funkcí n-tého stupně ve složkách rychlosti. Pro vazební podmínky, které obsahují složitější funkce složek rychlostí, nelze zformulovat princip virtuální práce a tedy nelze metodu Lagrangeových multiplikátorů použít. Nutno ovšem dodat, že pro běžné fyzikální příklady je tato metoda dostačující.

Ve třicátých letech minulého století byl problém řešení neholonomních systémů zastíněn „kvantovou revolucí" a byl na čas odložen. V tomto období začala probíhat fúze klasických poznatků z geometrie a mechaniky, která umožnila mimo jiné nový pohled na vázané mechanické systémy. Jedním z průkopníků této „geometrické mechaniky" byl od šedesátých let minulého století W. Tulczyjev (viz [3]), který v osmdesátých letech dospěl ke geometrickému popisu vázaných systémů. Problému

[1] Pro konzervativní síly jsou výsledkem známé Lagrangovy rovnice (druhého druhu) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$

geometrického popisu neholonomních vazeb se pak jako jedni z prvních věnovali L.D. Faddeev a A.M. Vershik (viz [9]).

Od počátků teorie byla pozornost věnována především geometrickému popisu Lagrangeových systémů, a i v současné době tento trend přetrvává. Rozvinulo se několik rozdílných přístupů k neholonomní problematice, které nekladou žádné požadavky na tvar neholonomních podmínek vázaných systémů. Např. v [3] podkladovou varietou je tečné rozvrstvení na dané varietě, která představuje konfigurační prostor a vázaný mechanický systém je modelován implicitními diferenciálními rovnicemi. Na tečném rozvrstvení je také formulována teorie nelineárních neholonomních systémů ve [4], kde vazební podmínky definují podvarietu tečného prostoru ke konfiguračnímu prostoru, a v [6] je na obdobném geometrickém modelu diskutována teorie aktivních neholonomních vazeb.

Geometrická teorie nevázaných mechanických soustav s obecným počtem stupňů volnosti je již velmi dobře zpracována pro obecný řád pohybových rovnic (viz např. [10]) a obdobně je tomu i pro případ systémů s holonomními skleronomními i reonomními vazbami. Některé problémy týkající se vázaných systémů s obecnými vazbami kladenými i na rychlosti však zůstávají ještě otevřeny.

Jedním z nových přístupů k neholonomní problematice, spadajícím do oblasti matematické fyziky, je teorie jetových prostorů, kterou použili jako jedni z prvních G.Giachetta a M. de León (viz [3]). Tuto teorii lze formulovat pomocí fibrovaných variet a jejich jetových prodloužení jako podkladových geometrických struktur pro popis stavu mechanických soustav, a pro popis dynamiky soustavy lze využít diferenciálních forem na fibrované varietě. Na rozdíl od jiných přístupů se tato teorie neomezuje pouze na variační systémy a nemá problémy s objekty obsahujícími derivace vyšších řádů (např viz. [1]).

Tato práce se zabývá aplikací geometrické teorie neholonomně vázaných systémů na konkrétní příklady takových soustav a všímá si fyzikální interpretace použitých postupů a výsledného řešení.

V následujících úvodních pasážích si povšimneme tradičního popisu mechanických soustav v souřadnicích a formulujeme některé motivační úvahy pro případ vázaných systémů.

Mechanické systémy bez vazeb

Mějme volnou soustavu N částic o hmotnostech $m_1,\dots,m_N$. Protože soustava nepodléhá vazbám, je její okamžitý mechanický stav v čase t reprezentován bodem $\left(x^\sigma, \dot{x}^\sigma\right)$, $1 \le \sigma \le 3N$, ve fázovém prostoru. Stav soustavy se mění vlivem interakcí částic uvnitř soustavy a vlivem interakce soustavy s okolím v souladu s Newtonovými pohybovými rovnicemi:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1,\dots,m_N\ddot{\vec{r}}_N = \vec{F}_N\,, \qquad \mathbf{(1.1.1)}$$

kde $\vec{r}_1 = \left(x^1, x^2, x^3\right)$, $\vec{r}_2 = \left(x^4, x^5, x^6\right)$,..., $\vec{r}_N = \left(x^{3N-2}, x^{3N-1}, x^{3N}\right)$ jsou polohové vektory částic, $\vec{F}_1,\dots,\vec{F}_N$ výsledné síly působící na jednotlivé částice, jsou obecně funkcí času, poloh i rychlostí všech částic soustavy. Řešením takové soustavy *3N* obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu při zadaných počátečních podmínkách (mechanickém stavu v čase t=0) je určena trajektorie systému v konfiguračním prostoru.

Nejobecnější vyjádření dynamiky nevázaného systému s m stupni volnosti je dáno soustavou m obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (používáme Einsteinovu sumaci):

$$A_\sigma + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0\,,\ 1 \le \sigma, \nu \le m\,, \qquad \mathbf{(1.1.2)}$$

kde q^ν, $\dot{q}^\nu$, $\ddot{q}^\nu$ jsou zobecněné souřadnice polohy, rychlosti a zrychlení, a $A_\sigma\left(t, q^\nu, \dot{q}^\nu\right)$, $B_{\sigma\nu}\left(t, q^\pi, \dot{q}^\pi\right)$, $1 \le \nu, \pi \le m$ jsou funkce stavu soustavy a času.

Pokud je mechanický systém variační, pak jsou Euler Lagrangeovy rovnice funkcionálem akce $s(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2} L(t,q^\sigma\gamma,\dot{q}^\sigma\gamma)\mathrm{d}t$, kde γ je parametrické vyjádření křivky v konfiguračním prostoru a $L(t,q^\sigma,\dot{q}^\sigma)$ je *Lagrangeova funkce*, která je dána rozdílem kinetické a potenciální energie systému. Pak

$$E_\sigma = A_\sigma + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\sigma = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\right)$$

a dostáváme

$$A_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}^\sigma} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^\nu \partial \dot{q}^\sigma}\dot{q}^\nu\right),\ B_{\sigma\nu} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\nu \partial \dot{q}^\sigma}. \quad \textbf{(1.1.3)}$$

Typicky nevariačními jsou všechny systémy, jimž nelze přisoudit potenciální energii, např. částice v odporujícím prostředí.

Mechanické systémy s holonomní vazbou

V řadě situací, kdy soustava podléhá holonomním skleronomním podmínkám, tedy podmínkám kladeným na polohu v konfiguračním prostoru, lze řešení problému jejího pohybu převést opět na nevázaný mechanický systém, avšak s počtem stupňů volnosti menším o počet daných vazeb. Takové situace jsou popsány např.v [7].

Uvažujme o mechanickém systému popsaném rovnicemi (1.1.2). Nechť je tento systém podroben nezávislým vazebním podmínkám

$$u^i = u^i(t,q^\sigma),\ 1\le\sigma,\le m,\ 1\le i\le k,\ 1\le k\le m-1, \quad \textbf{(1.2.1)}$$

které mají za následek pohyb systému po omezené trajektorii v konfiguračním prostoru $q^\sigma = q^\sigma(t)$. Abychom systém přiměli k pohybu po některé z trajektorií splňujících omezení (1.2.1), musíme působit vhodně zvolenými dodatečnými vazebními silami $\Phi = (\Phi_\sigma)$, $1\le\sigma\le m$. Nová soustava pohybových rovnic, které nazveme *deformované*, má tvar:

$$(A_\sigma - \Phi_\sigma) + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0,\ 1\le\sigma,\nu\le m. \quad \textbf{(1.2.2)}$$

Vazební podmínky (1.2.1) definují v konfiguračním prostoru (*m*-*k*)-rozměrnou plochu. Z požadavku, aby vazební síla nekonala práci, vyplývá její kolmost k vazební ploše,

$$\Phi_\sigma = \mu_0^i \frac{\partial u^i}{\partial q^\sigma},$$

kde μ_0^i jsou zatím neznámé funkce času a souřadnic, které se nazývají *Lagrangeovy multiplikátory*. Tato podmínka znamená, že Φ je v každém okamžiku lineární kombinací normál k jednotlivým ($m-1$) rozměrným plochám v konfiguračním prostoru, které jsou popsány rovnicemi (1.2.1), tj.

$$\Phi_\sigma = \mu_0^i \operatorname{grad} u^i.$$

Deformované rovnice mají tvar:

$$\left(A_\sigma - \mu_0^i \frac{\partial u^i}{\partial q^\sigma}\right) + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0 \quad \textbf{(1.2.3)}$$

a spolu s rovnicemi vazeb (1.2.1) představují soubor (m+k) diferenciálních rovnic (m druhého a k prvního řádu) pro m neznámých funkcí $q^{\sigma}(t)$ a k funkcí μ_0^i.

Nyní zjednodušíme deformované pohybové rovnice. Při vhodném označení pořadí proměnných lze vazební podmínky vyjádřit explicitně takto: $\bar{u}^i(t,q^{\sigma}) = q^{m-k+i} - g^i(t,q^l)$, $1 \le i \le k$, $1 \le l \le m-k$. Zaveďme zobrazení $\iota : (t,q^l) \to (t,q^l,g^i)$. Deformované rovnice (1.2.3) lze pak přepsat:

$$(A_l \circ \iota) + \mu_0^i \frac{\partial g^i}{\partial q^l} + (B_{ls} \circ \iota)\ddot{q}^s + (B_{l,m-k+i} \circ \iota)\frac{\mathrm{d}^2 g^i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

$$(A_{m-k+i} \circ \iota) - \mu_0^i + (B_{m-k+i,s} \circ \iota)\ddot{q}^s + (B_{m-k+i,m-k+j} \circ \iota)\frac{\mathrm{d}^2 g^j}{\mathrm{d}t^2} = 0\,. \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

Z (1.2.5) vyjádříme μ_0^i a dosazením do (1.2.4) dostaneme

$$\widetilde{A}_l + \widetilde{B}_{ls}\ddot{q}^s = 0\,, \text{kde} 1 \le l,s,r \le m-k\,, \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

$$\widetilde{A}_l = \left[A_l + A_{m-k+i}\frac{\partial g^i}{\partial q^l} + \left(B_{l,m-k+j} + B_{m-k+i,m-k+j}\frac{\partial g^i}{\partial q^l} \right)\left(\frac{\partial^2 g^j}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 g^j}{\partial t \partial q^s}\dot{q}^s + \frac{\partial^2 g^j}{\partial q^r \partial q^s}\dot{q}^r\dot{q}^s \right) \right] \circ \iota$$

$$\widetilde{B}_{ls} = \left[B_{ls} + B_{l,m-k+j}\frac{\partial g^j}{\partial q^s} + B_{m-k+i,s}\frac{\partial g^i}{\partial q^l} + B_{m-k+i,m-k+j}\frac{\partial g^j}{\partial q^s}\frac{\partial g^i}{\partial q^l} \right] \circ \iota$$

Soustava rovnic (1.2.6) společně s (1.2.1) představuje m *redukovaných* rovnic.

Mechanické systémy s neholonomními vazbami

Mějme mechanickou soustavu s m stupni volnosti, která je popsána zobecněnými souřadnicemi a zobecněnými rychlostmi. Pohybové rovnice mají nejobecnější tvar:

$$A_{\sigma} + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^{\nu} = 0\,,\ 1 \le \sigma,\nu \le m\,, \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

kde $A_{\sigma}(t,q^{\nu},\dot{q}^{\nu})$, $B_{\sigma\nu}(t,q^{\pi},\dot{q}^{\pi})$, $1 \le \nu,\pi \le m$ jsou funkce stavu soustavy a času.

Mějme dány nezávislé *neholonomní* vazební podmínky ve tvaru:

$$f^i = f^i(t,q^{\sigma},\dot{q}^{\sigma}),\ 1 \le \sigma \le m\,,\ 1 \le i \le k\,,\ 1 \le k \le m-1\,, \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

ty omezují možnou fázovou trajektorii systému. Soubor vazebních podmínek představuje rovnice jisté „plochy“ Q dimenze 2m+1-k v prostoru daném kartézským součinem časové osy a fázového prostoru.

Neholonomní podmínky mohou vzniknout ve speciálním případě derivací holonomní vazby (1.2.1) podle času. Označíme-li $f^i = \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}$=0, dostáváme tzv. semiholonomní vazbu.

Obdobně jako u holonomních vazeb i u neholonomních musíme pro zajištění splnění vazebních podmínek působit na mechanický systém dodatečnou (vazební) silou, pro kterou z požadavku, aby nekonala práci, vyplývá, že je kolmá k ploše Q. Pro její složky máme tedy tvar:

$$\Phi_{\sigma} = \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{\sigma}}\,,$$

kde $\mu_0^i = \mu_0^i\left(t, q^\nu, \dot{q}^\nu\right), 1 \le \sigma, \nu \le m$, $1 \le i \le k$, představují opět Lagrangeovy multiplikátory.

Soubor pohybových rovnic s přidanou vazební silou, tj. deformované rovnice

$$\left(A_\sigma - \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0 \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

spolu s vazebními podmínkami (1.3.2) představují soustavu $m+k$ obyčejných diferenciálních rovnic (m druhého a k prvního řádu) pro m neznámých funkcí $q^\sigma(t)$ popisujících trajektorii systému a k funkcí $\mu_0^i = \mu_0^i\left(t, q^\nu(t), \dot{q}^\nu(t)\right)$.

Pro jednoduchost předpokládejme, že vazební podmínky jsou vyjádřeny explicitně takto (při k zadaných nezávislých podmínkách lze takové vyjádření vždy získat):

$$f^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma\right) \equiv \dot{q}^{m-k+i} - g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right),\ 1 \le i \le k,\ 1 \le l \le m-k,\ 1 \le \sigma \le m \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

Obdobně jako u holonomních systémů, pokusme se vyloučit z deformovaných rovnic Lagrangeovy multiplikátory. Zaveďme zobrazení $\iota : \left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right) \to \left(t, q^\sigma, \dot{q}^l, g^i\left(t, q^\nu, \dot{q}^s\right)\right)$ využitím explicitního vyjádření vazebních podmínek dostáváme redukované rovnice (1.3.3) ve tvaru:

$$\left(A_l \circ \iota\right) + \mu_0^i \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} + \left(B_{ls} \circ \iota\right)\ddot{q}^s + \left(B_{l,m-k+i} \circ \iota\right)\frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

$$\left(A_{m-k+i} \circ \iota\right) - \mu_0^i + \left(B_{m-k+i,s} \circ \iota\right)\ddot{q}^s + \left(B_{m-k+i,m-k+j} \circ \iota\right)\frac{\mathrm{d}g^j}{\mathrm{d}t} = 0. \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

Lagrangeův multiplikátor vyjádřený z (1.3.6) dosadíme do (1.3.5) a po úpravě získáme opět redukované rovnice vázaného systému:

$$\widetilde{A}_l + \widetilde{B}_{ls}\ddot{q}^s = 0,\ \text{kde}\, 1 \le l, s, r \le m-k \ \text{a} \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

$$\widetilde{A}_l = \left[A_l + A_{m-k+i}\frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} + \left(B_{l,m-k+j} + B_{m-k+i,m-k+j}\frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l}\right)\left(\frac{\partial g^j}{\partial t} + \frac{\partial g^j}{\partial q^\sigma}\dot{q}^\sigma\right)\right] \circ \iota$$

$$\widetilde{B}_{ls} = \left[B_{ls} + B_{l,m-k+j}\frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^s} + B_{m-k+i,s}\frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} + B_{m-k+i,m-k+j}\frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^s}\frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l}\right] \circ \iota.$$

Řešením soustavy $\widetilde{A}_l + \widetilde{B}_{ls}\ddot{q}^s = 0$, $\dot{q}^{m-k+i} = g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right)$ nalezneme trajektorie vázaného systému, aniž musíme hledat Lagrangeovy multiplikátory. Ty lze zpětně získat a určit tak vazební sílu, dosazením již známého řešení do deformovaných rovnic (1.3.3).

Předchozí motivační úvahy byly vedeny způsobem typickým pro teoretickou mechaniku - tj. v souřadnicích. V obecném případě je jejich platnost omezena na souřadnicové okolí bodů časoprostoru, která jsou lokálně difeomorfní s R^{m+1}.

Geometrické teorie mechanických systémů interpretují levé strany pohybových rovnic jako složky geometrického objektu, definovaného globálně na vhodné podkladové varietě, soubor vazebních podmínek pak jako podvarietu podkladové variety, a vazební sílu popisují pomocí jisté distribuce na vazební podvarietě.

V geometrické teorii, jejíž aplikací na případ neholonomně vázaných systémů se zabývá tato práce, je zvolena podkladová varieta následujícím způsobem. Konfigurační prostor je v každém okamžiku t reprezentován vrstvou fibrované variety, jejíž báze představuje časovou osu. Fázový prostor je vrstvou prvního jetového prodloužení této variety nad příslušným bázovým bodem t. Přípustná parametrická vyjádření trajektorií systému jsou řezy fibrované variety nad intervaly časové osy, příslušné fázové trajektorie jsou pak prvními jetovými prodlouženími těchto řezů. Tento přístup je výhodný zejména pro možnost snadného zobecnění úvah pro mechaniku vyššího řádu.

Tato práce čerpá z geometrické teorie neholonomních vázaných systémů formulované doc. O. Krupkovou (viz [1]) a je tematicky rozdělena na tři části.

V první části jsou nadefinovány všechny objekty potřebné při konstrukci teorie neholonomních vazeb na fibrované varietě. Je vybudována struktura fibrované variety a jejích jetových prodloužení, je definováno tečné a kotečné rozvrstvení. Podrobná pasáž se věnuje tenzorům, vektorovým polím a distribucím na fibrované varietě i na jejích podvarietách.

Druhá část formuluje teorii neholonomních vazeb pomocí objektů na fibrované varietě. Mechanický systém je reprezentován třídou ekvivalence 2-forem na prvním jetovém prodloužení fibrované variety a neholonomní vazba Q je definována jako podvarieta tohoto prodloužení. Dále je zavedena vazební síla jako 2-forma na prvním jetovém prodloužení fibrované variety, je nalezeno geometrické vyjádření principu virtuální práce vazebních sil a mechanický systém s neholonomními vazbami je definován jako deformace původního nevázaného systému vazební silou. Výsledkem teorie je pak převedení problému mechanického systému s vazbami na problém nevázaného mechanického systému na podvarietě Q, který je popsán tzv. redukovanými pohybovými rovnicemi.

Poslední část je věnována příkladům, které aplikují teorii na fyzikální příklady. Pro možnost srovnání dosažených výsledků jsou některá zadání převzata z prací, které neholonomní systémy řeší odlišným způsobem.

2. Základní geometrické objekty

2.1. Fibrovaná varieta a její prodloužení

V tomto odstavci stručně definujeme základní podkladové geometrické struktury: hladké variety,fibrované variety a jejich jetová prodloužení.

2.1.1. Hladká varieta

Definice 2.1.1 *Topologickou varietou dimenze n* rozumíme každý topologický prostor (X,τ), kde τ je topologie na nosné množině X, s vlastnostmi:

1. je hausdorfovský (ke každé dvojici bodů $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$ existují taková jejich okolí $U_1, U_2 \in \tau$, $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, že platí $U_1 \cap U_2 = \emptyset$)
2. má spočetnou bázi topologie
3. je lokálně homeomorfní s (R^n, τ_p), kde τ_p je přirozená topologie, tj. ke každému bodu $x \in X$ existuje okolí U a homeomorfismus U na R^n (homeomorfismus je vzájemně jednoznačné a vzájemně spojité zobrazení)

Definice 2.1.2 Nechť (X,τ) je topologická varieta dimenze n. *Lokálním souřadnicovým systémem* na X nazýváme dvojici (U,φ) s vlastnostmi:

1. $U \in \tau$
2. zobrazení $\varphi : x \in U \to \varphi(x) \subset R^n$ je homeomorfismus množiny U na otevřenou množinu $\varphi(U) \subset R^n$

Definice 2.1.3 Soubor lokálních souřadnicových systémů $A = \{(U_\iota, \varphi_\iota) | \iota \in I\}$ na X s vlastnostmi:

1. $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota = X$
2. každé φ_ι je homeomorfismem otevřených množin $\varphi_\iota : U_\iota \to \varphi_\iota(U_\iota)$
3. pro každé $\iota, \kappa \in I$ je zobrazení $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(U_\iota \cap U_\kappa) \to \varphi_\iota(U_\iota \cap U_\kappa)$ difeomorfismem

   (vzájemně jednoznačné a vzájemně diferencovatelné zobrazení)

se nazývá (diferencovatelný) R^n *atlas* na X (dále jen atlas na X).

Definice 2.1.4 Nechť A je atlas na X, nechť (U,φ) je souřadnicový systém na X. (U,φ) se nazývá *kompatibilní* s A, jestliže $\overline{A} = A \cup \{(U,\varphi)\}$ je atlas na X.

Definice 2.1.5 Nechť A je atlas na X. Pak atlas $A_{\max}$ vzniklý přidáním všech souřadnicových systémů kompatibilních s A se nazývá *maximální atlas na X.*

Dvojici $(X, A_{\max})$ nazýváme n-rozměrnou diferencovatelnou varietou nebo také hladkou varietou.

2.1.2. Fibrovaná varieta

Definice 2.1.6 Nechť X, Y jsou variety $X \subset Y$. Řekneme, že na Y je dána struktura *fibrované variety* s bází *X*, jestliže je dána surjektivní submerze $\pi : Y \to X$.

Obecně dim*X*=*n*, dim*Y*=*m*+*n*. V našem výkladu se však omezíme pouze na případ, kdy je báze jednorozměrná, tedy dim*X*=1, dim*Y*=*m*+1. Zobrazení π budeme nazývat *projekcí*. Jako fibrovanou varietu s bází X a projekcí π značíme trojici (Y, π, X), popřípadě jen π. *Vrstvou* neboli *fibrem* nad bodem $x \in X$ budeme nazývat množinu $\pi^{-1}(x)$.

Definice 2.1.7 *Řezem fibrované variety (Y,π,X)* nad otevřenou množinou $U \subset X$ rozumíme libovolné zobrazení $\gamma : U \to Y$ takové, že platí $\pi \circ \gamma = id_U$.

Definice 2.1.8 *Fibrovaný souřadnicový systém :*
Nechť *(Y,π,X) je* fibrovaná varieta, dim*X*=1, dim*Y*=*m*+1. Označme $pr_1 : R \times R^m \to R$ přirozenou kartézskou projekci na první faktor. Ke každému $y_0 \in Y$ lze najít souřadnicový systém (V, ψ) na Y takový, že $y_0 \in V$ a existuje souřadnicový systém (U, φ) na X takový, že $U = \pi(V)$ a zobrazení $\varphi : U \to R$ je definováno vztahem $\varphi \circ \pi = pr_1 \circ \psi$. Souřadnicový systém (V, ψ) s touto vlastností se nazývá *fibrovaný souřadnicový systém* na *Y*, souřadnicový systém (U, φ) je tzv. *asociovaný souřadnicový systém* na *X*.

Souřadnicový systém (U, φ) má v našem případě jedinou souřadnicovou funkci, kterou označíme *t*, tedy $\varphi = (t)$. Pro souřadnicové funkce fibrovaného souřadnicového systému (V, ψ) pak dostaneme vyjádření $\psi = (t, q^\sigma)$, $1 \le \sigma \le m$.

2.1.3. Prodloužení fibrované variety

Definice 2.1.9 *r-ekvivalence:*
Buď *(Y,π,X)* fibrovaná varieta, dim*X*=1, dim*Y*=*m*+1. Řekneme, že řezy γ_1, γ_2 fibrované variety *(Y,π,X)* definované na okolí bodu $x_0 \in X$ jsou *r-ekvivalentní* v bodě x_0, když platí:

1. $\gamma_1(x_0) = \gamma_2(x_0)$
2. existuje fibrovaný souřadnicový systém (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, na Y takový, že $\gamma_1(x_0) = \gamma_2(x_0) \in V$ a platí:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^k\left(q^\sigma \gamma_1 \varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t^k}\right)_{\varphi(x_0)} = \left(\frac{\mathrm{d}^k\left(q^\sigma \gamma_2 \varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t^k}\right)_{\varphi(x_0)}, \; 1 \le \sigma \le m, \; 1 \le k \le r.$$

Tvrzení 2.1.10: r-ekvivalence je relace ekvivalence na množině řezů fibrované variety *(Y,π,X)*.

Definice 2.1.11 *r-jetové prodloužení fibrované variety (Y, π, X):*
Označme $\Gamma_{U(x)}$ množinu všech řezů fibrované variety (Y, π, X) definovaných na jistém okolí $U(x)$ bodu $x \in X$ a R r-ekvivalenci řezů v bodě x. Třída ekvivalence řezu γ $[\gamma] = \{\bar{\gamma} \in \Gamma_{U(x)} | (\gamma, \bar{\gamma}) \in R\}$, se nazývá *r-jet řezu* γ v bodě x a označujeme ji $j_x^r \gamma$. Množina všech r-jetů $j_x^r \gamma$, kde *x* probíhá varietu *X* a γ

probíhá množinu řezů definovaných v bodě x, se označuje $J^r Y$. Značíme $J^r Y = \bigcup_{x\in X, \gamma\in\Gamma_{U(x)}} j_x^r\gamma$, zkráceně $J^r Y = \bigcup_{x,\gamma} j_x^r\gamma$. Nechť $r \geq s \geq 0$ jsou přirozená čísla. Klademe:

- $J^0 Y = Y$,
- $\pi_{r,s} : J^r Y \to J^s Y$, $\pi_{r,s}\left(j_x^r\gamma\right) = j_x^s\gamma$,
- $\pi_r : J^r Y \to X$, $\pi_r\left(j_x^r\gamma\right) = x$.

Nechť (V,ψ), $\psi = \left(t, q^\sigma\right)$ je fibrovaný souřadnicový systém na Y. Označme $V_r = \pi_{r,0}^{-1}(V)$. Pro každý r-jet $j_x^r\gamma \in V_r$ položme:

- $t\left(j_x^r\gamma\right) = t(x)$,
- $q^\sigma\left(j_x^r\gamma\right) = q^\sigma(\gamma(x))$,
- $q_k^\sigma\left(j_x^r\gamma\right) = \left(\dfrac{\mathrm{d}^k\left(q^\sigma\gamma\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t^k}\right)_{\varphi(x)}$, kde $1 \leq k \leq r$, $1 \leq \sigma \leq m$.

Systém funkcí $\psi_r = \left(t, q^\sigma, q_1^\sigma, \ldots, q_k^\sigma\right)$, kde $1 \leq k \leq r$, $1 \leq \sigma \leq m$, je systémem souřadnicových funkcí souřadnicového systému $\left(V_r, \psi_r\right)$ na $J^r Y$, který se nazývá *asociovaný* s fibrovaným souřadnicovým systémem (V,ψ).

Množina $J^r Y$ s diferencovatelnou strukturou tvořenou asociovanými fibrovanými souřadnicovými systémy $\{(V_r, \psi_r)\}$ se nazývá *r-jetové prodloužení fibrované variey* (Y,π,X).

Tvrzení 2.1.12: $\left(J^r Y, \pi_{r,s}, J^s Y\right)$ a $\left(J^r Y, \pi_r, X\right)$ jsou fibrované variety.

Důkaz: Je zřejmý z definice 2.1.6 a definic zobrazení π_r a $\pi_{r,s}$ uvedených v 2.1.11.

Definice 2.1.13 *r-jetové prodloužení řezu* γ:

Nechť γ je řez fibrované variety (Y,π,X) definovaný na otevřené množině $U \subset X$. Zobrazení $j^r\gamma : U \to J^r Y$ definované vztahem: $j^r\gamma(x) = j_x^r\gamma$ je řezem fibrované variety $\left(J^r Y, \pi_r, X\right)$ na U. Nazývá se *r-jetové prodloužení řezu* γ.

Příklad 2.1.14: V našem výkladu budeme pracovat pouze s prvním a druhým prodloužením fibrované variety (Y,π,X)**.** Proto nyní přepíšeme obecné definice 2.1.11 a 2.1.13 pro případ, kdy r = 1, 2.

1-jetové prodloužení fibrované variety (Y,π,X)*, r =1:*

Z definice 2.1.11: $J^1 Y = \bigcup_{x,\gamma} j_x^1\gamma$, kde $j_x^1\gamma$ je třída ekvivalence podle1-ekvivalence obsahující řez γ. Podmínky 1-ekvivalence řezů γ_1 a γ_2 v bodě $x_0 \in X$:

$$\gamma_1(x_0) = \gamma_2(x_0),$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\ \left(q^\sigma\gamma_1\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\varphi(x_0)} = \left(\frac{\mathrm{d}\ \left(q^\sigma\gamma_2\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\varphi(x_0)}.$$

Souřadnicový systém $\left(V_1, \psi_1\right): V_1 = \pi_{1,0}^{-1}(V)$, $\psi_1 = \left(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma\right)$,

$$\psi_1\left(j_x^1\gamma\right)=\left(t(x),\ q^\sigma(\gamma(x)),\ \frac{\mathrm{d}\left(q^\sigma\gamma\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\varphi(x)}\right).$$

$j^1\gamma$: 1-jetové prodloužení řezu γ , $j^1\gamma(x)=j_x^1\gamma$.

2-jetové prodloužení fibrované variety (Y,π,X)), r =2:

Z definice 2.1.11: $J^2Y=\bigcup_{x,\gamma} j_x^2\gamma$, kde $j_x^2\gamma$ je třída ekvivalence podle 2-ekvivalence obsahující řez γ . Podmínky 2-ekvivalence řezů γ_1 a γ_2 v bodě $x_0\in X$:

$$\gamma_1(x_0)=\gamma_2(x_0),$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}\ \left(q^\sigma\gamma_1\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\varphi(x_0)}=\left(\frac{\mathrm{d}\ \left(q^\sigma\gamma_2\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t}\right)_{\varphi(x_0)},$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\left(q^\sigma\gamma_1\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\varphi(x_0)}=\left(\frac{\mathrm{d}^2\left(q^\sigma\gamma_2\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\varphi(x_0)}.$$

Souřadnicový systém (V_2,ψ_2): $V_2=\pi_{2,0}{}^{-1}(V)$, $\psi_2=\left(t,q^\sigma,\dot{q}^\sigma,\ddot{q}^\sigma\right)$,

$$\psi_2\left(j_x^2\gamma\right)=\left(t(x),\ q^\sigma(\gamma(x)),\ \frac{\mathrm{d}\left(q^\sigma\gamma\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\varphi(x)},\ \frac{\mathrm{d}^2\left(q^\sigma\gamma\varphi^{-1}\right)}{\mathrm{d}t^2}\Big|_{\varphi(x)}\right),$$

$j^2\gamma$: 2-jetové prodloužení řezu γ , $j^2\gamma(x)=j_x^2\gamma$.

***Definice 2.1.15** Holonomní řez:*
Nechť (Y,π,X) je fibrovaná varieta, $U\subset X$ otevřená množina. Řez $\delta:U\to J^1Y$ fibrované variety $\left(J^1Y,\pi_1,X\right)$ se nazývá *holonomní*, existuje-li řez $\gamma:U\to Y$ fibrované variety (Y,π,X) tak, že $\delta=J^1\gamma$.

2.2. Vektorová pole a formy na fibrovaných varietách

Tento odstavec je věnován zavedení základních geometrických objektů na varietách, fibrovaných varietách a jejich prodlouženích - vektorových polí a forem.

2.2.1. Tečný prostor k varietě, tečné a kotečné rozvrstvení, tenzory na varietě

***Definice 2.2.1** Dotyk 1. řádu:*
Nechť X je hladká varieta dimenze *n*. Mějme dvě křivky třídy C^∞: $\varsigma:I_1\to X$ a $\chi:I_2\to X$, kde $I_{1,2}\subset R$ jsou otevřené intervaly, které, předpokládejme, obsahují nulu a jsou parametrizovány parametrem *s*.

Řekneme, že ς,χ mají *dotyk 1. řádu* v bodě $x\in X$, jestliže existuje souřadnicový systém (U,φ) na X se souřadnicovými funkcemi $\varphi=\left(x^i\right)$ tak, že platí:

1. $\varsigma(0)=\chi(0)=x$
2. $\left\{\frac{\mathrm{d}\left(x^i\varsigma\right)}{\mathrm{d}s}\right\}_0=\left\{\frac{\mathrm{d}\left(x^i\chi\right)}{\mathrm{d}s}\right\}_0$

Tvrzení 2.2.2: Množina křivek s dotykem 1. řádu v bodě x tvoří třídu ekvivalence.

Definice 2.2.3 *Tečným vektorem k varietě X v bodě x* se nazývá třída ekvivalentních křivek s dotykem 1.řádu v bodě *x*. Označme $T_x X$ množinu tečných vektorů k *X* v *x*.

Definice 2.2.4 *Tečné zobrazení:*
Nechť (U,φ) je souřadnicový systém na *X*, $x \in U$ a dim *X*=*n*. Definujeme zobrazení: $T_x\varphi : \xi \in T_x X \to T_x\varphi \cdot \xi = \left(\left(x^i \varphi(x)\right) \ , \ \left(\xi^i\right)\right) \in \varphi(U) \times R^n \subset R^{2n}$, $1 \le i \le n$, kde $\xi^i = \left(\frac{\mathrm{d}x^i \varsigma}{\mathrm{d}s}\right)_0$, jestliže $\xi = [\varsigma]$. Zobrazení $T_x\varphi$ je vzájemně jednoznačné.

Tvrzení 2.2.5: Na $T_x X$ lze zavést *strukturu vektorového prostoru*: Nechť $\xi_1 = [\varsigma_1]$, $\xi_2 = [\varsigma_2]$ jsou vektory v $T_x X$ a $\alpha, \beta \in R$. Definujeme:

$$\alpha\xi_1 + \beta\xi_2 = T_x\varphi^{-1}\left(\alpha T_x\varphi \cdot \xi_1 + \beta T_x\varphi \cdot \xi_2\right) = \left(x, \left(\alpha\xi_1^i + \beta\xi_2^i\right)\right), \text{kde}$$
$$\xi_1^i = \left(\frac{\mathrm{d}x^i \varsigma_1}{\mathrm{d}s}\right)_0, \xi_2^i = \left(\frac{\mathrm{d}x^i \varsigma_2}{\mathrm{d}s}\right)_0, 1 \le i \le n.$$

Množina $T_x X$ s takto definovanými operacemi sčítání a násobení skalárem je *vektorovým prostorem* dimenze *n*.

Tvrzení 2.2.6*: Báze vektorového prostoru $T_x X$:*
Označme $\varsigma_i = \varphi^{-1}(0,...,t,...0)$, kde *t* je na i-té pozici. Pak vektory $e_{i,x} = [\varsigma_i]$ tvoří v $T_x X$ *bázi* (báze indukovaná souřadnicovým systémem (U,φ)). Platí $\xi = \xi^i e_{i,x}$ pro každý vektor $\xi \in T_x X$.

Definice 2.2.7 *Derivace funkce ve směru* ξ *:*
Nechť $f : X \to R$ je funkce a (U,φ) je souřadnicový systém na *X*, $x \in X$. *Derivací funkce f ve směru* ξ v bodě *x* rozumíme číslo

$$\xi(f) = \xi^i \left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)}.$$

Nechť $\xi = e_{k,x}$, pak $e_{k,x}(f) = \delta_k^i \left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{dx^i}\right)_{\varphi(x)} = \left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^k}\right)_{\varphi(x)} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(f\varphi^{-1}\right)_{\varphi(x)}$. Značíme $e_{k,x} = \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x$ a píšeme $\xi = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$, zkráceně $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Zaveďme nyní *tečné rozvrstvení variety X*. Označme: $TX = \bigcup_{x\in X} T_x X$ a definujme zobrazení $\tau : TX \to X$, $\tau(\xi) = x$, pro $\xi \in T_x X$.

Nechť (U,φ) je souřadnicový systém na *X*, $V = \tau^{-1}(U)$, $\xi \in V \subset TX$, $\xi = [\varsigma]$ libovolný tečný vektor. Definujme zobrazení $T\varphi : V \to R^{2n}$ vztahem

$$\xi \in V \to T\varphi(\xi) = \left(x^i \circ \tau(\xi), \xi^i\right) \in \varphi(U) \times R^n, \quad \text{kde} \quad \xi^i = \left(\frac{\mathrm{d}x^i \varsigma}{\mathrm{d}s}\right)_0. \qquad \textbf{(2.2.8)}$$

Pak $(V, T\varphi)$ je souřadnicový systém na *TX*. Je zřejmé, že, je-li dim *X*=*n*, pak dim*TX* =*2n*, a je-li $A_X = \{(U_\iota, \varphi_\iota)\}_{\iota \in I}$ atlas na X, pak $\{(V_\iota, T\varphi_\iota)\}_{\iota \in I}$ je atlas na *TX*.

TX s maximálním atlasem je diferencovatelná varieta dimenze 2*n*, zvaná *tečné rozvrstvení variety X*.

Dále zavedeme *kotečné rozvrstvení* na varietě *X*.

Definice 2.2.9 *Duální báze:*
Nechť *X* je diferencovatelná varieta dimenze *n*, $x \in U \subset X$, (U, φ) je souřadnicový systém na *X*. Na varietě *X* je dáno tečné rozvrstvení *TX*, $(e_{1,x}, ..., e_{n,x})$ je báze vektorového prostoru $T_x X$. Definujme *bázi duální* $(e_x^1, ..., e_x^n)$ k bázi $(e_{1,x}, ..., e_{n,x})$ vztahem

$$e_x^i(e_{j,x}) = \delta_j^i .$$

V bodě $x \in U \subset X$ generuje duální báze $(e_x^1, ..., e_x^n)$vektorový prostor $T_x^* X$, *prostor duální k prostoru* $T_x X$. Struktura vektorového prostoru na $T_x^* X$: Pro každé $\omega, \eta \in T_x^* X$ definujeme $(\alpha\omega + \beta\eta)(\xi) = \alpha\omega(\xi) + \beta\eta(\xi)$ pro libovolné $\xi \in T_x X$.

Analogicky jako strukturu tečného rozvrstvení zavedeme strukturu *kotečného rozvrstvení.*

Definice2.2.10 *Kotečné zobrazení:*
Nechť na varietě *X* dimenze *n* je dán souřadnicový systém (U, φ). Vztahem

$$T_x^* \varphi : \omega \in T_x^* X \to (x^i \varphi(x), \omega_i) \in \varphi(U) \times R^n \subset R^{2n}, \ kde \ \omega = \omega_i e_x^i$$

je zadáno *kotečné zobrazení* v bodě *x*.

Označme $T^* X = \bigcup_{x \in X} T_x^* X$ a definujme zobrazení $\tau^* : T^* X \to X$ vztahem

$$\tau^*(\omega) = x \in X \text{ pro } \omega \in T_x^* X .$$

Nechť $A_X = \{(U_\iota, \varphi_\iota)\}_{\iota \in I}$ je atlas na *X*, pak atlas na $T^* X$ je tvořen dvojicemi $(V_\iota, T^* \varphi_\iota)$, kde $V_\iota = (\tau^*)^{-1}(U_\iota)$, $T^* \varphi_\iota : \omega \in T^* X \to (x^i \varphi_\iota(\tau^* \omega), \omega_i) \in \varphi_\iota(U) \times R^n$.

Předchozím postupem je na $T^* X$ zadána diferencovatelná struktura. $T^* X$ s touto strukturou, zadanou maximálním atlasem, který je generován systémem $\{(V_\iota, T^* \varphi_\iota)\}_{\iota \in I}$, je diferencovatelná varieta dimenze *2n, zvaná kotečné rozvrstvení.*

Obdobným způsobem, jak bylo uvedeno výše, se zavádí *tečné a kotečné rozvrstvení fibrované variety* (Y, π, X) na její bázi *X* a na varietě *Y*.

V následujícím textu připomeneme definice kovariantních tenzorů na varietě *X* a jejich základní vlastnosti. Důkazy tvrzení vyplývají přímo z definic, proto je neuvádíme.

Definice 2.2.11 *Kovariantní tenzor k-tého řádu na diferencovatelné varietě:*
Nechť *X* je diferencovatelná varieta dimenze *n*, *TX* její tečné rozvrstvení, $T_x X \subset TX$, $x \in U \subset X$, (U, φ) souřadnicový systém na *X*, $(V, T\varphi)$ souřadnicový systém na *TX*, $V \in \tau^{-1}(U)$. Zobrazení

$$\eta : (\xi_1, ..., \xi_k) \in \underbrace{T_x X \times ... \times T_x X}_{k} \to \eta(\xi_1, ..., \xi_k) \in R, \ 1 \le k \le n,$$

lineární ve všech argumentech se nazývá *kovariantní tenzor k-tého řádu na* T_xX, značíme $\eta \in \mathrm{T}^k(T_xX)$, kde $\mathrm{T}^k(T_xX)$ je vektorový prostor kovariantních tenzorů k-tého řádu nad prostorem T_xX (struktura vektorového prostoru se zavádí obdobně jako v definici 2.2.9).

Definice 2.2.12 *Tenzorový součin:*
Nechť $\eta \in \mathrm{T}^k(T_xX), \varpi \in \mathrm{T}^l(T_xX)$. Definujeme zobrazení:

$$\eta \otimes \varpi : (\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l}) \in \underbrace{T_xX \times \dots \times T_xX}_{k+l} \to$$
$$\to \eta \otimes \varpi(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l}) = \eta(\xi_1, \dots, \xi_k)\varpi(\xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l}) \in R$$

Tvrzení 2.2.13: Nechť $(e_{1,x}, \dots, e_{n,x})$ je báze prostoru $T_xX \subset TX, x \in X$. Nechť (e_x^i), $1 \le i \le n$, je duální báze generující prostor T_x^*X. Pak soubor $(e_x^{i_1} \otimes \dots \otimes e_x^{i_k})$, $1 \le i_1, \dots, i_k \le n$, je báze v $\mathrm{T}^k(T_xX)$, $\dim \mathrm{T}^k(T_xX) = n^k$.

Definice 2.2.14 *Antisymetrický kovariantní tenzor:*
Řekneme, že $\eta \in \mathrm{T}^k(T_xX)$ je antisymetrický (ve všech vektorových argumenetech), jestliže platí:

$$\eta(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k, \dots, \xi_l) = -\eta(\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_j, \dots, \xi_l)$$

pro libovolné $\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_k, \dots, \xi_l \in T_xX$, $1 \le j, k \le n, j \ne k$.

Označme $\Lambda^k(T_xX)$ množinu antisymetrických tenzorů $\eta \in \mathrm{T}^k(T_xX)$.

Tvrzení 2.2.15: $\Lambda^k(T_xX)$ je vektorový prostor dimenze $\binom{n}{k}$.

Definice 2.2.16 *Alternace:*
Nechť X je varieta dimenze n, TX její tečné rozvrstvení, $\eta \in \mathrm{T}^k(T_xX)$. Definujme zobrazení

$$\mathrm{Alt}\,\eta : (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \underbrace{T_xX \times \dots \times T_xX}_{k} \to \mathrm{Alt}\,\eta(\xi_1, \dots, \xi_k) \text{ vztahem}$$
$$\mathrm{Alt}\,\eta(\xi_1, \dots, \xi_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot \eta(\xi_{\sigma_1}, \dots, \xi_{\sigma_k})$$

S_k je množina všech možných permutací k indexů, $\mathrm{sgn}\,\sigma$ je znaménko dané permutace.

Tvrzení 2.2.17: Je-li $\eta \in \mathrm{T}^k(T_xX)$, pak $\mathrm{Alt}\,\eta \in \Lambda^k(T_xX)$.

Definice 2.2.18 *Vnější součin:*
Nechť $\eta \in \Lambda^k(T_xX), \varpi \in \Lambda^l(T_xX)$. Definujeme *vnější součin tenzorů* vztahem:

$$\eta \wedge \varpi = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \mathrm{Alt}(\eta \otimes \varpi) \in \Lambda^{k+l}(T_xX).$$

Sjednocením jednotlivých prostorů $\Lambda^k(T_x X)$ přes všechny body variety X získáme (obdobně jako u kotečného rozvrstvení) *rozvrstvení typu* $\Lambda^k(TX)$. Označme $\bigcup_{x\in X}\Lambda^k(T_x X)=\Lambda^k(TX)$ a definujme zobrazení $\tau^{k*}:\Lambda^k(T_x X)\to X$ vztahem $\tau^{k*}(\eta)=x\in X$ pro $\eta\in\Lambda^k(T_x X)$.

Nechť $A_X=\{(U_\iota,\varphi_\iota)\}_{\iota\in I}$ je atlas na *X*. *Tenzorovým rozvrstvením typu* $\Lambda^k(TX)$ se označuje množina $\Lambda^k(TX)$ s maximálním atlasem , který je generovám systémem $\{(W_\iota,T^{k*}\varphi_\iota)\}_{\iota\in I}$, kde

$$W_\iota=\left(\tau^{k*}\right)^{-1}(U_\iota),\; T^{k*}\varphi_\iota:\eta\in\Lambda^k(T_x X)\to\left(x^i\varphi_\iota\left(\tau^{k*}\eta\right),\eta_{i_1\ldots i_k}\right)\in\varphi_\iota(U)\times R^{\binom{n}{k}}, \text{ kde}$$
$$\eta=\eta_{i_1\ldots i_k}\left(e_x^{i_1}\wedge\ldots\wedge e_x^{i_k}\right),\; 1\le i_1,\ldots,i_k\le n\,.$$

2.2.2. Vektorová pole a formy na varietách

Definice 2.2.19 *Vektorové pole na varietě:*
Nechť X je n rozměrná varieta, TX její tečné rozvrstvení, definujme (diferencovatelné resp. hladké) zobrazení

$$\xi:x\to\xi(x)\in TX$$

pro každé $x\in X$. ξ se nazývá *vektorové pole na varietě X.*

Definice 2.2.20 *Souřadnicové vyjádření vektorového pole na varietě*
Nechť $\xi(x)\in TX$ je vektor daný třídou ekvivalentních křivek $[\varsigma]$, jeho souřadnicové vyjádření je (2.2.8). Nechť (U,φ) je souřadnicový systém na X, ξ vektorové pole na. Nechť $(e_{1,x},\ldots,e_{n,x})$ je báze prostoru $T_x X\subset TX, x\in U$, pak

$$\xi(x)=\xi^1\left(x^1,\ldots,x^n\right)e_{1,x}+\ldots+\xi^n\left(x^1,\ldots,x^n\right)e_{n,x}\,, \qquad \textbf{(2.2.21)}$$

kde $\xi^1,\ldots,\xi^n$ jsou *složky vektorového pole* .

Definice 2.2.21 *Vnější diferenciální forma na varietě X:*
Diferencovatelné (resp. hladké) zobrazení

$$\eta:x\to\eta(x)\in\Lambda^k(TX),$$

kde $\eta(x)\in\Lambda^k(T_x X)$, $x\in X$, nazýváme *vnější* nebo *diferenciální k-forma na X.* V dalším výkladu budeme používat jen označení *k-forma.*

Definice 2.2.23 *Vnější derivace funkce*
Nechť X je diferencovatelná varieta dimenze *n*, $x\in X$. Nechť *f* je funkce, $f:x\to f(x)\in R$. Nechť $\xi\in T_x X, \xi=\xi^i(x)e_{i,x}$. Definujeme vnější derivaci funkce *f* jako 1-formu určenou vztahem $\mathrm{d}f(x)(\xi)=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^i}\xi^i$ pro libovolný bod $x\in X$ a libovolný vektor $\xi\in T_x X$. Nechť je x^i i-tá souřadnicová funkce souřadnicového systému (U,φ) na *X,* pak pro její vnější derivaci dostáváme vztah $\mathrm{d}x^i(x)(\xi)=\dfrac{\partial x^i(x)}{\partial x^j}\xi^j=\delta^i_j\xi^j(x)=\xi^i(x)$. Je zřejmé, že $dx^i(x)\equiv e_x^i$.

Poznamenejme že funkce $f:X\to R$ nazýváme 0-formami a jejich množinu značíme $\Lambda^0(TX)$.

Z odstavce 2.2.1 vyplývá, že soubor $\left(\mathrm{d}x^{i_1}(x)\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}(x)\right)$, $1\le i_1<\ldots<i_k\le n$, tvoří *bázi* v $\Lambda^k(T_xX)$. Nechť $\eta\in\Lambda^k(TX)$ je k-forma, (U,φ) souřadnicový systém, $\varphi=(x^i)$. Můžeme psát:

$$\eta=\eta_{i_1\ldots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}, \tag{2.2.24}$$

funkce $\eta_{i_1\ldots i_k}:U\to R$ nazýváme *složky formy* η.

Definice 2.2.25 *Pullback:*
Nechť X je varieta (dim $X=n$), Y je varieta (dim$Y=m$), $f:X\to Y$ je zobrazení. *Pullbackem* zobrazení f nazýváme indukované zobrazení f^* typu $\eta\in\Lambda^k(TY)\to f^*\eta\in\Lambda^k(TX)$ definované vztahem:

$$f^*\eta(x)(\xi_1,\ldots,\xi_k)=\eta(f(x))(T_xf(\xi_1),\ldots,T_xf(\xi_k))$$

pro každé $x\in X$ a $\xi_1,\ldots\xi_k\in T_xX$, T_xf značí tečné zobrazení definované takto:

Nechť $\xi\in T_xX$, $\xi(x)=\xi^i(x^1,\ldots,x^n)e_{ix}$,

$$T_xf(\xi)=\left(f(x),\frac{\partial f^k(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^j}\xi^j\right),$$

kde $f(x)=\left(f^1(x^1,\ldots,x^n),\ldots,f^{m+1}(x^1,\ldots,x^n)\right)$.

2.2.3. Vektorová pole a formy na fibrované varietě

Definice 2.2.26 Buď (Y,π,X) fibrovaná varieta, $V\subset Y$ otevřená množina. Řekneme, že difeomorfismus $\alpha:V\to Y$ je *(lokální) difeomorfismus fibrované variety* (Y,π,X), existuje-li difeomorfismus $\alpha_0:U\to X$, kde $U=\pi(V)$, tak, že $\pi\circ\alpha=\alpha_0\circ\pi$. Existuje-li α_0, pak je určeno jednoznačně a nazývá se π*-projekce difeomorfismu fibrované variety***.**

Tvrzení 2.2.27: Nechť $\alpha:V\to Y$ je lokální difeomorfismus fibrované variety (Y,π,X). Nechť $U=\pi(V)$ a $\gamma:U\to Y$ je libovolný řez variety (Y,π,X) takový, že $\gamma(U)\subset V$. Pak $\alpha\gamma\alpha_0^{-1}:\alpha_0(U)\to Y$ je řezem variety (Y,π,X).

Důkaz: Pro libovolný řez $\gamma:U\to Y$ fibrované variety (Y,π,X) platí: $\pi\circ\gamma=id_U$. Pro zobrazení $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ platí: $\pi\circ\alpha\gamma\alpha_0^{-1}=\pi\circ\alpha\circ\gamma\circ\alpha_0^{-1}=\alpha_0\circ\pi\circ\gamma\circ\alpha_0^{-1}=\mathrm{id}_{\alpha_0(U)}$.

Definice 2.2.28 Nechť $V\subset Y$ je otevřená množina, $U=\pi(V)$, $x\in U$ a $\Gamma(U)$ množina všech řezů variety (Y,π,X) definovaných na U, $j_x^r\gamma\in\pi_{r,0}^{-1}(V)$. *r-jetovým prodloužením difeomorfismu* α rozumíme zobrazení: $j^r\alpha: j_x^r\gamma\to j^r\alpha(j_x^r\gamma)=j_{\alpha_0(x)}^r\alpha\gamma\alpha_0^{-1}\in\pi_{r,0}^{-1}(\alpha_0(U))$. Platí:

1. $\pi_r\circ j^r\alpha=\alpha_0\circ\pi_r$
2. $\pi_{r,s}\circ j^r\alpha=j^s\alpha\circ\pi_{r,s}, 0\le s\le r$, $j^r\alpha$ je izomorfismem fibrované variety (J^rY,π_r,X).

Definice 2.2.29 *Vektorovým polem na fibrované varietě* (Y,π,X) rozumíme takové zobrazení $\xi:y\in Y\to\xi(y)\in TY$, kde $\xi(y)\in T_yY$, které každému bodu přiřadí vektor z tečného prostoru k varietě v tomto bodě. V našem případě budeme pracovat nejčastěji s vektorovými poli na 1-jetovém prodloužení fibrované variety : $\xi : y \in J^1Y \to \xi(y) \in T_y J^1 Y \subset TJ^1Y$.

Souřadnicové vyjádření vektorového pole na fibrované varietě (Y, π, X) resp. (J^1Y, π_1, X) má tvar:

$$\xi = \xi^0(t, q^\nu)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma(t, q^\nu)\frac{\partial}{\partial q^\sigma} \text{ resp.}$$

$$\xi = \xi^0(t, q^\nu, \dot{q}^\nu)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu)\frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}.$$

Analogicky vektorové pole na J^rY je zobrazení $\xi : y \in J^rY \to \xi(y) \in T_y J^rY$, a má souřadnicové vyjádření

$$\xi = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=0}^{r} \xi_k^\sigma \frac{\partial}{\partial q_k^\sigma},$$

kde ξ_0, ξ_k^σ jsou funkcemi $(t, q^\nu, q_1^\nu, ..., q_r^\nu)$, $q_k^\sigma \gamma(t) = \dfrac{d^k q^\sigma \gamma(t)}{dt^k}$ pro každé $\gamma \in \Gamma_{(U)}$.

Definice 2.2.30 *Projektabilní vektorové pole*

Nechť je ξ vektorové pole na Y (resp na J^rY). Řekneme, že ξ je π*-projektabilní* (resp π_r-projektabilní), existuje-li vektorové pole ξ_0 na X takové, že platí

$$T\pi(\xi) = \xi_0 \circ \pi, \text{ (resp } T\pi_r(\xi) = \xi_0 \circ \pi_r\text{)},$$

kde $T\pi$ (resp. $T\pi_r$) značí zobrazení tečné k zobrazení π (resp. π_r). Existuje-li takové vektorové pole ξ_0, je určeno jednoznačně a nazývá se π*-projekce* (resp. π_r*-projekce*) vektorového pole ξ.

Definice 2.2.31 Řekneme, že vektorové pole ξ na Y *je* π*-vertikální*, jestliže $T\pi(\xi) = 0$. Řekneme, že vektorové pole ξ na J^rY *je* π_r*-vertikální*, jestliže $T\pi_r(\xi) = 0$.

Analogicky definujeme $\pi_{r,s}$-projektabilní a $\pi_{r,s}$-vertikální vektorová pole na J^sY, kde $0 \le s$<r.

Tvrzení 2.2.32: Nechť vektorové pole ξ je π_r-projektabilní, pak v libovolných souřadnicích je $\xi_0 = \xi_0(t)$.

Důkaz: Plyne ze skutečnosti, že obecně $T\pi_r(\xi) = \xi^0(t, q^\sigma, ..., q_r^\sigma)\dfrac{\partial}{\partial t}$, kde ξ je tvaru $\xi = \xi^0 \dfrac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=0}^{r} \xi_k^\sigma(t, q^\sigma)\dfrac{\partial}{\partial q_k^\sigma}$, a z požadavku $T\pi_r(\xi) = \xi^0 \circ \pi$.

Příklad 2.2.33: π-projektabilní a π-vertikální vektorové pole pro *dim*X=*1*

π*-projektabilní vektorové pole na* Y: $\xi = \xi^0(t)\dfrac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma(t, q^\sigma)\dfrac{\partial}{\partial q^\sigma}$,

π*-vertikální vektorové pole na* Y : $\xi = \xi^\sigma(t, q^\sigma)\dfrac{\partial}{\partial q^\sigma}$.

Označme α_t lokální jednoparametrickou grupu π-projektabilního vektorového pole ξ. Definice 2.2.30 zaručuje, že tato lokální jednoparametrická grupa je tvořena difeomorfismy fibrované variety π.

Definice 2.2.34 *π_r-projektabilní, $\pi_{r,s}$ projektabilní forma*

Nechť ρ je diferenciální *k*-forma na varietě $\left(J^r Y, \pi_r, X\right)$. ρ nazveme *π_r-projektabilní, (resp. $\pi_{r,s}$ projektabilní),* jestliže existuje forma ρ_0 na X (resp ρ_0 na $\left(J^s Y, \pi_s, X\right)$) tak, že platí $\rho = \pi_r{}^* \rho_0$, (resp. $\rho = \pi_{r,s}{}^* \rho_0$). Existuje-li forma ρ_0, je určena jednoznačně a nazývá se *π_r-projekce* (resp. *$\pi_{r,s}$projekce*) formy ρ.

Definice 2.2.35 *π_r-horizontální, $\pi_{r,s}$-horizontální forma*

Nechť ρ je diferenciální k-forma na varietě $\left(J^r Y, \pi_r, X\right)$. ρ nazveme *π_r-horizontální (resp. $\pi_{r,s}$-horizontální*), platí-li pro každé π_r - vertikální *(resp.* $\pi_{r,s}$-vertikální) vektorové pole ξ na $J^r Y$:

$$i_\xi \rho = 0 .$$

Příklad 2.2.36 Je-li dim*X*=1, pak π-horizontální forma ρ na (Y, π, X) má ve fibrovaných souřadnicích tvar: $\rho = f\left(t, q^\sigma\right) \mathrm{d}t$, π_1-horizontální 1-forma ρ na $\left(J^1 Y, \pi_1, X\right)$ má tvar $\rho = A\left(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma\right) \mathrm{d}t$, $\pi_{1,0}$-horizontální formamá tvar $\rho = A\left(t, q^\nu, \dot{q}^\nu\right) \mathrm{d}t + B_\sigma\left(t, q^\nu, \dot{q}^\nu\right) \mathrm{d}q^\sigma$.

Definice 2.2.37 *π-horizontalizace:*

obecně pro *dimX=n*:

Nechť $\eta \in \Lambda^q\left(TJ^s Y\right), q \geq 1$, je *q*-forma. Pro každý bod $y = j_x^{s+1}\gamma \in J^{s+1} Y$, a každý systém vektorů $\xi_1, \ldots, \xi_q \in T_y J^{s+1} Y$ klademe:

$$h\eta\left(j_x^{s+1}\gamma\right)\left(\xi_1, \ldots, \xi_q\right) = \eta\left(j_x^s \gamma\right)\left(T_x j^s \gamma \circ T\pi_{s+1}\left(\xi_1\right), \ldots, T_x j^s \gamma \circ T\pi_{s+1}\left(\xi_q\right)\right).$$

$h\eta$ je *π_{s+1}-horizontální* *q*-forma na $J^{s+1} Y$. Zobrazení *h* přiřazující *q*-formě η na $J^s Y$ formu $h\eta$ na $J^{s+1} Y$, se nazývá *π-horizontalizace.*

Přepíšeme obecnou definici 2.2.37 pro případ dim*X*=1:

Nechť $\eta \in \Lambda^1\left(TJ^s Y\right)$ je 1-forma. Pro každý bod $y = j_x^{s+1}\gamma \in J^{s+1} Y$, a každý vektor $\xi \in T_y J^{s+1} Y$ klademe $h\eta\left(j_x^{s+1}\gamma\right)(\xi) = \eta\left(j_x^s \gamma\right)\left(T_x j^s \gamma \cdot T\pi_{s+1} \cdot \xi\right)$. $h\eta$ je *π_{s+1}-horizontální* 1-forma na $J^{s+1} Y$. Zobrazení *h* se nazývá *π_s-horizontalizace.*

Z definic 2.2.35 a 2.2.37 vyplývají vztahy:

1. $h(\rho + \eta) = h\rho + h\eta$,
2. $q > \dim X \Rightarrow h\rho = 0$,
3. ρ je $\pi_{s,s-1}$-horizontální $\Rightarrow h\rho$ je $\pi_{s+1,s}$-projektabilní,
4. $J^s \gamma^* \rho = J^{s+1} \gamma^* h\rho$
5. nechť α je difeomorfismus variety π, pak $hJ^s \alpha^* \rho = J^{s+1} \alpha^* h\rho$.

Vyjádření horizontalizace v souřadnicích:

Nechť dimX=1, *f* je funkce na $J^s Y$, horizontalizace 1-forem na $J^s Y$ má tvar:

$$\begin{aligned} hf &= f \circ \pi_{s+1,s}, \\ h\mathrm{d}t &= \mathrm{d}t, \\ h\mathrm{d}q_j^\sigma &= q_{j+1}^\sigma \mathrm{d}t, \quad 0 \le j \le s, \\ h\mathrm{d}f &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

kde $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=0}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_j^\sigma} q_{j+1}^\sigma$ je tzv. *totální derivace funkce f* podle *t.*

Definice 2.2.39 *π_s -kontaktní forma:*

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta, dim*X*=*n.* Nechť $q \ge 0$, forma $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$ se nazývá π_s *-kontaktní*, nebo *kontaktní* je-li $h\rho = 0$, nebo také ekvivalentně $J^s\gamma^*\rho = 0$, pro každý řez γ fibrované variety π.

Definice 2.2.40 *Kontaktizace:*

Nechť $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$, položme: $p\rho = \pi_{s+1,s}^*\rho - h\rho$. $p\rho$ je kontaktní *q*-forma na $J^{s+1}Y$. Zobrazení *p* se nazývá *kontaktizace*.

Tvrzení 2.2.41: *Pro dim*X=*1 dostáváme z definice kontaktizace:*

1. $p\mathrm{d}t = 0$
2. $p\mathrm{d}q_k^\sigma = \mathrm{d}q_k^\sigma - q_{k+1}^\sigma \mathrm{d}t$, $1 \le \sigma \le m, 0 \le k \le s$, kde *s* přísluší *s*-jetovému prodloužení fibrované variety.

Definice 2.2.42 *Báze 1-forem na s-jetovém prodloužení fibrované variety:*

Označme $\omega_k^\sigma = \mathrm{d}q_k^\sigma - q_{k+1}^\sigma \mathrm{d}t$, $1 \le \sigma \le m, 0 \le k \le s-1$. Tyto 1-formy společně s d*t* a $\mathrm{d}q_k^\sigma$ tvoří bázi 1-forem na $V_s \subset J^sY$ (tzv. *kontaktní báze*):

$$\left(\mathrm{d}t, \omega^\sigma, \omega_1^\sigma, ..., \omega_{s-1}^\sigma, \mathrm{d}q_s^\sigma\right),\ 1 \le \sigma \le m.$$

Příklad 2.2.43 V našem výkladu budeme používat zejména první a druhé jetové prodloužení fibrované variety. Báze 1-forem na J^2Y: $\left(\mathrm{d}t, \omega^\sigma, \dot{\omega}^\sigma, d\ddot{q}^\sigma\right)$, kde $\dot{\omega}^\sigma = \omega_1^\sigma$, $\mathrm{d}\ddot{q}^\sigma = \mathrm{d}q_2^\sigma$.

Definice 2.2.44 *k-kontaktní formy*

Nechť $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$. Řekneme, že ρ je *1-kontaktní*, jestliže pro každé π_s -vertikální vektorové pole ξ na J^sY je *(q-1)*-forma $i_\xi \rho$ π_s -horizontální.

Řekneme, že ρ je *k-kontaktní*, $2 \le k \le q$, jestliže $i_\xi \rho$ je (*k*-1)-kontaktní pro každé π_s -vertikální vektorové pole ξ.

Příklad 2.2.45: 2-forma ρ na J^1Y je:

1-kontaktní, jestliže pro každé π_1 -vertikální vektorové pole ξ je 1-forma $i_\xi \rho$ horizontální (pro každé π_1 -vertikální vektorové pole ς musí platit $i_\varsigma(i_\xi \rho) = 0$):

$$\rho = A_\sigma \omega^\sigma \wedge \mathrm{d}t + B_{\sigma\nu}\omega^\sigma \wedge \mathrm{d}\dot{q}^\nu.$$

2-kontaktní, jestliže pro každé π_1-vertikální vektorové pole ξ je 1-forma $i_\xi \rho$ kontaktní (pro každý řez $J^1\gamma$ fibrované variety (J^1Y, π_1, X) platí $J^1\gamma^* i_\xi \rho = 0$):

$$\rho = B_{\sigma\nu}\omega^\sigma \wedge \omega^\nu .$$

Tvrzení 2.2.46: Nechť $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$. Formu ρ je možné na $J^{s+1}Y$ jednoznačně rozložit:

$$\pi^*_{s+1,s}\rho = h\rho + p_1\rho + \ldots + p_q\rho,$$

kde $p_i\rho$ značí tzv. i-kontaktní komponentu formy ρ, $1 \le i \le q$.

Důkaz: Tvrzení vyplývá z výše uvedených definic.

Řekneme, že forma $\rho \in \Lambda^q(TJ^sY)$ má *řád kontaktnosti k*, jestliže $p_i\rho = 0$ pro všechna $i < k$.

Příklad 2.2.47 Nechť dim*X*=1, dim*Y*=*m*+1. Každou 1-formu $\rho \in \Lambda^1(TJ^1Y)$ je možné jednoznačně rozložit na součet horizontální a kontaktní komponenty. Ve fibrovaných souřadnicích, kde $\rho = f\mathrm{d}t + f_\sigma \mathrm{d}q^\sigma + \tilde{f}_\sigma \mathrm{d}\dot{q}^\sigma$, $1 \le \sigma \le m$, pak vypadá takový rozklad následovně:

$$\pi^*_{2,1}\rho = \underbrace{\left(f + f_\sigma \dot{q}^\sigma + \tilde{f}_\sigma \ddot{q}^\sigma\right)\mathrm{d}t}_{h\rho} + \underbrace{f_\sigma \omega^\sigma + \tilde{f}_\sigma \dot{\omega}^\sigma}_{p_1\rho} .$$

Tvrzení 2.2.48: *(Poincarého lemma)*
Nechť $\pi : W \to U$ je fibrovaná varieta taková, že $W = U \times V$, $U \subset R$ je otevřený interval a $V \subset R^m$ je otevřená koule se středem v počátku. Nechť $\rho \in \Lambda^q(J^sW)$ je forma řádu kontaktnosti *l*, nechť $1 \le q$, $1 \le l \le q$. Předpokládejme, že $\mathrm{d}\rho = 0$, pak existuje forma $\eta \in \Lambda^{q-1}(J^sW)$ řádu kontaktnosti $1 \le l \le q-1$ taková, že $\rho = \mathrm{d}\eta$.

Důkaz: viz [2].

2.2.4. Prodloužení vektorových polí na fibrované varietě

Definice 2.2.49 *r-jetové prodloužení vektorového pole ξ:*
Nechť ξ je vektorové pole na *Y*, α_t jeho jednoparametrická grupa. Pro každé $j^r_x\gamma \in J^rY$ je definována křivka $t \to j^r\alpha_t(j^r_x\gamma)$ v J^rY, kde parametr *t* probíhá jisté okolí bodu $0 \in R$, $j^r\alpha$ je definováno v 2.2.28. Vztah

$$j^r\xi(j^r_x\gamma) = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} j^r\alpha_t(j^r_x\gamma)\right\}_{t=0}$$

definuje vektorové pole $j^r\xi$ na J^rY, které se nazývá *r-jetové prodloužení vektorového pole ξ*. $j^r\xi$ je π_r-projektabilní a $\pi_{r,s}$-projektabilní vektorové pole, $r > s \ge 0$.

Najdeme souřadnicové vyjádření jetového prodloužení vektorového pole pro případ, kdy dim*X*=1.

Nechť (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na *Y* a označme (V_r, ψ_r), $\psi_r = (t, q^\sigma_k)$, kde $q^\sigma_0 = q^\sigma$, $0 \le k \le r$, fibrovaný souřadnicový systém na J^rY asociovaný s (V, ψ).

Tvrzení 2.2.50: Nechť je ξ π-projektabilní vektorové pole na *Y*. $\xi = \xi_0 \dfrac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \dfrac{\partial}{\partial q^\sigma}$ je jeho vyjádření vzhledem k fibrovanému souřadnicovému systému (V, ψ). Pak *r*-jetové prodloužení $j^r \xi$ má vzhledem k fibrovanému souřadnicovému systému (V_r, ψ_r) následující vyjádření:

$$j^r \xi = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=0}^{r} \xi_k^\sigma \frac{\partial}{\partial q_k^\sigma}, \text{ kde}$$

$\xi_{k+1}^\sigma = \dfrac{\mathrm{d}\xi_k^\sigma}{\mathrm{d}t} - q_{k+1}^\sigma \dfrac{\mathrm{d}\xi^0}{\mathrm{d}t}$, $0 \le k \le r-1$, kde $\dfrac{\mathrm{d}\xi_k^\sigma}{\mathrm{d}t}$ značí totální derivaci, jak byla zavedena ve vztazích 2.2.38.

2.3. Distribuce

2.3.1. Distribuce na varietě

Definice 2.3.1 Nechť X je hladká varieta. *Distribucí* na X rozumíme zobrazení Δ, které každému bodu $x \in X$ přiřadí vektorový podprostor Δ_x vektorového prostoru $T_x X$.

Definice 2.3.2 Dimenze vektorového podprostoru Δ_x se nazývá *rank distribuce* Δ *v bodě* x a označuje se rank Δ_x. Platí: $0 \le \operatorname{rank} \Delta_x \le \dim X$.

Definice 2.3.3 Funkce $\operatorname{rank}\Delta : X \to R$ přiřazující každému bodu $x \in X$ hodnotu rank Δ_x se nazývá *rank distribuce* Δ. Je-li funkce rank Δ_x konstantní, pak říkáme, že distribuce Δ má *konstantní rank*.

Definice 2.3.4 Dvě distribuce Δ_1, Δ_2 se nazývají *doplňkové*, pokud platí pro každé $x \in X$

$$\Delta_{1x} \oplus \Delta_{2x} = T_x X .$$

Nechť ξ je lokální vektorové pole s definičním oborem $\operatorname{dom}\xi$. Říkáme, že ξ *náleží distribuci* Δ, $\xi \in \Delta$, pokud pro každé $x \in \operatorname{dom}\xi$ platí , že $\xi(x) \in \Delta_x$.

Každý systém $\{\xi_\iota\}_{\iota \in I}$ (I je množina indexů) lokálních vektorových polí na *X* takových, že $\bigcup \operatorname{dom} \xi_\iota = X$ definuje distribuci na *X*. A naopak, ke každé distribuci Δ na *X* můžeme najít systém $\{\xi_\iota\}$ lokálních vektorových polí tak, že: $\xi_\iota \in \Delta$ pro každé ι, a pro každé $x \in X$ je vektorový prostor Δ_x tvořen systémem vektorů $\{\xi_\iota(x), \iota \in I\}$. V tomto případě říkáme, že $\xi_\iota, \iota \in I$, jsou *generátory* Δ, nebo také že *zadávají distribuci* Δ a píšeme:

$$\Delta = \operatorname{span}(\xi_\iota, \iota \in I).$$

Definice 2.3.5 Řekneme, že Δ je *spojitá (hladká)*, pokud ji generuje systém spojitých (hladkých) vektorových polí.

Definice 2.3.6 *Anihilátor distribuce*

Nechť Δ je distribuce na *X*. 1-forma $\eta \in T_x^* X$ se nazývá *anihilátorem distribuce* Δ, jestliže pro každé vektorové pole ξ na *X* takové, že $\xi(x) \in \Delta_x$ pro každé $x \in X$, platí

$$i_\xi \eta = 0 .$$

Označme Δ^0 množinu všech anihilátorů distribuce Δ. Pro pevné $x \in X$ značíme $\Delta^0_x = \{\eta(x) | \eta \in \Delta^0\}$. Δ^0_x je vektorovým podprostorem $T^*_x X$.

Tvrzení 2.3.7: Ke každé distribuci Δ na X existuje indexová množina K a systém $\{\eta_\kappa\}_{\kappa \in K}$ lokálních 1-forem na X, jejichž definiční obory pokrývají celou varietu X, takových, že pro každé κ je $\eta_\kappa \in \Delta^*$ a v každém bodě $x \in X$ je vektorový prostor Δ^0_x generován systémem $\{\eta_\kappa(x), \kappa \in K\}$. Označíme-li $\Delta^0 = \operatorname{span}\{\eta_k, \kappa \in K\}$, pak distribuci Δ můžeme definovat takto:

$$\Delta = \operatorname{span}\left\{ \xi \;\middle|\; i_\xi \eta_\kappa = 0, \forall \kappa \in K \right\}.$$

Definice 2.3.8 *Kodistribuce*
Nechť $x \in X$. Zobrazení $\Delta^0 : x \rightarrow \Delta^0_x \subset T^* X$ se nazývá *kodistribuce.* Platí:

$$\operatorname{rank}\Delta_x + \operatorname{rank}\Delta^0_x = \dim X$$

Je-li Δ hladká distribuce s konstantním rankem na X, $\operatorname{rank}\Delta = k$, potom v okolí každého bodu X, může být Δ zadáno buď systémem k lineárně nezávislých hladkých vektorových polí anebo systémem ($\dim X - k$) lineárně nezávislých hladkých 1-forem. Tyto dva popisy jsou v případě konstantního ranku zcela ekvivalentní.

Tvrzení 2.3.9: Je-li Δ spojitá distribuce na X a $x_0 \in X$, pak existuje okolí U bodu x_0 takové, že pro každé $x \in U$ platí $\operatorname{rank}\Delta_x \geq \operatorname{rank}\Delta_{x_0}$.

Definice 2.3.10 *2-forma podél distribuce:*
Nechť $x \in X$, Δ je distribuce na X. Antisymetrický 2-tenzor $\omega : x \rightarrow \omega(x) \in \Lambda^2(\Delta_x)$ operující na dvojici vektorových argumentů z Δ_x se nazývá *2-forma podél distribuce* Δ.

2.3.2. Distribuce na fibrované varietě

Definice 2.3.11 *Integrální řez*
Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta a Δ distribuce na varietě Y. Řez $\delta : X \rightarrow Y$, nazveme *integrální řez* pokud pro každou 1-formu η náležející mezi anihilátory distribuce Δ platí $\delta^* \eta = 0$, nebo ekvivalentně $T_x \delta(T_x X) \subset \Delta_{\delta(x)}$ pro každý bod $x \in X$.

Analogicky definujeme integrální řezy distribucí na prodlouženích fibrované variety.

Definice 2.3.12 *Maximální dimenze integrálního řezu*
Řekneme, že integrální řez $\delta : X \rightarrow Y$ distribuce Δ je maximální dimenze v bodě $x \in X$, když platí $T_x \delta(T_x X) = \Delta_{\delta(x)}$. Integrální řez δ je *maximální dimenze*, pokud je maximální dimenze v každém bodě $x \in X$.

Příklad 2.3.13: Nechť $(J^1 Y, \pi_1, X)$ je fibrovaná varieta, nechť Δ je distribuce na $J^1 Y$. Nechť δ je řezem variety $(J^1 Y, \pi_1, X)$, dim$X$=1:

$$\delta : t \in X \to \delta(t) \in J^1Y,\ \delta(t) = \left(t, q^\sigma \delta(t), \dot{q}^\sigma \delta(t)\right),$$
$$\delta^* \eta(t)\left(\xi^0 \frac{\partial}{\partial t}\right) = \eta(\delta(t))\left(T_t\delta\left(\xi^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\right),$$

kde $T_t\delta\left(\xi^0 \frac{\partial}{\partial t}\right) = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^0 \frac{\mathrm{d}q^\sigma \delta(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \xi^0 \frac{\mathrm{d}^2 q^\sigma \delta(t)}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}$ je vektorem tečným k J^1Y v bodě $\delta(t)$. δ je integrálním řezem distribuce Δ právě tehdy když $\delta^*\eta = 0$ pro libovolné $\eta \in \Delta^0$, tj. $\eta(\delta(t))\left(T_t\delta\left(\xi^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\right) = 0$, což znamená, že tečný vektor $T_t\delta\left(\xi^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)$ je jedním z generátorů distribuce. Pokud $\operatorname{rank}\Delta = 1$ pak integrální řez δ je *integrální křivkou*.

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta, dim*X*=1, a J^1Y její 1-jetové prodloužení. Označme Δ distribuci na J^1Y:
$$\Delta : z \in J^1Y \to \Delta_z \subset T_z J^1Y,$$

kde $T_z J^1Y$ je prostor tečný k 1-jetovému prodloužení fibrované variety (Y, π, X). Nechť (V, ψ), $\psi = (t, q^\sigma)$ je fibrovaný souřadnicový systém na *Y* takový, že $z \in \pi_{1,0}^{-1}(V)$. $T_z J^1Y$ je v našem výkladu *2m+1* dimenzionální a jeho bází je soubor vektorů

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}\right),\ \text{kde } 1 \le \sigma \le m.$$

Definice 2.3.14 Distribuce Δ na J^1Y se nazývá *slabě horizontální* , jestliže pro každé $z \in J^1Y$ je Δ_z doplňkem podprostoru P_1 π_1 vertikálních vektorů v bodě *z*.

Tvrzení 2.3.15: Distribuce, která není slabě horizontální, nemá integrální řezy.

Důkaz: Předpokládejme že Δ není slabě horizontální. Pak každý vektor $\xi \in \Delta_z$, $z \in J^1Y$, je π_1-vertikální. Pak zřejmě $\mathrm{d}t \in \Delta^0$. Nechť $\delta : X \to J^1Y$ je libovolný řez. Platí $\delta^*\mathrm{d}t = \mathrm{d}t \ne 0$. δ tedy nemůže být integrálním řezem distribuce Δ.

Poznamenejme, že soubor anihilátorů libovolné slabě horizontální distribuce neobsahuje formu d*t*.

2.4. Vektorová pole a formy na podvarietách

2.4.1. Podvarieta diferencovatelné variety

Tvrzení 2.4.1: *Otevřená podvarieta diferencovatelné variety:*
Nechť *X* je *n*- rozměrná diferencovatelná varieta, $W \subset X$ její otevřená podmnožina, $A_{\max}$ její maximální atlas $A_{\max} = \{(U_\iota, \varphi_\iota) | \iota \in I\}$,. Pak

$$A_{\max}^W = \left\{ \left(\underbrace{(U_\iota \cap W)}_{V_\iota}, \underbrace{\varphi_\iota | U_\iota \cap W}_{\psi_\iota} \right) \middle| \iota \in I \right\}$$

je maximální atlas na *W*. Množina *W* opatřená atlasem $A_{\max}^W$, tj. $(W, A_{\max}^W)$ je sama diferencovatelnou varietou dimenze *n* a nazývá se *otevřená podvarieta diferencovatelné variety X.*

Definice 2.4.2 *Adaptované souřadnice:*
Nechť X je diferencovatelná varieta dimenze n, nechť $W \subset X$ je libovolná podmnožina. Řekneme, že souřadnicový sytém (U,φ), $\varphi = (x^1,...,x^n)$ je adaptovaný k W jestliže $W \cap U \neq 0$ a existuje číslo m, $1 \le m \le n$, tak, že pro každé $w \in W \cap U$, platí: $x^{m+1}\varphi(w) = ... = x^n\varphi(w) = 0$.

Pro $x \in U$ je $x^{m+1}\varphi(x) = f^1(x^1,...,x^n),\dots,x^n\varphi(x) = f^{n-m}(x^1,...,x^n)$, tyto rovnice jsou rovnicemi podmnožiny W. Lze tedy psát $\varphi = (x^1,...,x^m, f^1,..., f^{n-m})$.

Tvrzení 2.4.3: Adaptované sořadnicové systémy jsou kompatibilní.

Tvrzení 2.4.4: *Asociované souřadnice:*
Nechť (U,φ) je adaptovaný k W. Označme $V = U \cap W, \psi = \varphi|_V$, $w^i = x^i|_V$, $1 \le i \le m$. Pak (V,ψ) je souřadnicový systém na W, nazývá se *asociovaný s* (U,φ).

Tvrzení 2.4.5: Nechť (U,φ), $(\overline{U},\overline{\varphi})$, $U \cap \overline{U} \neq 0$, jsou adaptované k W. Pak asociované souřadnicové systémy (V,ψ), $(\overline{V},\overline{\psi})$, $V \cap \overline{V} \neq 0$, jsou kompatibilní.

Definice 2.4.6 *m-rozměrná podvarieta:*
Nechť X je diferencovatelná varieta dimenze n, $W \subset X$. Lze-li W pokrýt asociovanými souřadnicovými systémy, nazýváme ji *m-rozměrná podvarieta variety X.*

Definice 2.4.7 *Kanonické vložení:*
Nechť W je m-rozměrná podvarieta variety X. Zobrazení $\iota : x \in W \to \iota(x) = x \in X$ se nazývá *kanonické vložení* podvariety W do X.

Kanonické vložení v souřadnicích:
Nechť $f^1(x^1,...,x^n)$=0,…, $f^{n-m}(x^1,...,x^n)$=0 jsou rovnice podvariety W, tj. (U,φ), $\varphi = (x^1,...,x^m, f^1,..., f^{n-m})$ je adaptovaný souřadnicový systém. Nechť rovnice jsou nezávislé, tj. $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^l}\right) = n-m$, $1 \le i \le n-m$, $1 \le l \le n$. Bez újmy na obecnosti lze volit místo funkcí $f^1,..., f^{n-m}$ tzv. *normální souřadnice.* $f^i \equiv x^{m+i} - g^i(x^1,...,x^m)$. Zvolme na X souřadnicový systém (U,χ), $\chi = (x^1,...,x^m, g^1,..., g^{n-m})$. Kanonické vložení je pak v souřadnicích (V,ψ), $\psi = (x^1,...,x^n)$, (U,χ) reprezentováno takto:

$$\chi\iota\psi^{-1} : (x^1,...,x^m) \in \psi(V) \to \iota(x^1,...,x^m) = (x^1,...,x^m, g^1(x^1,...,x^m),..., g^{n-m}(x^1,...,x^m)) \in \varphi(U).$$

Zkráceně píšeme pouze ι místo souřadnicové reprezentace $\chi\iota\psi^{-1}$.

Příklad 2.4.8: *Adaptované souřadnice a kanonické vložení na* J^1Y *:*
Nechť (Y,π,X) je fibrovaná varieta, dim$X$ =1, dim$Y$=m+1, dim J^1Y =2m+1. Nechť $Q \subset J^1Y$ je podvarieta dimenze 2m+1-k, $1 \le k \le m-1$. Nechť (V_1,ψ_1), $\psi_1 = (t, q^\sigma, \dot{q}^l, f^i(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma))$, $1 \le \sigma \le m$, $1 \le l \le m-k$, $1 \le i \le k$ je adaptovaný souřadnicový systém , $f^i = f^i(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma) = 0$ jsou rovnice podvariety Q, $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) = k$. V 2.4.7 byly zavedeny normální souřadnice

$$f^i \equiv \dot{q}^{m-k+i} - g^i(t, q^\sigma, \dot{q}^1,...,\dot{q}^{m-k}) = 0.$$

Nechť $\left(V_1^Q, \psi_1^Q\right)$, $\psi_1^Q = \left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right)$ je souřadnicový systém na Q asociovaný s $\left(V_1, \psi_1\right)$. Mějme na J^1Y souřadnicový systém $\left(V_1, \chi_1\right)$, kde $\chi_1 = \left(t, q^\sigma, \dot{q}^l, g^i\right)$. Kanonické vložení v souřadnicových systémech $\left(V_1^Q, \psi_1^Q\right), \left(V_1, \chi_1\right)$ pak dostává tvar:

$$\iota\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right) = \left(t, q^\sigma, \dot{q}^l, \dot{q}^{m-k+i}\left(t, q^\nu, \dot{q}^s\right)\right),$$

$1 \le \sigma, \nu \le m,\ 1 \le l, s \le m-k,\ 1 \le i \le k$.

Definice 2.4.9 Nechť Δ je distribuce na *X*. Nechť *M* je hladká varieta a $f : M \to X$ vnoření. *f* se nazývá *integrální zobrazení distribuce* Δ, je-li pro každé $t \in M$: $T_t f\left(T_t M\right) \subset \Delta_{f(t)}$.

Definice 2.4.10 *Integrální varietou* distribuce Δ nazveme podvarietu *W* variety *X* pokud *W* je souvislá varieta a kanonické vložení $\iota : W \to X$ je integrálním zobrazením distribuce Δ.

Definice 2.4.11 *První integrál distribuce*
Nechť Δ je distribuce definovaná na varietě *X*. Funkci *g* definovanou na otevřené množině $U \subset X$ nazveme *prvním integrálem distribuce* Δ, pokud 1-forma *dg* je anihilátorem distribuce Δ, tzn. $i_\xi dg = 0$ pro každé vektorové pole $\xi \in \Delta$.

Definice 2.4.12 *Úplný soubor nezávislých prvních integrálů distribuce*
První integrály g_1, g_2 distribuce Δ definované na $U \subset X$ se nazývají *nezávislé*, když formy dg_1, dg_2 jsou lineárně nezávislé v každém bodě otevřené množiny *U*.

Nechť $g_1, \ldots\ldots, g_k$ jsou nezávislé první integrály distribuce Δ, definované na *U*. Soubor $\{g_1, \ldots, g_k\}$ nazveme *úplný soubor nezávislých prvních integrálů* distribuce Δ v bodě $x \in U$, když platí:

$$\Delta_x = span\{\mathrm{d}g_1(x), \ldots, \mathrm{d}g_k(x)\}.$$

Tvrzení 2.4.13: Nechť je $\{g_1, \ldots, g_k\}$ úplný soubor nezávislých prvních integrálů distribuce Δ, pak podvariety $W, W \subset U \subset X$, které je možno vyjádřit rovnicemi $g_1 = a_1, \ldots, g_k = a_k$, kde a_i jsou konstanty, jsou integrálními varietami distribuce Δ maximální dimenze.

Důkaz: Z definice variety *W* je zřejmé, že pro kanonické vložení $\iota : W \to X$ platí $T_t \iota\left(T_t W\right) = \Delta_{\iota(t)}$ pro libovolné $t \in W$.

Definice 2.4.14 *Úplně integrabilní distribuce:*
Distribuce Δ na varietě *X* se nazývá *úplně integrabilní*, jestliže každým bodem $x \in X$ prochází integrální varieta distribuce Δ maximální dimenze.

2.4.2. Vektorová pole a formy na podvarietě fibrované variety

Nechť (Y, π, X) je fibrovaná varieta, dim X =1, dim*Y*=*m*+1, dim J^1Y =2*m*+1. Nechť *Q* je podvarieta variety J^1Y, dim *Q=2m+1-k,* $1 \le k \le m-1$. V každém bodě $x \in Q$ je dán souřadnicový systém $\left(V_1, \psi_1\right)$ na J^1Y adaptovaný k podvarietě *Q*. Podvarieta *Q* je zadána systémem rovnic $f^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma\right) = 0,\ 1 \le i \le k$.

Příklad 2.4.15: *Tečný vektor k Q:*

Jacobiho matice tečného zobrazení ke vložení ι:

$$\iota : x \in Q \to \iota(x) = x \in J^1Y\,,\ \iota : \left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right) \to \left(t, q^\sigma, \dot{q}^l, g^i\left(t, q^\nu, \dot{q}^s\right)\right), \text{ kde}$$

$1 \le \sigma, \nu \le m$, $1 \le i \le k$, $1 \le l, s \le m-k$, $\dot{q}^{m-k+i} = g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^{m-k}\right)$ má v bodě $x \in Q$ tvar:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\qquad E \qquad}_{2m+1-k} & \begin{array}{c} \left(\dfrac{\partial g^i}{\partial t}\right) \\ \left(\dfrac{\partial g^i}{\partial q^\sigma}\right) \\ \left(\dfrac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l}\right) \end{array} \end{array}\right)_{\substack{i=1,\ldots,k \\ \sigma=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,m-k}}$$

Tvar tečného vektoru $\overline{\xi}$ k varietě Q v souřadnicích asociovaných s $\left(V_1, \psi_1\right)$:

$$\overline{\xi} = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \widetilde{\xi}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}\,.$$

Platí:

$$\xi = T_x\iota\left(\overline{\xi}\right) = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \widetilde{\xi}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} + \left(\xi^0 \frac{\partial g^i}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial g^i}{\partial q^\sigma} + \widetilde{\xi}^l \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l}\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{m-k+i}}\,,$$

kde $\xi \in T_xM \subset T_xJ^1Y$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že čtvercová matice $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{m-k+j}}\right)$ je regulární. Zavedeme-li a^i_j jako matici inverzní k matici $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{m-k+j}}\right)$, pak můžeme psát pro $\dot{q}^{m-k+i}\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right) = g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right)$:

$$\frac{\partial f^i \circ \iota}{\partial t} = \frac{\partial f^i}{\partial t} + \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{m-k+j}} \frac{\partial g^j}{\partial t} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial g^i}{\partial t} = \frac{\partial \dot{q}^{m-k+i} \circ \iota}{\partial t} = -a^i_j \frac{\partial f^j}{\partial t}\,,$$

$$\frac{\partial f^i \circ \iota}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial f^i}{\partial q^\sigma} + \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{m-k+j}} \frac{\partial g^j}{\partial q^\sigma} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial g^i}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial \dot{q}^{m-k+i} \circ \iota}{\partial q^\sigma} = -a^i_j \frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma}\,,$$

$$\frac{\partial f^i \circ \iota}{\partial \dot{q}^l} = \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^l} + \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{m-k+j}} \frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^l} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} = \frac{\partial \dot{q}^{m-k+i} \circ \iota}{\partial \dot{q}^l} = -a^i_j \frac{\partial f^j}{\partial \dot{q}^l}\,,$$

$1 \le i, j \le k,\ 1 \le l \le m-k,\ 1 \le \sigma \le m$,

$$\xi = T_x\iota\left(\overline{\xi}\right) = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \widetilde{\xi}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l} - a^i_j \left(\xi^0 \frac{\partial f^j}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma} + \widetilde{\xi}^l \frac{\partial f^j}{\partial \dot{q}^l}\right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^{m-k+i}}\,.$$

Tvrzení 2.4.16: Nechť je podvarieta Q zadána systémem rovnic $f^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma\right) = 0,\ 1 \le i \le k$, nechť ξ je vektor tečný k podvarietě Q. Pak platí: $df^i(\xi) = 0$.

Důkaz: $\mathrm{d}f^i = \frac{\partial f^i}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f^i}{\partial q^\sigma}\mathrm{d}q^\sigma + \frac{\partial f^i}{\partial \dot q^l}\mathrm{d}\dot q^l + \frac{\partial f^i}{\partial \dot q^{m-k+j}}\mathrm{d}\dot q^{m-k+j}$. Vezmeme-li vyjádření vektoru ξ z 2.4.15 pak

$$\mathrm{d}f^i(\xi) = \frac{\partial f^i}{\partial t}\xi^0 + \frac{\partial f^i}{\partial q^\sigma}\xi^\sigma + \frac{\partial f^i}{\partial \dot q^l}\tilde{\xi}^l - \underbrace{a_h^i \frac{\partial f^h}{\partial \dot q^{m-k+j}}}_{\delta_j^i}\left(\xi^0 \frac{\partial f^j}{\partial t} + \xi^\sigma \frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^l \frac{\partial f^j}{\partial \dot q^l}\right) = 0 .$$

Definice 2.4.17 *Formy na Q:*
Nechť $\omega \in \Lambda^k\left(TJ^1Y\right)$ je k-forma. Nechť $\iota : Q \to J^1Y$ je kanonické vložení. k-*formou na Q* rozumíme zobrazení $\omega_Q : x \in Q \to \omega_Q(x) \in \Lambda^k(T_xQ)$. Formu $\omega_Q \in \Lambda^k(TQ)$ nazveme *restrikcí* formy ω na podvarietu Q, jestliže pro každé $x \in Q$ a každý vektor $\xi \in T_xQ$ platí: $\omega_Q(x)(\xi) = \omega(\iota(x))(T_x\iota(\xi))$, tj. $\omega_Q = \iota^*\omega$.

Příklad 2.4.18: *1-formy na Q:*
Nechť $\omega \in \Lambda^k\left(TJ^1Y\right)$, tj. $\omega(x) \in \Lambda^k\left(T_xJ^1Y\right)$, $\omega = A\mathrm{d}t + B_\sigma\omega^\sigma + C_\sigma \mathrm{d}\dot q^\sigma$,

$$\iota^*\omega = (A\circ\iota)\ \iota^*\mathrm{d}t + (B_\sigma\circ\iota)\ \iota^*\omega^\sigma + (C_\sigma\circ\iota)\ \iota^*\mathrm{d}\dot q^\sigma$$

$$\iota^*\mathrm{d}t = \mathrm{d}t,\ \iota^*\omega^l = \omega^l,\ \iota^*\omega^{m-k+i} = \iota^*\mathrm{d}q^{m-k+i} - \left(\dot q^{m-k+i}\circ\iota\right)\mathrm{d}t = \iota^*\mathrm{d}q^{m-k+i} - g^i\mathrm{d}t,\ \iota^*\mathrm{d}\dot q^l = \mathrm{d}\dot q^l$$

$$\iota^*\mathrm{d}\dot q^{m-k+i} = \iota^*\mathrm{d}g^i = \iota^*\left(\frac{\partial g^i}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial g^i}{\partial q^\sigma}\mathrm{d}q^\sigma + \frac{\partial g^i}{\partial \dot q^l}\mathrm{d}\dot q^l\right) =$$

$$\iota^*\left(-a_j^i\frac{\partial f^j}{\partial t}\mathrm{d}t - a_j^i\frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma}\mathrm{d}q^\sigma - a_j^i\frac{\partial f^j}{\partial \dot q^l}\mathrm{d}\dot q^l\right) =$$

$$= -\left(a_j^i\frac{\partial f^j}{\partial t}\right)\circ\iota\ \mathrm{d}t - \left(a_j^i\frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma}\right)\circ\iota\ \mathrm{d}q^\sigma - \left(a_j^i\frac{\partial f^j}{\partial \dot q^l}\right)\circ\iota\ \mathrm{d}\dot q^l =$$

$$= -\left(a_j^i\circ\iota\right)\left(\frac{\partial f^j}{\partial t}\circ\iota\ \mathrm{d}t + \frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma}\circ\iota\ \mathrm{d}q^\sigma + \frac{\partial f^j}{\partial \dot q^l}\circ\iota\ \mathrm{d}\dot q^l\right),$$

$1 \le i, j \le k,\ 1 \le l \le m-k,\ 1 \le \sigma \le m$.

Definice 2.4.19 *Kontaktní forma na Q*
Forma ω_Q na Q se nazývá kontaktní, jestliže je $J^1\gamma^*\omega_Q = 0$ pro každý řez $\gamma : U \to Y, U \subset X$, takový, že $J^1\gamma(x) \in Q$ pro všechna $x \in U$.

Tvrzení 2.4.20: Je-li ω kontaktní forma na J^1Y, pak je kontaktní i její restrikce na Q.

Důkaz: Je-li ω kontaktní forma na J^1Y pak pro každý řez $\gamma : x \in U \to \gamma(x) \in Y$ platí $J^1\gamma^*\omega = 0$. Nechť pro každé $x \in U$ je $J^1\gamma(x) \in Q$, pak:

$$J^1\gamma^*\omega_Q = J^1\gamma^*\iota^*\omega = \left(\iota\circ J^1\gamma\right)^*\omega = J^1\gamma^*\omega = 0 .$$

Tvrzení 2.4.21: *Všechny kontaktní 1-formy na Q mají tvar* $\iota^*\left(B_\sigma\omega^\sigma\right)$.

Důkaz: Všechny kontaktní formy na J^1Y mají tvar $\omega = B_\sigma \omega^\sigma$, $B_\sigma = B_\sigma\left(t, q^\nu, \dot{q}^\nu\right)$. Podle předchozího tvrzení je $\iota^* B_\sigma \omega^\sigma$ kontaktní formou na *Q*. Nyní je třeba dokázat, že jiné kontaktní 1-formy na *Q* v důsledku restrikce nevznikají. Nejprve odvoďme rovnice pro *přípustné řezy*, tj. takové řezy $\gamma : x \in U \to \gamma(x) \in Y$, pro které je $J^1\gamma(x) \in Q$ pro libovolné $x \in U$. Podvarieta *Q* je dána systémem rovnic $f^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l, \dot{q}^{m-k+i}\right)$=0, tj.pro přípustné řezy γ platí:

$$f^i\left(t, q^\sigma\gamma(x), \dot{q}^l\gamma(x), \dot{q}^{m-k+i}\gamma(x)\right)=0$$

Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že rovnice *Q* jsou vyjádřeny explicitně:

$$\dot{q}^{m-k+i} = g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right),\ 1 \le i \le k,\ 1 \le \sigma \le m,\ 1 \le l \le m-k .$$

Derivací podle *t* získáme:

$$\frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f^i}{\partial t} + \frac{\partial f^i}{\partial q^\sigma}\frac{dq^\sigma\gamma(t)}{dt} + \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^l}\frac{d\dot{q}^l\gamma(t)}{dt} + \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{m-k+j}}\frac{d\dot{q}^{m-k+j}\gamma(t)}{dt} = 0,$$

vynásobením maticí $(a^h{}_i)$ (matice inverzní k matici $\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^{m-k+h}}\right)$) a úpravou dostaneme *rovnice přípustných řezů:*

$$\ddot{q}^{m-k+h}\gamma(t) + a_i^h \frac{\partial f^i}{\partial q^{m-k+j}}\dot{q}^{m-k+j}\gamma(t) = -a_i^h\left(\frac{\partial f^i}{\partial t} + \frac{\partial f^i}{\partial q^l}\dot{q}^l\gamma(t) + \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^l}\ddot{q}^l\gamma(t)\right),$$

$1 \le i, j, h \le k,\ \ 1 \le l \le m-k$, kde

$$\frac{\mathrm{d}q^{m-k+h}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^{m-k+h}\gamma(t),\ \frac{\mathrm{d}\dot{q}^{m-k+h}\gamma(t)}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}^{m-k+h}\gamma(t)$$

a obdobně pro index *l*. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že rovnice *Q* jsou vyjádřeny explicitně:

$$\dot{q}^{m-k+i} = g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right),\ 1 \le i \le k,\ 1 \le \sigma \le m,\ 1 \le l \le m-k .$$

Pro přípustné řezy v souřadnicích platí:

$$J^1\gamma(t) = \left(t, q^\sigma\gamma(t), \dot{q}^l\gamma(t), g^i\left(t, q^\sigma\gamma(t), \dot{q}^l\gamma(t)\right)\right).$$

Nechť $x \in Q \subset J^1Y, \omega \in \Lambda^1\left(TJ^1Y\right), \xi \in T_xQ$. Obecně má ω tvar $\omega = A\mathrm{d}t + B_\sigma\omega^\sigma + C_\sigma d\dot{q}^\sigma$, restrikce ω na *Q*: $\omega_Q = \iota^*\omega$. Hledáme takové ω_Q, pro které platí $J^1\gamma^*\omega_Q = 0$, kde γ je přípustný řez. Protože $J^1\gamma^*\iota^*\left(B_\sigma\omega^\sigma\right) = 0$ má podmínka tvar:

$$J^1\gamma^*\omega_Q = J^1\gamma^*\iota^*\left(A\mathrm{d}t + B_\sigma\omega^\sigma + C_\sigma\mathrm{d}\dot{q}^\sigma\right) = J^1\gamma^*\iota^*\left(A\mathrm{d}t + C_\sigma\mathrm{d}\dot{q}^\sigma\right).$$

Dále platí:

$$\iota^*\left(A\mathrm{d}t + C_\sigma\mathrm{d}\dot{q}^\sigma\right) = (A\circ\iota)\iota^*\mathrm{d}t + (C_l\circ\iota)\iota^*\mathrm{d}\dot{q}^l + (C_{m-k+i}\circ\iota)\iota^*\mathrm{d}g^i =$$
$$= \left[(A\circ\iota) + (C_{m-k+i}\circ\iota)\left(\frac{\partial g^i}{\partial t} + \frac{\partial g^i}{\partial q^l}\dot{q}^l + \frac{\partial g^i}{\partial q^{m-k+j}}g^j\right)\right]\mathrm{d}t +$$

$$+\left[(C_l\circ\iota)+(C_{m-k+i}\circ\iota)\frac{\partial g^i}{\partial\dot q^l}\right]\mathrm{d}\dot q^l+\underbrace{(C_{m-k+i}\circ\iota)\frac{\partial g^i}{\partial q^\sigma}\iota^*\omega^\sigma}_{kontaktn\acute{\imath}}.$$

Požadujeme:

$$0=J^1\gamma^*\iota^*\left(A\mathrm{d}t+C_\sigma\mathrm{d}\dot q^\sigma\right)=\left[(A\circ\iota)+(C_{m-k+i}\circ\iota)\left(\frac{\partial g^i}{\partial t}+\frac{\partial g^i}{\partial q^l}\dot q^l+\frac{\partial g^i}{\partial q^{m-k+j}}g^j\right)\right]\circ J^1\gamma\ \mathrm{d}t+$$
$$+\left[(C_l\circ\iota)+(C_{m-k+i}\circ\iota)\frac{\partial g^i}{\partial\dot q^l}\right]\circ J^1\gamma\ \ddot q^l\gamma(t)\mathrm{d}t$$

Jelikož pro přípustné řezy γ jsou funkce $q^l\gamma(t)$ libovolné, pak:

$$(A\circ\iota)+(C_{m-k+i}\circ\iota)\left(\frac{\partial g^i}{\partial t}+\frac{\partial g^i}{\partial q^l}\dot q^l+\frac{\partial g^i}{\partial q^{m-k+j}}g^j\right)=0,\ (C_l\circ\iota)+(C_{m-k+i}\circ\iota)\frac{\partial g^i}{\partial\dot q^l}=0.$$

Odtud plyne, že kontaktní formy na Q vznikají výhradně restrikcí kontaktních forem $B_\sigma\omega^\sigma$ definovaných na J^1Y na Q. Pro kontaktní formy na Q tedy platí: $\omega_{Q,kont}=\iota^*\left(B_\sigma\omega^\sigma\right)$. Analogicky 2-kontaktní 2-formy na Q mají tvar $\iota^*B_{\sigma\nu}\omega^\sigma\wedge\omega^\nu$, atd.

Příklad 2.4.22: *π_1-vertikální vektory na Q:*

π_1-vertikální vektor na J^1Y má tvar: $\xi_V=\xi^\sigma\frac{\partial}{\partial q^\sigma}+\tilde\xi^\sigma\frac{\partial}{\partial\dot q^\sigma}$. Označme $V_Q\pi_1(x)=V\pi_1(x)\cap T_xQ$ prostor π_1-vertikálních vektorů v bodě $x\in Q$ podvariety Q a $V\pi_1(x)$ prostor π_1-vertikálních vektorů v bodě $x\in J^1Y$. π_1-vertikální vektor $\xi_{V,Q}\in V_Q\pi_1(x)$ na Q má pak s užitím 2.4.15 tvar:

$$\xi_{V,M}=\xi^\sigma\frac{\partial}{\partial q^\sigma}+\tilde\xi^l\frac{\partial}{\partial\dot q^l}-a^i_j\left(\xi^\sigma\frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma}+\tilde\xi^l\frac{\partial f^j}{\partial\dot q^l}\right)\frac{\partial}{\partial\dot q^{m-k+i}}.$$

Příklad 2.4.23: *Horizontální 1-formy na Q:*

1-forma na Q má tvar $\omega=A\mathrm{d}t+B_\sigma\mathrm{d}q^\sigma+C_l\mathrm{d}\dot q^l$, kde A,B_σ,C_l jsou funkce proměnných $(t,q^\sigma,\dot q^l)$. Vyčíslíme-li formu ω na π_1-vertikálním vektoru na Q, dostáváme $\omega(\xi_{V,M})=B_\sigma\xi^\sigma+C_l\tilde\xi^l$. Pro π_1-horizontální formu na Q musí být $\omega(\xi_{V,M})=0$, tedy $B_\sigma=0,C_l=0$ a dostáváme tvar π_1-horizontální formy na Q: $\omega=A(t,q^\sigma,\dot q^l)\mathrm{d}t$.

Obdobně získáme:

$\pi_{1,0}$-vertikální vektory na Q: $(\xi_{V,Q})=\tilde\xi^{l_0}\frac{\partial}{\partial\dot q^l}-a^i_j\left(\tilde\xi^l\frac{\partial f^j}{\partial\dot q^l}\right)\frac{\partial}{\partial\dot q^{m-k+i}}$,

$\pi_{1,0}$-horizontální formy na Q: $\omega=A\mathrm{d}t+B_\sigma\omega^\sigma$, kde A,B_σ jsou funkce na Q.

Definice 2.4.24 *Formy na Q podél distribuce:*

Nechť $Q\subset J^1Y$ je podvarieta zadaná nezávislým systémem k rovnic $f^i(t,q^\sigma,\dot q^\sigma)=0$, $1\le i\le k$, je dán tečný a kotečný prostor T_xQ, T_x^*Q, kde $x\in Q$, $\dim T_xQ=\dim T_x^*Q=2m+1-k$,

$$\text{báze } T_x^*Q : \left(\mathrm{d}t, \mathrm{d}q^\sigma, \mathrm{d}\dot{q}^l\right), \qquad \text{báze } T_xQ = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial q^\sigma}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^l}\right).$$

Nechť Δ je distribuce konstantního ranku na Q. Nechť $x \in Q$ je libovolný bod. Označme $\Delta_x^* \subset T_x^*Q$ duální prostor k Δ_x. Zobrazení $\omega : x \to \omega(x) \in \Delta_x^*$ se nazývá *1-forma podél distribuce* Δ. Zobrazení $\eta : x \to \eta(x) \in \Lambda^k\left(\Delta_x\right)$ se nazývá *k-forma podél distribuce* Δ.

Tvrzení 2.4.25: Nechť Δ je distribuce konstantního ranku na Q a Δ^0 její kodistribuce. Pak 1-formy podél distribuce Δ generují v každém boě $x \in Q$ doplněk vektorového prostoru Δ_x^0 v T_x^*Q.

3. Nevázané a vázané mechanické systémy

V následující kapitole definujeme postupně mechanický systém bez vazeb a mechanický systém s neholonomními vazbami pomocí objektů na fibrované varietě. Budeme řešit fyzikální příklady jako geometrický problém na fibrované varietě. Výklad se již nadále bude týkat variety jejíž báze je jednorozměrná.

3.1. Mechanický systém bez vazeb

Definice 3.1.1 Nechť $\pi : Y \to X$, *dim*X=*1*. *Lagrangiánem řádu* r nazýváme horizontální 1-formu λ na $J^r Y$, jejíž vyjádření ve fibrovaných souřadnicích je: $\lambda = L(t, q^\sigma, q_1^\sigma, \ldots, q_r^\sigma)\mathrm{d}t$. Funkce L se nazývá Lagrangeova funkce.

Definice 3.1.2 *Dynamická forma*
Každá 1-kontaktní $\pi_{2,0}$-horizontální 2-forma E na $J^2 Y$ se nazývá *dynamická*. Ve fibrovaných souřadnicích má dynamická forma tvar:

$$E = E_\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu)\mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t = E_\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu, \ddot{q}^\nu)\omega^\sigma \wedge \mathrm{d}t\,.$$

Uvažujeme pouze speciální případ: E_σ je afinní v druhých derivacích, tj.

$$E_\sigma = A_\sigma(t, q^\nu, \dot{q}^\nu) + B_{\sigma\rho}(t, q^\nu, \dot{q}^\nu)\ddot{q}^\sigma\,.$$

Dynamická forma se nazývá *variační*, existuje-li Lagrangián λ prvního řádu, $\lambda = L(t, q^\nu, \dot{q}^\nu)\mathrm{d}t$ tak, že:

$$E_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\,,\ 1 \le \nu, \sigma \le m\,.$$

Nechť řez $\gamma : X \to Y$ splňuje podmínku

$$E \circ J^2\gamma = 0\,, \tag{3.1.3}$$

pak se nazývá *trajektorie dynamické formy E* . Lze psát

$$E_\sigma\left(t, \gamma^\nu, \frac{\mathrm{d}\gamma^\nu}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\gamma^\nu}{\mathrm{d}t^2}\right) = 0 \tag{3.1.4}$$

Vidíme, že pokud je splněna podmínka (3.1.3), mají komponenty dynamické formy E_σ význam levých stran pohybových rovnic.

Tvrzení 3.1.5: Nechť E je dynamická forma afinní v druhých derivacích. Existuje 2-forma α s následujícími vlastnostmi:

1. $\alpha = E + F$, kde F je 2-kontaktní,
2. α je projektabilní na $J^1 Y$.

Důkaz: Formu α zkonstruujeme. Z požadavku (1) pro tvar α vyplývá:

$$\alpha = (A_\sigma + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu)\,\omega^\sigma \wedge \mathrm{d}t + F_{\sigma\upsilon}\,\omega^\sigma \wedge \omega^\upsilon + F_{\sigma\upsilon}^{01}\,\omega^\sigma \wedge \dot{\omega}^\upsilon + F_{\sigma\upsilon}^{11}\,\dot{\omega}^\sigma \wedge \dot{\omega}^\upsilon\,.$$

$F_{\sigma\nu} = -F_{\nu\sigma}$. Z podmínky (2) dostáváme $F^{01}_{\sigma\upsilon} = B_{\sigma\nu}$, $F^{11}_{\sigma\upsilon}=0$. Pro α dostaneme tvar: $\alpha = A_\sigma \omega^\sigma \wedge dt + F_{\sigma\upsilon}\omega^\sigma \wedge \omega^\nu + B_{\sigma\nu}\omega^\sigma \wedge d\dot{q}^\nu$. Projektabilita na J^1Y je ze souřadnicového vyjádření zřejmá.

Formu α nazýváme *Lepageovou formou asociovanou s E*. Lepageovy formy tvoří třídu ekvivalence, která je zavedena takto: α' se nazývá ekvivalentní s α, pokud $\alpha' = \alpha + \eta$, kde η je 2-kontaktní, $\pi_{1,0}$ – horizontální 2-forma (tj. je tvaru $\eta = F_{\sigma\nu}\omega^\sigma \wedge \omega^\upsilon$).

Definice 3.1.6 *Dynamická distribuce*
Nechť $\Delta^0_\alpha = \operatorname{span}\{i_\xi \alpha\}$, kde ξ probíhá množinu všech π_1-vertikálních vektorových polí na J^1Y. Odpovídající distribuci Δ_α na J^1Y nazveme *dynamickou distribucí.* Nechť

$$\xi = \xi^\sigma \frac{\partial}{\partial q^\sigma} + \tilde{\xi}^\sigma \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma}\text{, pak } i_\xi \alpha = \left(A_\sigma dt + 2F_{\sigma\nu}\omega^\nu + B_{\sigma\nu} d\dot{q}^\nu\right)\xi^\sigma + B_{\sigma\nu}\omega^\sigma \tilde{\xi}^\nu .$$

Anihilátory dynamické distribuce mají tedy tvar: $A_\sigma dt + 2F_{\sigma\upsilon}\omega^\nu + B_{\sigma\nu} d\dot{q}^\nu$, $B_{\sigma\nu}\omega^\sigma$.

Tvrzení 3.1.7: Nechť *E* je dynamická forma na J^1Y.

1. Nechť α_1, α_2 jsou ekvivalentní Lepageovy 2-formy asociované s *E* a $\Delta_{\alpha 1}$, $\Delta_{\alpha 2}$ odpovídající dynamické distribuce. Pak distribuce $\Delta_{\alpha 1}$, $\Delta_{\alpha 2}$ mají stejný soubor holonomních integrálních řezů.
2. Soubor holonomních integrálních řezů každé dynamické distribuce příslušné k *E* je totožný se souborem holonomních trajektorií dynamické formy *E*.

Důkaz: Zřejmě

$$\begin{aligned}\Delta^0_{\alpha 1} &= \operatorname{span}\left\{A_\sigma dt + 2F_{\sigma\upsilon}\omega^\upsilon + B_{\sigma\nu} d\dot{q}^\nu, B_{\sigma\nu}\omega^\sigma\right\},\\ \Delta^0_{\alpha 2} &= \operatorname{span}\left\{A_\sigma dt + 2\overline{F}_{\sigma\upsilon}\omega^\upsilon + B_{\sigma\nu} d\dot{q}^\nu, B_{\sigma\nu}\omega^\sigma\right\},\end{aligned}$$

tedy ke každému anihilátoru $\eta \in \Delta^0_{\alpha 1}$ existuje anihilátor $\overline{\eta} \in \Delta^0_{\alpha 2}$ tak, že $\overline{\eta} = \eta + \varphi$, kde φ je kontaktní 1-forma.

Je-li δ holonomním integrálním řezem distribuce $\Delta_{\alpha 1}$, pak existuje řez γ variety (Y, π, X) tak, že $J^1\gamma^*\eta = 0$, pro každé $\eta \in \Delta^0_{\alpha 1}$. Nechť $\overline{\eta}$ je libovolný anihilátor $\overline{\eta} \in \Delta^0_{\alpha 2}$, z výše uvedeného plyne $J^1\gamma^*\overline{\eta} = 0$ a tedy δ je holonomním integrálním řezem distribuce $\Delta_{\alpha 2}$.

Nechť α je Lepageova 2-forma asociovaná s *E*, Δ_α je příslušná dynamická distribuce. Nechť δ je holonomní integrální řez fibrované variety (J^1Y, π_1, X), tj. $\delta = J^1\gamma$ pro jistý řez γ fibrované variety (Y, π, X). Řez δ je integrálním řezem dynamické distribuce Δ_α právě tehdy když $\delta^*\eta = 0$ pro každý anihilátor $\eta \in \Delta^0_\alpha$, tj. $\delta^* i_\xi \alpha = 0$ pro libovolné π_1-vertikální vektorové pole na J^1Y. Tedy $J^1\gamma^* i_\xi \alpha = 0$.
Platí:

$$\begin{aligned}J^1\gamma^* i_\xi \alpha &= J^1\gamma^*\left(\left(A_\sigma dt + 2F_{\sigma\upsilon}\omega^\upsilon + B_{\sigma\nu} d\dot{q}^\nu\right)\xi^\sigma - B_{\sigma\nu}\omega^\sigma\tilde{\xi}^\nu\right) =\\ &= J^2\gamma^*\left\{A_\sigma dt + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu dt + B_{\sigma\nu}\dot{\omega}^\nu\right\}\left(\xi^\sigma \circ J^1\gamma\right) = \left(E_\sigma \circ J^2\gamma\right)\left(\xi^\sigma \circ J^1\gamma\right)dt .\end{aligned}$$

Podmínky $J^1\gamma^* i_\xi \alpha = 0$ a $E_\sigma \circ J^2\gamma = 0$ jsou ekvivalentní.

Definice 3.1.8 *Mechanickým systémem prvního řádu* rozumíme třídu $[\alpha]$ ekvivalentních Lepageových 2-forem na J^1Y asociovaných s *E*. Řekneme, že mechanický systém $[\alpha]$ je *regulární*, je-li rank $\Delta_\alpha=1$ pro jisté $\alpha\in[\alpha]$.

Tvrzení 3.1.9: Nechť $[\alpha]$ je mechanický systém na J^1Y. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $[\alpha]$ je regulární,
2. $B_{\sigma\nu}$ je regulární v každém bodě $y\in J^1Y$,
3. $\Delta_\alpha=\Delta_{\alpha'}$ pro libovolné $\alpha'\in[\alpha]$.

3.2. Neholonomní vazby

V následujícím odstavci se budeme zabývat systémem neholonomních vazeb, s ním spojenou vazební silou a vazební podvarietou variety J^1Y.

Je dána fibrovaná varieta $\pi: Y\to X$, dim*X*=1, její první a druhé jetové prodloužení J^1Y, J^2Y. Nechť *Q* je podvarieta variety J^1Y, dim*Q*=2*m*+1-*k*, $1\le k\le m-1$. V každém bodě $x\in Q$ je tedy dán souřadnicový systém (U,χ) na J^1Y, který je adaptovaný k varietě *Q*. Označme $\chi=(x^p,f^i)$, $1\le p\le 2m+1-k$, $1\le i\le k$. Podvarieta *Q* je definována na otevřené množině U rovnicemi:

$$f^i=0,\ 1\le i\le k. \tag{3.2.1}$$

Definice 3.2.2 *Vazební podvarieta:*
Nechť $x\in Q$, $x\in U\subset J^1Y$ a nechť (U,χ) je souřadnicový systém s fibrovanými souřadnicemi $(t,q^\sigma,\dot q^\sigma)$, $1\le\sigma\le m$. Označme $Q_U=Q\cap U$. Podvarietu Q_U nazveme *vazební podvarietou, lokální vazbou*, pokud v každém bodě $x\in U$ platí:

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f^i}{\partial\dot q^\sigma}\right)=k. \tag{3.2.3}$$

Je-li splněno (3.2.3), pak (3.2.1) nazýváme *systémem k neholonomních vazeb*.

Pokud existuje pokrytí podvariety *Q* množinou adaptovaných souřadnicových systémů (U_ι,χ_ι) tak, že pro každé ι jsou splněny vztahy (3.2.3), pak *Q* nazýváme *vazební podvarietou, globální vazbou.*

Adaptovaným souřadnicovým systémům (U_ι,χ_ι) přísluší *adaptované souřadnice* $(t_\iota,q_\iota^\sigma,\dot q_\iota^1,\dots,\dot q_\iota^{m-k},f_\iota^1,\dots,f_\iota^k)$, kde $(t_\iota,q_\iota^\sigma,\dot q_\iota^\sigma)$ jsou fibrované souřadnice na *U*.

Normální souřadnice pak mají tvar: $\hat f^i\equiv\dot q^{m-k+1}-g^i(t,q^\sigma,\dot q^1,\dots,\dot q^{m-k})$, $1\le i\le k$.

Definice 3.2.4 *Holonomní trajektorie na podvarietě Q:*
Nechť *Q* je vazební podvarieta variety J^1Y. Řez γ fibrované variety π definovaný na otevřené množině $I\subset X$ nazveme *holonomní trajektorií na podvarietě Q*, pokud je pro každé $x\in I$ splněno: $J^1\gamma(x)\in Q$.

Nyní hledáme distribuci na vazební podvarietě *Q*, jejíž poddistribuce by popisovaly pohyb každého mechanického systému vázaného ke *Q*. Taková distribuce bude zahrnovat všechny možné dynamické distribuce na *Q*. Jak bylo uvedeno v 3.1.7 holonomní integrální řezy dynamické distribuce splývají s trajektoriemi příslušné dynamické formy E, která charakterizuje daný systém. Proto budeme v okolí vazební podvariety *Q* hledat systém lokálních distribucí, jejichž holonomní integrální řezy splývají s holonomními trajektoriemi na *Q*.

Nechť je Q_U lokálně zadaná vazební podvarieta definovaná rovnicemi 3.2.1. Položme

$$\varphi^i_\sigma = \frac{\partial f^i}{\partial \dot q^\sigma}, \; \varphi^i_0 = f^i - \frac{\partial f^i}{\partial \dot q^\sigma}\dot q^\sigma, \; \varphi^i = \varphi^i_0 \mathrm{d}t + \varphi^i_\sigma \mathrm{d}q^\sigma .$$

Potom platí $h\varphi^i = \left(\varphi^i_0 + \varphi^i_\sigma \dot q^\sigma\right)\mathrm{d}t = f^i \mathrm{d}t$.

Definice 3.2.5 *Vazební distribuce a rozšířená vazební distribuce*
Položme $\widetilde{C}^0_U = \operatorname{span}\{\varphi^i, 1 \le i \le k\}$, $C^0_U = \operatorname{span}\{\varphi^i, \mathrm{d}f^i, 1 \le i \le k\}$. Tyto kodistribuce definují na Q_U *rozšířenou vazební distribuci* $\widetilde{C}_U$, $\operatorname{rank}\widetilde{C}_U = 2m+1-k$, a její podvarietu - *vazební distribuci* C_U, $\operatorname{rank} C_U =$ $=2m+1-2k$.

Tvrzení 3.2.6: Nechť je Q_U lokální vazební podvarieta, C_U je příslušná vazební distribuce. Pak v každém bodě $x \in Q_U$: $C_U(x) \subset T_x Q_U$.

Důkaz: Mějme distribuci generovanou 1-formami $\mathrm{d}f^i$, $1 \le i \le k$. Tato distribuce je tečná k podvarietě Q_U, tj. zobrazuje $x \in Q_U$ na $T_x Q_U$, C_U je její poddistribucí.

Tvrzení 3.2.7: Nechť je $Q \subset J^1 Y$ vazební podvarieta. Existuje distribuce C na Q, $\operatorname{rank} C^0 = k$, tak, že holonomní integrální řezy distribuce C jsou totožné s holonomními trajektoriemi v Q.

Důkaz: viz [1], náznak důkazu:
Mějme podvarietu Q pokrytou adaptovanými souřadnicovými systémy (U_ι, χ_ι) a mějme příslušné vazební distribuce C_{U_ι}. Je nutno dokázat, že v průnicích jednotlivých souřadnicových systémů dostáváme stále jedinou vazební distribuci. Tato distribuce je zadána na celé podvarietě Q a jejími anihilátory jsou 1-formy $\{\varphi^i, \mathrm{d}f^i\}$, označíme ji C. Je-li γ holonomní trajektorií v Q, pak splňuje podmínku $J^1\gamma(x) \in Q$, pak je ale také splněno $J^1\gamma^*\varphi^i = J^2\gamma^* h\varphi^i = 0$, $J^1\gamma^* \mathrm{d}f^i = 0$, tj. γ je holonomním integrálním řezem distribuce $\wp$.

Definice 3.2.8 *Distribuci* C *na vazební varietě* Q *nazýváme* kanonickou distribucí.

Nechť $\iota : Q \to J^1 Y$ je kanonické vložení a podvarieta Q je definována rovnicemi $\dot q^{m-k+i} = g^i, 1 \le i \le k$. Prostor anihilátorů kanonické distribuce je dán:

$$C^0 = \operatorname{span}\{\iota^*\varphi^i, 1 \le i \le k\},$$
$$\iota^*\varphi^i = -\sum_{l=1}^{m-k} \frac{\partial g^i}{\partial \dot q^l}\omega^l + \mathrm{d}q^{m-k+i} - \mathrm{g}^i dt .$$

Poznamenejme, že rank kanonické distribuce má význam počtu zobecněných stupňů volnosti systému vázanému ke Q a sama kanonická distribuce představuje všechna zobecněná posunutí. Její $\pi_{1,0}$-vertikální poddistribuce má význam zobecněných virtuálních posunutí nebo také virtuálních rychlostí.

Definice 3.2.9 *Vazební síla*
Silou nazýváme dynamickou formu na $U \subset J^1 Y$. Nechť je $Q \subset J^1 Y$ vazební podvarieta. *Vazební síla* Φ vzniká na okolí Q. (Okolím Q máme na mysli sjednocení otevřených množin U_ι, které ji pokrývají).

Princip *virtuální práce* ***3.2.10***

Nechť je $Q \subset J^1 Y$. Mějme pokrytí podvariety Q adaptovanými souřadnicovými systémy $\{U_\iota\}$. Vazbu nazveme ideální, jestliže platí pro každou otevřenou množinu U_ι:

$$i_\xi \Phi = 0,$$

pro každé π_1 vertikální vektorové pole náležející do vazební distribuce C_{U_ι}.

Tvrzení 3.2.11: Mějme vazební podvarietu Q_U na U a příslušnou vazební distribuci C_U, C_U^0=span$\{\varphi^i, \mathrm{d}f^i, 1 \le i \le k\}$. Každá síla, která vyhovuje principu virtuální práce (3.2.10), má tvar:

$$\Phi = \sum_i \varphi^i \wedge \mu^i = \sum_i \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t,$$

kde $\mu^i = \mu_0^i \mathrm{d}t$, $1 \le i \le k$ je systém horizontálních 1-forem na *U*. Složky $\mu^i{}_0$ jsou tzv. *Lagrangeovy multiplikátory*.[2]

Důkaz: Vazební síla na *U* je tvaru $\Phi = \varepsilon \wedge \mathrm{d}t, \varepsilon = \varepsilon^0 \mathrm{d}t + \varepsilon_\sigma \, \mathrm{d}q^\sigma$. Φ splňuje princip virtuální práce: $i_\xi \Phi = 0$ pro každé π_1 vertikální vektorové pole náležející do vazební distribuce C_U, tedy $i_\xi \varepsilon = i_\xi(\varepsilon^0 \mathrm{d}t + p\varepsilon) = i_\xi p\varepsilon = 0$. To znamená, že kontaktní část formy ε je anihilátorem vertikální poddistribuce vazební distribuce, $p\varepsilon$ je kontaktní a $\pi_{1,0}$-horizontální, musí tedy být $p\varepsilon = \sum_i \mu_0^i p\varphi^i$.

Definice 3.2.12 *Chetaevova síla*
Každá síla Φ zavedená v (3.2.11) se nazývá *(lokální) Chetaevova síla* příslušná vazební distribuci C_U.

Nechť je $Q \subset J^1 Y$ vazební podvarieta. Nechť $\{U_\iota\}$ je otevřené pokrytí variety $J^1 Y$ adaptovanými souřadnicovými systémy, $\{C_{U_\iota}\}$ je systém příslušných vazebných distribucí a pro každé ι je Φ_ι příslušná lokální Chetaevova síla na U_ι. Nechť $\{g_\iota\}$ je rozklad jednotky vzhledem k pokrytí $\{U_\iota\}$. Vztahem $\Phi_\mathrm{N} = \sum_\iota g_\iota \Phi_\iota$ definujeme sílu na $\mathrm{N} = \cup_\iota U_\iota$, kteou nazýváme *Chetaevova síla příslušná vazbě Q.*

[2] Takto definované Lagrangeovy multiplikátory představují zobecnění Lagrangeových multiplikátorů zavedených pro řešení systémů s vazbami např. v [7]. Úvahy v [7] jsou pro neholonomní vazby provedeny za předpokladu, že $f^i = 0$ je neholonomní vazba tvaru $f^i = \sum_{k=1}^{3} \alpha^k(x^k, t)(\dot{x}^k)^\nu + \beta^i(x^k, t)$. Použitím Eulerovy věty o homogenních funkcích (viz [7], str 192) lze funkci f^i ν-tého stupně ve složkách rychlosti přepsat do tvaru: $f^i = \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^k}\dot{x}^k$, $\dot{x}^k = \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}$, pak platí $\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^k}\mathrm{d}x^k = 0$. Za předpokladu $\delta\, t = 0$ nahradíme $\mathrm{d}t \to \delta t$, $\mathrm{d}x^k \to \delta x^k$ a dostáváme $\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^k}\delta x^k = 0$. Nyní je možno použít metodu Lagrangeových multiplikátorů, která spočívá ve vynásobení posledního vztahu koeficienty μ_0^i a v dalším má výraz $\mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{x}^k}$ význam síly spjaté s neholonomní vazbou. Řešení vázaného systému se hledá pomocí principu virtuální práce (viz [7], str 186). Poznamenejme, že systémy s neholonomními vazbami zcela obecného tvaru není možno řešit pomocí výše naznačené metody.

Tvrzení 3.2.13: Nechť Φ_{N} je Chetaevova síla příslušná vazební podvarietě *Q*. Každý bod v *Q* má okolí *U* takové, že restrikce Φ_{N} na $U \cap Q$ má tvar

$$\Phi_{\mathrm{N}} = \sum_i \varphi^i \wedge \mu^i ,$$

kde $\{\varphi^i\}$ jsou anihilátory vazební distribuce C_U a $\{\mu^i\}$ je soubor 1-forem jak byly zavedeny v 3.2.11.
Důkaz: Nechť $\{U_\iota\}$ je otevřené pokrytí variety J^1Y. Potom podle (3.2.12) má Chetaevova síla příslušná vazební podvarietě Q tvar $\Phi_{\mathrm{N}} = \sum_\iota g_\iota \Phi_\iota = \sum_{i,\iota} g_\iota \varphi^i_\iota \wedge \mu^i_\iota$, kde φ^i_ι jsou anihilátory distribuce C_{U_ι}. Pro každé ι, i existují (viz důkaz 3.2.7, důsledek převodu souřadnic na průniku dvou souřanicových systémů) jisté funkce a^{ij}_ι tak, že na $U \cap Q$ lze psát

$$\varphi^i_\iota = \sum_j a^{ij}_\iota \varphi^j \quad \text{a tedy} \quad \Phi_{\mathrm{N}} = \sum_{i,j,\iota} g_\iota a^{ij}_\iota \varphi^j \wedge \mu^i_\iota = \sum_j \varphi^j \wedge \left(\sum_{\iota,i} g_\iota a^{ij}_\iota \mu^i_\iota \right) = \sum_j \varphi^j \wedge \hat{\mu}^j .$$

Tvrzení 3.2.14: Nechť Φ_1, Φ_2 jsou Chetaevovy síly definované na okolí *Q*. Potom se podél *Q* Φ_1 a Φ_2 shodují až na Lagrangeovy multiplikátory.

Tedy máme-li : $\Phi_1 = \sum_{i,\iota} g_\iota \varphi^i_\iota \wedge \mu^i_\iota$ a $\Phi_2 = \sum_{i,\kappa} h_\kappa \overline{\varphi}^i_\kappa \wedge \overline{\mu}^i_\kappa$ nalezneme v každém bodě $x \in Q$ takové Lagrangeovy multiplikátory, že platí $\Phi_1(x) = \hat{\Phi}_2(x)$, kde $\hat{\Phi}_2 = \sum_{i,\kappa} h_\kappa \overline{\varphi}^i_\kappa \wedge \hat{\mu}^i_\kappa$.

Důkaz: vyplývá z 3.2.13.

3.3. Mechanický systém s neholonomními vazbami

Nechť $[\alpha]$ je mechanický systém na J^1Y, E je odpovídající dynamická forma. Nechť $Q \subset J^1Y$ je vazební podvarieta zadaná rovnicemi $f^i = 0, 1 \le i \le k$, a Φ Chetaevova vazební síla příslušná *Q*, definovaná na okolí N podvariety *Q*.

Definice 3.3.1 *Deformace dynamické formy E:*
Položme:

$$E_\Phi = E - \Phi . \tag{3.3.2}$$

Dynamickou formu E_Φ nazveme *deformací dynamické formy E.*

Deformace mechanického systému $[\alpha]$*:*

$$\alpha_\Phi = \alpha - \Phi . \tag{3.3.3}$$

Relace ekvivalence pro α_Φ je zavedena jako v 3.1.5. Třída ekvivalence $[\alpha_\Phi]$ reprezentuje mechanický systém na N.

V odstavcích 3.1 a 3.2 jsme označili:

$$E = \left(A_\sigma\left(t, q^\nu, \dot{q}^\nu\right) + B_{\sigma\rho}\left(t, q^\nu, \dot{q}^\nu\right)\ddot{q}^\rho\right) \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t , \; \alpha = A_\sigma \omega^\sigma \wedge \mathrm{d}t + F_{\sigma\upsilon} \omega^\sigma \wedge \omega^\upsilon + B_{\sigma\nu} \omega^\sigma \wedge \mathrm{d}\dot{q}^\nu ,$$

$$\Phi_{\mathrm{N}} = \sum_{i=1}^k \varphi^i \wedge \mu^i = \left(\sum_{i=1}^k \mu^i_0 \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t .$$

Pro E_Φ a α_Φ dostáváme vyjádření:

$$E_\Phi = \left(A_\sigma + B_{\sigma\rho}\ddot{q}^\sigma - \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \right) \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t\,, \tag{3.3.4}$$

$$\alpha_\Phi = \left(A_\sigma - \sum_{i=1}^{k} \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \omega^\sigma \wedge \mathrm{d}t + F_{\sigma\upsilon}\,\omega^\sigma \wedge \omega^\upsilon + B_{\sigma\nu}\,\omega^\sigma \wedge \mathrm{d}\dot{q}^\nu\,. \tag{3.3.5}$$

Příslušná *deformovaná dynamická distribuce* odvozená z 3.1.6 je daná anihilátory :

$$\left(A_\sigma - \sum_{i=1}^{k} \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) \mathrm{d}t + 2F_{\sigma\upsilon}\,\omega^\upsilon + B_{\sigma\nu}\,\mathrm{d}\dot{q}^\nu,\; B_{\sigma\nu}\omega^\sigma\,. \tag{3.3.6}$$

Obdobně jako holonomní trajektorie v nevázaném případě 3.1.7 budou dynamiku deformovaného systému udávat *deformované holonomní trajektorie.*

Tvrzení 3.3.7: Řez γ variety (Y, π, X) nazveme *deformovanou holonomní trajektorií* dynamické formy E_Φ splňuje-li podmínky:

1. ekvivalentní podmínky:
   - $E_\Phi \circ J^2\gamma = 0\,,$
   - $A_\sigma + B_{\sigma\rho}\ddot{q}^\sigma = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right)$ podél $J^2\gamma\,,$ **(3.3.8)**
   - pro každé π_1-vertikální vektorové pole ξ na J^1Y je $J^1\gamma^* i_\xi \alpha_\Phi = 0\,,$
2. $f^i \circ J^1\gamma = 0\,.$ **(3.3.9)**

Důkaz: Podmínka (1) je analogií definice holonomní trajektorie nevázaného systému (viz 3.1.3). (2) pak vyjadřuje rovnice vazby a zaručuje, že $J^1\gamma(x) \in Q,\, x \in I \subset X$.

Rovnice 3.3.8 a 3.3.9 vyjadřují *deformované pohybové rovnice* příslušné mechanickému systému $[\alpha]$. Jsou tvořeny m rovnicemi druhého řádu a k rovnicemi prvního řádu pro neznámé parametrické vyjádření trajektorie $q^\sigma\gamma(t)$ a Lagrangeovy multiplikátory $\mu_0^i(t)$.

Příklad 3.3.10: rovnice (3.3.8) pro různé typy vazeb:

1) holonomní vazba: $f^i(t, q^\sigma) = 0, 1 \le i \le k:\; A_\sigma + B_{\sigma\rho}\ddot{q}^\sigma = 0\,.$
2) semiholonomní vazba: $f^i = \dfrac{\mathrm{d}u^i(t, q^\sigma)}{\mathrm{d}t}, 1 \le i \le k:\; A_\sigma + B_{\sigma\rho}\ddot{q}^\sigma = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_0^i \dfrac{\partial u^i}{\partial q^\sigma} \right).$
3) neholonomní vazba: $f^i = b_\sigma^i \dot{q}^\sigma + b^i:\; A_\sigma + B_{\sigma\rho}\ddot{q}^\sigma = \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_0^i b_\sigma^i \right).$

Nyní zavedeme popis vázaného mechanického systému pomocí mechanického systému na vazební podvarietě Q.

Nechť $[\alpha]$ je mechanický systém na J^1Y, $Q \subset J^1Y$ je vazební podvarieta, ι kanonické vložení Q do J^1Y. Označme $[\alpha_\Phi]$ deformaci mechanického systému $[\alpha]$ Chetaevovou silou Φ a položme pro $\alpha_\Phi \in [\alpha_\Phi]$ a každé $x \in Q$:

$$\alpha_Q(x)(\xi_1, \xi_2) = \alpha_\Phi(\iota(x))(\xi_1, \xi_2), \tag{3.3.11}$$

kde ξ_1, ξ_2 probíhají soubor všech vektorových polí náležejících do kanonické distribuce (byla zavedena v 3.2.8) na Q.

α_Q je tedy definováno jako $\iota^*\alpha_\Phi$ operující na vektorech kanonické distribuce. Podle 2.4.24 je α_Q 2-formou podél kanonické distribuce C. Nyní budeme hledat souřadnicové vyjádření formy α_Q.

Mějme na $U \subset Q$ dán souřadnicový systém, mějme vazební distribuci C_U (viz 3.2.5). Nechť platí na U (3.2.3), považujme čtvercovou matici $\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^j}\right)$ $1 \le i \le k,\ m-k+1 \le j \le m$ za regulární a označme a^i_j matici k ní inverzní. Z (3.2.5) máme vazební distribuci: $C^0_U = \operatorname{span}\{\varphi^i, df^i, 1 \le i \le k\}$. Pomocí a^i_j zaveďme tzv. *normální formu generátorů* C^0_U :

$$\overline{\varphi}^i = a^i_j\varphi^j = a^i_j\varphi^j_0 \mathrm{d}t + \sum_{l=1}^{m-k} a^i_j\varphi^j_l \mathrm{d}q^l + \mathrm{d}q^{m-k+i},\ \varphi^i_\sigma = \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma},\ \varphi^i_0 = f^i - \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma}\dot{q}^\sigma,$$

$$\psi^i = a^i_j \mathrm{d}f^j = a^i_j \frac{\partial f^j}{\partial t}\mathrm{d}t + a^i_j \frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma}\mathrm{d}q^\sigma + \sum_{l=1}^{m-k} a^i_j \frac{\partial f^j}{\partial \dot{q}^l}\mathrm{d}\dot{q}^l + \mathrm{d}\dot{q}^{m-k+i}. \tag{3.3.12}$$

Označíme: $\overline{\varphi}^i_0 = a^i_j\varphi^j_0$, $\overline{\varphi}^i_l = a^i_j\varphi^j_l = a^i_j\frac{\partial f^j}{\partial \dot{q}^l}$, $\psi^i_0 = a^i_j\frac{\partial f^j}{\partial t}$, $\psi^i_\sigma = a^i_j\frac{\partial f^j}{\partial q^\sigma}$. Soubor forem $\left(\mathrm{d}t, \omega^1, \ldots, \omega^{m-k}, \overline{\varphi}^1, \ldots, \overline{\varphi}^k, \mathrm{d}\dot{q}^1, \ldots, \mathrm{d}\dot{q}^{m-k}, \psi^1, \ldots, \psi^k\right)$ tvoří bázi 1-forem na U. Vyjádříme α_Φ v této bázi.

$$\omega^{m-k+i} = \overline{\varphi}^i - \left(\overline{\varphi}^i_0 + \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^i_s\dot{q}^s + \dot{q}^{m-k+i}\right)\mathrm{d}t - \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^i_s\omega^s = \overline{\varphi}^i - \sum_{j=1}^{k} a^i_j f^j \mathrm{d}t - \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^i_s\omega^s$$

$$\mathrm{d}\dot{q}^{m-k+i} = \psi^i - \left(\psi^i_0 + \psi^i_\sigma\dot{q}^\sigma\right)\mathrm{d}t - \psi^i_\sigma\omega^\sigma - \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^i_s\mathrm{d}\dot{q}^s$$

$$= \psi^i - \left(\psi^i_0 + \psi^i_\sigma\dot{q}^\sigma\right)\mathrm{d}t - \sum_{s=1}^{m-k}\psi^i_s\omega^s - \sum_{l=1}^{k}\psi^i_{m-k+l}\omega^{m-k+l} - \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^i_s\mathrm{d}\dot{q}^s =$$

$$= \psi^i - \left(\psi^i_0 + \psi^i_\sigma\dot{q}^\sigma\right)\mathrm{d}t - \sum_{s=1}^{m-k}\psi^i_s\omega^s - \sum_{l=1}^{k}\psi^i_{m-k+l}\left(\overline{\varphi}^l - \sum_{j=1}^{k}a^l_j f^j\mathrm{d}t - \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^l_s\omega^s\right) - \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^i_s\mathrm{d}\dot{q}^s =$$

$$= \psi^i - \left(\psi^i_0 + \psi^i_\sigma\dot{q}^\sigma - \sum_{j,l=1}^{k}\psi^i_{m-k+l}a^l_j f^j\right)\mathrm{d}t - \sum_{l=1}^{k}\psi^i_{m-k+l}\overline{\varphi}^l + \sum_{s=1}^{m-k}\left(\sum_{l=1}^{k}\psi^i_{m-k+l}\overline{\varphi}^l_s - \psi^i_s\right)\omega^s - \sum_{s=1}^{m-k}\overline{\varphi}^i_s\mathrm{d}\dot{q}^s \tag{3.3.13}$$

Dosazením (3.3.13) do (3.3.5) a úpravou dostáváme pro $\alpha_Q = \iota^*\alpha_\Phi$ tvar:

$$\alpha_Q = \sum_{l=1}^{m-k}\widetilde{A}_l\ \omega^l \wedge \mathrm{d}t + \sum_{l,s=1}^{m-k}\widetilde{F}_{l,s}\omega^l \wedge \omega^s + \sum_{l,s=1}^{m-k}\widetilde{B}_{l,s}\omega^l \wedge \mathrm{d}\dot{q}^s,\ \text{kde} \tag{3.3.14}$$

$$\widetilde{A}_l = \left[A_l - \sum_{p=1}^{k}A_{m-k+p}\overline{\varphi}^p_l - \sum_{s=1}^{k}\left(B_{l,m-k+s} - \sum_{j=1}^{k}B_{m-k+j,m-k+s}\overline{\varphi}^j_l\right)\left(\psi^s_0 + \psi^s_\sigma\dot{q}^\sigma\right)\right]\circ\iota.$$

$$\widetilde{F}_{ls} = \left[F_{ls} - \sum_{r=1}^{k}\overline{\varphi}^r_s\left(2F_{l,m-k+r} - \sum_{j=1}^{k}F_{m-k+j,m-k+r}\overline{\varphi}^j_l\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{k}\left(B_{l,m-k+j} - \sum_{p=1}^{k}B_{m-k+p,m-k+j}\overline{\varphi}^p_l\right)\left(\sum_{r=1}^{k}\psi^j_{m-k+r}\overline{\varphi}^r_s - \psi^j_s\right)\right]\circ\iota \tag{3.3.15}$$

$$\widetilde{B}_{ls} = \left[B_{ls} - \sum_{r=1}^{k} \left(B_{l,m-k+r} \overline{\varphi}_s^r + B_{m-k+r,s} \overline{\varphi}_l^r \right) + \sum_{r,j=1}^{k} B_{m-k+j,m-k+r} \overline{\varphi}_s^r \overline{\varphi}_l^j \right] \circ \iota$$

Tvrzení 3.3.16: Jsou-li formy α_Φ^1 a α_Φ^2 ekvivalentní, pak odpovídající 2-formy α_Q^1 a α_Q^2 jsou ekvivalentní.

Důkaz: Relace ekvivalence pro α_Q je zavedena obdobně jako pro α_Φ, tzn. α_Q^1 je ekvivalentní s α_Q^2 pokud $\alpha_Q^1 = \alpha_Q^2 + \eta$, kde η je 2-kontaktní, $\pi_{1,0}$ – horizontální 2-forma na Q (tj je tvaru $\eta = \omega^l \wedge \omega^p$, $1 \le l, p \le m-k$). Nechť α_Φ^1 a α_Φ^2 jsou ekvivalentní podle relace ekvivalence zavedené v 3.1.5 pak α_Φ^1 - α_Φ^2 je 2-kontaktní, $\pi_{1,0}$ – horizontální 2-forma na J^1Y. Srovnáním s 3.3.11 je tvrzení dokázáno.

Třída ekvivalence $[\alpha_Q]$ reprezentuje *mechanický systém na Q* a nazývá se *vazební systém* příslušný mechanickému systému $[\alpha]$ a vazbě Q.

Tvrzení 3.3.17: Řez γ variety π představuje trajektorii vázaného systému $[\alpha_Q]$ právě tehdy, je-li $J^1\gamma$ integrálním řezem kanonické distribuce *C,* a pro každé π_1-vertikální vektorové pole ξ_Q na Q je splněno

$$J^1\gamma^* i_{\xi_Q} \alpha_Q = 0, \qquad \textbf{(3.3.18)}$$

kde α_Q je 2-forma náležející do $[\alpha_Q]$.

Důkaz: Je-li $J^1\gamma$ integrálním řezem kanonické distribuce *C*, pak podle 3.2.7 je také její holonomní trajektorií, tzn. pro každé π_1-vertikální vektorové pole ξ na J^1Y platí $J^1\gamma^* i_\xi \alpha = 0$. Tato podmínka vyjádřená na Q dává 3.3.18.

Mějme adaptované fibrované souřadnice $(t, q^\sigma, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^{m-k})$ na Q. V odstavci 3.1 jsme pro systém bez vazeb dostali z 3.1.4 soubor *m* diferenciálních rovnic druhého řádu. Analogicky pro vázaný systém $[\alpha_Q]$ dostaneme soubor *m-k* diferenciálních rovnic druhého řádu a soubor *k* rovnic prvního řádu pro *m* souřadnicových funkcí $\gamma^1, \ldots, \gamma^m$ řezu γ variety π:

$$\widetilde{E}_l \circ J^2\gamma \equiv \left[\widetilde{A}_l + \sum_{s=1}^{m-k} \widetilde{B}_{ls} \ddot{q}^s \right] \circ J^2\gamma = 0, \; f^i \circ J^1\gamma = 0, \qquad \textbf{(3.3.19)}$$

kde $\widetilde{A}_l$, $\widetilde{B}_{ls}$ jsou dány vztahy 3.3.15.

Zavedeme vázanou dynamickou distribuci analogicky jako v definici 3.1.6:

Definice 3.3.20 *Vázaná dynamická distribuce* Δ_{α_Q} příslušná formě α_Q je poddistribucí kanonické distribuce C a její anihilátory jsou dány vztahem $\Delta_{\alpha_Q}^0 = \operatorname{span}\{ i_\xi \alpha_Q \}$, kde ξ probíhá množinu všech π_1-vertikálních vektorových polí na Q. Anihilátory jsou tedy tvořeny 1-formami:

$$\iota^* \varphi^i, \; \widetilde{A}_l \, dt + 2\widetilde{F}_{l,s} \, \omega^s + \widetilde{B}_{l,s} \, d\dot{q}^s, \; \widetilde{B}_{ls} \omega^s, \; 1 \le l \le m-k \, .$$

Třída ekvivalence $[\alpha_Q]$ dává vzniknout třídě $[\Delta_{\alpha_Q}]$ příslušných vázaných dynamických distribucí.

Tvrzení 3.3.21: Nechť $[\alpha_Q]$ je vázaný systém příslušný mechanickému systému $[\alpha]$ a nechť $[\Delta_{\alpha_Q}]$ je odpovídající třída ekvivalence dynamických distribucí. Nechť $V \subset Q$ je otevřená množina, následující výroky jsou ekvivalentní:

1) Vázaný systém $[\alpha_Q]$ je regulární na *V*.
2) Matice $\widetilde{B}_{ls}$ je regulární v každém bodě *V* (má hodnost *m-k*).
3) Každá z dynamických distribucí třídy $[\Delta_{\alpha_Q}]$ má rank 1 na *V*.
4) Všechny dynamické distribuce vázaného systému $[\alpha_Q]$ na *V* se shodují a jsou generovány 1-formami $\iota^* \varphi^i$, $\widetilde{A}_l \mathrm{d}t + \widetilde{B}_{ls} \mathrm{d}\dot{q}^s$, ω^l, $1 \le l \le m-k$, $1 \le i \le k$.
5) Pohybové rovnice vázaného systému mají tvar:

$$\ddot{q}^l = -\widetilde{B}^{ls} \widetilde{A}_s , \; f^i = 0 .$$

Je-li podvarieta *Q* definována rovnicemi $\dot{q}^{m-k+i} = g^i, 1 \le i \le k$ pak podle 3.2.8 prostor anihilátorů vázané kanonické distribuce je dán:

$$\mathrm{d}q^{m-k+i} - g^i \mathrm{d}t \, , \; \widetilde{A}_l \mathrm{d}t + \widetilde{B}_{l,s} \mathrm{d}\dot{q}^s , \; \omega^l , \; 1 \le l \le m-k \, .$$

Příklad 3.3.22: *Lagrangeův mechanický systém:*
Nechť $Q \subset J^1 Y$ je ideální vazba, *E* dynamická forma na $J^2 Y$. Nechť je dynamická forma *E* variační, podle 3.1 existuje lagrangián $\lambda = L dt$ tak, že $E_\sigma = \dfrac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}$.

Je-li $[\alpha]$ Lagrangeův mechanický systém pak existuje uzavřená 2-forma $\alpha_E \in [\alpha]$ ($d\alpha_E = 0$) a tedy existuje 1-forma Θ_λ taková, že $\alpha_E = d\Theta_\lambda$. Θ_λ se nazývá *Cartanova forma*. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ je Lagrangeův tehdy a jen tehdy pokud třída $[\alpha_Q]$ obsahuje uzavřenou 2-formu. 2-forma $(\alpha_E)_Q$ nemusí být uzavřená. $(\alpha_E)_Q = (d\Theta_\lambda)_Q$ je definováno podle 3.3.11:

$$(\mathrm{d}\Theta_\lambda)_Q (x)(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{d}\Theta_\lambda (\iota(x))(\xi_1, \xi_2), \qquad \textbf{(3.3.23)}$$

$x \in Q$, ξ_1, ξ_2 probíhají soubor všech vektorových polí náležejících do kanonické distribuce na *Q,* $\mathrm{d}(\mathrm{d}\Theta_\lambda)_Q \neq 0$.

Vázaný systém $[\alpha_Q]$ je dán třídou $[(\alpha_E)_Q]$ = $[(\alpha_E)_Q + \eta]$, kde η je 2-kontaktní, $\pi_{1,0}$-horizontální 2-forma na *Q* podél kanonické distribuce $\wp$.

Vázaný systém $[(\alpha_E)_Q]$ je Lagrangeův tehdy a jen tehdy když existuje 2-kontaktní, $\pi_{1,0}$-horizontální 2-forma η na *Q* podél kanonické distribuce $\wp$ tak, že platí:

$$\mathrm{d}((\alpha_E)_Q + \eta) = 0. \qquad \textbf{(3.3.24)}$$

3.4. Příklady

Tento odstavec je věnován aplikacím geometrické teorie vázaných neholonomních mechanických systémů. Zvolené příklady jsou trojího typu:

1. ukázky vlivu neholonomní vazby na trajektorii vázaných systémů se zvlášť jednoduchými pohybovými rovnicemi odpovídajícího nevázaného systému (příklady 3.4.3, 3.4.4),
2. aplikace na reálné fyzikální modely (příklady 3.4.5, 3.4.7, 3.4.8),
3. příklad 3.4.5 odhaluje problém s nejasnou fyzikální interpretací: rozdílné soubory pohybových rovnic popisující nevázaný systém vedou pro zadanou vazbu k týmž redukovaným rovnicím.

Pro přehlednost řešení některých příkladů budeme předpokládat bez újmy na obecnosti, že neholonomní vazební podmínky jsou vyjádřeny v explicitním tvaru, tj.

$$\bar{f}^i = \dot{q}^{m-k+i} - g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^l\right),\ 1 \le i \le k\,,\ 1 \le \sigma \le m\,,\ 1 \le l \le m-k\,.$$

Pak můžeme výrazy 3.3.15 pro koeficienty $\widetilde{A}_l$, $\widetilde{B}_{ls}$ přepsat do tvaru:

$$\widetilde{A}_l = \left[A_l + \sum_{p=1}^{k} A_{m-k+p} \frac{\partial g^p}{\partial \dot{q}^l} + \sum_{s=1}^{k} \left(B_{l,m-k+s} + \sum_{j=1}^{k} B_{m-k+j,m-k+s} \frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^l} \right) \left(\frac{\partial g^s}{\partial t} + \frac{\partial g^s}{\partial q^\sigma} \dot{q}^\sigma \right) \right] \circ \iota\,,$$
$$\widetilde{B}_{ls} = \left[B_{ls} + \sum_{r=1}^{k} \left(B_{l,m-k+r} \frac{\partial g^r}{\partial \dot{q}^s} + B_{m-k+r,s} \frac{\partial g^r}{\partial \dot{q}^l} \right) + \sum_{r,j=1}^{k} B_{m-k+j,m-k+r} \frac{\partial g^r}{\partial \dot{q}^s} \frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^l} \right] \circ \iota \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

Pro možnost posouzení výsledků bylo zadání příkladů 3.4.3, 3.4.4, 3.4.5, 3.4.8 převzato z prací, které používají pro formulaci mechaniky neholonomních vázaných systémů jiného formalismu (např. [4], [6]), zadání 3.4.7 je původní.

Připomeňme ve stručnosti oba typy soustav rovnic, které odpovídají mechanickému systému s neholonomní vazbou. Východiskem jsou rovnice nevázaného systému $E_\sigma \equiv A_\sigma + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0$, a rovnice vazby $f^i = 0$.

Deformované rovnice+vazební podmínky:

$$E_{\sigma,\Phi}\left(A_\sigma - \sum_{i=1}^{k} \mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} \right) + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0,\ f^i = 0\,, 1 \le i \le k\,, 1 \le \sigma, \nu \le m\,.$$

Tento soubor je soustavou (m+k) obyčejných diferenciálních rovnic (m rovnic druhého řádu a k rovnic prvého řádu) pro (m+k) neznámých funkcí $\gamma^\sigma(t)$, $\mu_0^i(t)$, $1 \le i \le k$, $1 \le \sigma \le m$.

Označme množinu řešení této soustavy $\Gamma_{1,\Phi}$, tj.

$$\Gamma_{1,\Phi} = \left\{ \left(\gamma(t), \left(\mu_0^i\right)_{i=1,\dots,k}\right) \,\middle|\, \gamma(t) \in \Gamma_U,\ E_{\sigma,\Phi} \circ J^2\gamma = 0,\ f^i \circ J^1\gamma = 0 \right\},$$

kde Γ_U je množina řezů fibrované variety (Y, π, X) definovaných na otevřené podmnožině $U \subset X$. Dále označme Γ_1 odpovídající množinu trajektorií:

$$\Gamma_1 = \left\{ \gamma(t) \in \Gamma_U \,\middle|\, \left(\gamma(t),\ \left(\mu_0^i\right)_{i=1,\dots,k}\right) \in \Gamma_{1,\Phi} \right\}.$$

Redukované rovnice:

$$\widetilde{E}_l \equiv \widetilde{A}_l + \widetilde{B}_{ls}\ddot{q}^s = 0,\ \dot{q}^{m-k+i} = g^i\left(t, q^\sigma, \dot{q}^s\right),$$

$1 \le i \le k$, $1 \le \sigma \le m$, $1 \le l, s \le m-k$.

Tento soubor je soustavou m diferenciálních rovnic ((*m-k*) rovnic druhého řádu pro (*m-k*) neznámých funkcí $\gamma^l(t)$ a k rovnic řádu prvního pro k neznámých funkcí $\gamma^{m-k+i}(t)$). Řešením této soustavy jsou trajektorie daného vázaného mechanického systému. Množinu řešení označme Γ_2, tj.

$$\Gamma_2 = \left\{ \gamma(t) = \left(\gamma^l(t), \gamma^{m-k+i}(t)\right) \in \Gamma_U \middle|\ \widetilde{\mathrm{E}}_l\left(\gamma^s(t)\right) = 0,\ \dot{q}^{m-k+i}\left(\gamma^{m-k+i}(t)\right) = g^i \right\}.$$

Oba výše uvedené systémy jsou ekvivalentní z hlediska řešení problému nalezení trajektorií vázaného systému, tj.

$$\Gamma_1 = \Gamma_2$$

Z fyzikálního hlediska je však také zajímavá vazební síla, jejíž složky jsou explicitně obsaženy pouze v deformovaných rovnicích.

Příklad 3.4.2: *(viz [1], str 5123, example 1)* :
Volná částice na R^3 podrobená neholonomní vazbě

$$E = \sum_{\sigma=1}^{3} m\ddot{q}^\sigma \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t \text{, tedy } A_\sigma = 0,\ B_{\sigma\nu} = m\delta_{\sigma\nu}.$$

A tedy $\alpha = F_{\sigma\upsilon}\omega^\sigma \wedge \omega^\nu + m\delta_{\sigma\nu}\omega^\sigma \wedge \mathrm{d}\dot{q}^\nu$.

Nechť je tento systém podroben pro $t > 0$ jedné neholonomní vazbě Q:

$$f\left(t, q^\sigma, \dot{q}^\sigma\right) \equiv t\left(\left(\dot{q}^1\right)^2 + \left(\dot{q}^2\right)^2 + \left(\dot{q}^3\right)^2\right) - 1 = 0$$

(velikost rychlosti klesá úměrně $\frac{1}{\sqrt{t}}$).

Q je vazební podvarietou (vazbou) neboť je splněno 3.2.3, rank$\left(2t\left(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3\right)\right) = 1$.

Nechť $U \subset J^1Y \equiv R \times R^3 \times R^3$ je otevřená množina takových bodů, kde $\dot{q}^3 > 0$. Mějme na U

adaptované souřadnice:

$$\left(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \bar{f}\right) \text{, kde } \bar{f} = \dot{q}^3 - g,\ g = \sqrt{\frac{1}{t} - \left(\dot{q}^1\right)^2 - \left(\dot{q}^2\right)^2}$$

je explicitní vyjádření vazby. Anihilátor rozšířené vazebné distribuce $\widetilde{C}_U$ má tvar:

$$\varphi = \underbrace{2t\dot{q}^1}_{\varphi_1}\mathrm{d}q^1 + \underbrace{2t\dot{q}^2}_{\varphi_2}\mathrm{d}q^2 + \underbrace{2t\dot{q}^3}_{\varphi_3}\mathrm{d}q^3 \underbrace{- \left(t\left(\dot{q}^1\right)^2 + t\left(\dot{q}^2\right)^2 + t\left(\dot{q}^3\right)^2\right) + 1}_{\varphi_0}\mathrm{d}t,$$

normální tvar generátorů vazebné distribuce ze vztahů 3.3.13, kde $a_j^i \equiv a = \dfrac{1}{2t\dot{q}^3}$:

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{2t\dot{q}^3}\varphi, \text{ a tedy } \overline{\varphi}_s = \frac{1}{2t\dot{q}^3}\varphi_s \;,\; \overline{\varphi}_0 = \frac{1}{2t\dot{q}^3}\varphi_0 \,,$$

$$\psi = \frac{1}{2t\dot{q}^3}\,\mathrm{d}f = \underbrace{\frac{1}{2t\dot{q}^3}\left(\left(\dot{q}^1\right)^2 + \left(\dot{q}^2\right)^2 + \left(\dot{q}^3\right)^2\right)}_{\psi_0}\mathrm{d}t \;.$$

Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný mechanickému systému $[\alpha]$ a vazbě Q reprezentuje forma:

$$\alpha_Q = \sum_{l=1,2}\widetilde{A}_l\,\omega^l \wedge \mathrm{d}t + \sum_{l,s=1,2}\widetilde{F}_{l,s}\omega^l \wedge \omega^s + \sum_{l,s=1,2}\widetilde{B}_{l,s}\omega^l \wedge \mathrm{d}\dot{q}^s, \text{ kde}$$

$$\widetilde{A}_l = \left[-\left(B_{l,3} - B_{3,3}\overline{\varphi}_l\right)\left(\psi_0 + \psi_\sigma \dot{q}^\sigma\right)\right]\circ \iota\,,$$

$$\widetilde{F}_{ls} = \left[F_{ls} - \overline{\varphi}_s\left(2F_{l,3} - F_{3,3}\overline{\varphi}_l\right) + B_{l,3} - B_{3,3}\overline{\varphi}_l\,\psi_3\overline{\varphi}_s - \psi_s\right]\circ \iota\,,$$

$$\widetilde{B}_{ls} = \left[B_{ls} - \left(B_{l,3}\overline{\varphi}_s + B_{3,s}\overline{\varphi}_l\right) + B_{3,3}\overline{\varphi}_s\,\overline{\varphi}_l\right]\circ \iota\,.$$

Dosazením z výše uvedených vztahů dostáváme:

$$\widetilde{A}_l = \left[\frac{m\dot{q}^l}{2t\left(\dot{q}^3\right)^2}\left(\left(\dot{q}^1\right)^2 + \left(\dot{q}^2\right)^2 + \left(\dot{q}^3\right)^2\right)\right]\circ \iota \;= \frac{m\dot{q}^l}{2t^2g^2}\,,$$

$$\widetilde{B}_{ls} = \left[m\left(\delta_{ls} + \frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{\left(\dot{q}^3\right)^2}\right)\right]\circ \iota \;= m\left(\delta_{ls} + \frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{g^2}\right).$$

Matice $\left(B_{ls}\right)$ je regulární na $Q \cap U$ a tedy i vázaný systém $[\alpha_Q]$ je regulární na $Q \cap U$.

Pro vázaný systém $[\alpha_Q]$ dostáváme dvě pohybové rovnice druhého řádu:

$$\widetilde{E}_l \circ J^2\gamma \equiv \left[\widetilde{A}_l + \sum_{s=1,2}\widetilde{B}_{l,s}\ddot{q}^s\right]\circ J^2\gamma = \left[\frac{m\dot{q}^l}{2t^2g^2} + \sum_{s=1,2} m\left(\delta_{ls} + \frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{g^2}\right)\ddot{q}^s\right]\circ J^2\gamma = 0$$

a jednu rovnici řádu prvního: $f \circ J^1\gamma = 0$. Po rozepsání dostáváme redukované pohybové rovnice:

$$\frac{m\dot{q}^1}{2t^2g^2} + m\left(1 + \frac{\left(\dot{q}^1\right)^2}{g^2}\right)\ddot{q}^1 + m\frac{\dot{q}^1\dot{q}^2}{g^2}\ddot{q}^2 = 0\,,$$

$$\frac{m\dot{q}^2}{2t^2g^2} + m\left(1 + \frac{\left(\dot{q}^2\right)^2}{g^2}\right)\ddot{q}^2 + m\frac{\dot{q}^1\dot{q}^2}{g^2}\ddot{q}^1 = 0\,.$$

Po úpravách dostaneme pohybové rovnice systému s vazbou:

$$\ddot{q}^1(\gamma) = -\frac{1}{2t}\dot{q}^1(\gamma),\; \ddot{q}^2(\gamma) = -\frac{1}{2t}\dot{q}^2(\gamma)\,,$$

$$\dot{q}^3(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{t} - \left(\dot{q}^1\right)^2 - \left(\dot{q}^2\right)^2}\;,$$

kde $\left(t, q^\sigma(\gamma)\right)$ je souřadnicové vyjádření řezu γ, který splňuje 3.1.3, a $\left(t, q^\sigma(\gamma), \dot{q}^\sigma(\gamma), \ddot{q}^\sigma(\gamma)\right)$ souřadnicové vyjádření jeho 2-jetového prodloužení. Řešením pohybových rovnic dostáváme:

$$q^1(\gamma) = k_1^1\sqrt{t} + k_2^1,\; q^2(\gamma) = k_1^2\sqrt{t} + k_2^2,\; q^3(\gamma) = k_1^3\sqrt{t} + k_2^3,$$

kde k_b^a jsou konstanty a platí $k_1^3 = \sqrt{4 - (k_1^1)^2 - (k_1^2)^2}$.

Chetaevova síla příslušná vazbě Q je tvaru:

$$\Phi = \mu_0 \varphi \wedge \mathrm{d}t = \Phi_\sigma \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t \;,\; \Phi_\sigma = 2\mu_0 t\dot{q}^\sigma,$$

deformované pohybové rovnice jsou tvaru: $(m\ddot{q}^\sigma - \mu_0 2t\dot{q}^\sigma) \circ J^2\gamma = 0$.

Srovnáním s metodou Lagrangeových multiplikátorů používanou při řešení vázaných systémů (viz [7], str 186) je zřejmé, že μ_0 má význam Lagrangeova multiplikátoru. Dosadíme-li do deformovaných rovnic pro $\sigma = 1,\ 2$ za Lagrangeův multiplikátor:

$$\mu_0 = \frac{m\ddot{q}^3}{2tg} = -m\frac{1 + (2\dot{q}^1\ddot{q}^1 + 2\dot{q}^2\ddot{q}^2)t^2}{4t^3g^2},$$

dostaneme redukované pohybové rovnice systému.

Ze známého řešení deformovaných pohybových rovnic uvedeného výše můžeme nyní získat Lagrangeův multiplikátor a složky Chetaevovy síly:

$$\mu_0 = -\frac{m}{4t^2}, \Phi_\sigma = -\frac{m}{4t^{3/2}}\left(k_1^1, k_1^2, \sqrt{4 - (k_1^1)^2 - (k_1^2)^2}\right).$$

Vazební síla s těmito složkami ‚zprostředkuje' vazební podmínku $t\left((\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2\right) - 1 = 0$. Je zřejmé, že vazební síla je závislá na volbě počátečních podmínek.

Po téže trajektorii jako výše řešený systém by se měl pohybovat nevázaný systém popsaný následujícími Newtonovými rovnicemi:

$$m\ddot{q}^1 + m\frac{k_1^1}{4t^{3/2}} = 0,\; m\ddot{q}^2 + m\frac{k_1^2}{4t^{3/2}} = 0,\; m\ddot{q}^3 + \frac{m}{4t^{3/2}}\sqrt{4 - (k_1^1)^2 - (k_1^2)^2} = 0,$$

řešením těchto rovnic dostáváme:

$$q^1(\gamma) = k_1^1\sqrt{t} + c^1 t + k_2^1, \qquad q^2(\gamma) = k_1^2\sqrt{t} + c^2 t + k_2^2,\; q^3(\gamma) = \sqrt{4 - (k_1^1)^2 - (k_1^2)^2}\sqrt{t} + c^3 t + k_2^3,$$

kde c^1, c^2, c^3 jsou konstanty. Má-li nevázaný systém rovnocenně nahradit systém vázaný, pak musíme dojít v obou případech ke stejnému řešení, což znamená, že musí být $c^1 = c^2 = c^3 = 0$. Docházíme tedy k závěru, že počáteční podmínky ekvivalentního nevázaného systému musí být zadány tak, aby byly kompatibilní s počátečními podmínkami původního vázaného systému.

Vraťme se ještě v předchozím příkladě k místu, kde z deformovaných pohybových rovnic vyplynuly po dosazení Lagrangeova multiplikátoru rovnice redukované. Z geometrické teorie vyplývá, že i obecně by deformované rovnice měly vést k redukovaným rovnicím příslušného vázaného systému.

Ověříme to výpočtem v souřadnicích:

Nechť je dán systém podrobený k vazbám vyjádřeným explicitně:

$$\bar{f}^i = \dot{q}^{m-k+i} - g^i(t, q^\sigma, \dot{q}^l),$$

nevázané pohybové rovnice mají tvar : $A_\sigma + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0$. Koeficienty redukovaných rovnic tohoto systému jsou $\widetilde{A}_l$, $\widetilde{B}_{ls}$.

Deformované rovnice systému: $\left(A_\sigma - \sum_{i=1}^{k}\mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) + B_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0$. Považujme tyto rovnice za nový systém nevázaných rovnic: $A'_\sigma + B'_{\sigma\nu}\ddot{q}^\nu = 0$, kde $A_\sigma - \sum_{i=1}^{k}\mu_0^i \frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^\sigma} = A'_\sigma$ $B_{\sigma\nu} = B'_{\sigma\nu}$, a nalezněme koeficienty $\widetilde{A}'_l$, $\widetilde{B}'_{ls}$ redukovaných rovnic tohoto nového systému. Z 3.4.1 je zřejmě $\widetilde{B}'_{ls} = \widetilde{B}_{ls}$,

$$\widetilde{A}'_l = A'_l + \sum_{p=1}^{k} A'_{m-k+p}\frac{\partial g^p}{\partial \dot{q}^l} + \widetilde{A}_l - \left(A_l + \sum_{p=1}^{k} A_{m-k+p}\frac{\partial g^p}{\partial \dot{q}^l}\right),\ 1 \le l \le m-k .$$

Vzhledem k explicitnímu tvaru vazby máme

$$A'_l = A_l + \sum_{i=1}^{k}\mu_0^i\frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l},\ A'_{m-k+j} = A_{m-k+j} - \mu_0^j,\ 1 \le j \le k,$$

a tedy $\widetilde{A}'_l = A_l + \sum_{i=1}^{k}\mu_0^i\frac{\partial g^i}{\partial \dot{q}^l} + \sum_{p=1}^{k}\left(A_{m-k+p} - \mu_0^p\right)\frac{\partial g^p}{\partial \dot{q}^l} + \widetilde{A}_l - \left(A_l + \sum_{p=1}^{k} A_{m-k+p}\frac{\partial g^p}{\partial \dot{q}^l}\right) = \widetilde{A}_l$.

Tento výsledek potvrzuje, že soubor nevázaných rovnic s vazební podmínkou je ekvivalentní souboru příslušných deformovaných rovnic s toutéž vazební podmínkou: oba soubory vedou k týmž redukovaným rovnicím. Z redukovaných rovnic se však vytratila informace o Chetaevově vazební síle, neboť členy s Lagrangeovými multiplikátory se při úpravě vyruší. Složky vazební síly je možné získat tedy opravdu jedině z deformovaných rovnic.

Příklad 3.4.3: *(formulace zadání viz [4], str 991, example 4.2):*
Hmotný bod s hmotností m se pohybuje v tíhovém poli Země (tíhové zrychlení $\widetilde{g}$) s konstantním kvadrátem velikosti rychlosti. Výchozí nevázaný systém je tedy Lagrangeův, tj. variační.

Fibrovaná varieta, na níž bude tento systém řešen, je totožná s varietou z předchozího příkladu($X \equiv R,\ Y \equiv R \times R^3$). Mějme dány na Y fibrované souřadnice (t, q^σ), $1 \le \sigma \le 3$.

Lagrangeova funkce na Y: $L = \frac{1}{2}m\left((\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2\right) - m\widetilde{g}q^3$.

Vazební podmínka $f \equiv (\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2 + (\dot{q}^3)^2 - c = 0$ zadává vazbu $Q \subset J^1Y$, neboť je splněno (3.2.3): $\operatorname{rank}\left(2(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3)\right) = 1 \equiv k$.

Dynamická forma: $E = \left(\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}\right)\mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t$, kde $\sigma = 1,2,3$, tedy

$$E = \left(\underbrace{-m\widetilde{g}\delta_{3\sigma}}_{A_\sigma} + \underbrace{(-m\delta_{\sigma\nu})}_{B_{\sigma\nu}}\ddot{q}^\nu\right)\mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t .$$

Lepageova forma: $\alpha = A_\sigma\omega^\sigma \wedge \mathrm{d}t + F_{\sigma\nu}\omega^\sigma \wedge \omega^\nu + B_{\sigma\nu}\omega^\sigma \wedge \mathrm{d}\dot{q}^\nu$.

Nechť $U \subset J^1Y \equiv R \times R^3 \times R^3$ je otevřená množina takových bodů, kde $\dot{q}^3 > 0$. Mějme na U adaptované souřadnice:

$$\left(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \bar{f}\right),\ \text{kde}\ \bar{f} = \dot{q}^3 - g,\ g = \sqrt{c - (\dot{q}^1)^2 - (\dot{q}^2)^2} .$$

Anihilátor rozšířené vazebné distribuce $\widetilde{C}_U$ má tvar:

$$\varphi = \underbrace{2\dot{q}^1}_{\varphi_1}\mathrm{d}q^1 + \underbrace{2\dot{q}^2}_{\varphi_2}\mathrm{d}q^2 + \underbrace{2\dot{q}^3}_{\varphi_3}\mathrm{d}q^3 \underbrace{-\left(c + \left(\dot{q}^1\right)^2 + \left(\dot{q}^2\right)^2 + \left(\dot{q}^3\right)^2\right)}_{\varphi_0}\mathrm{d}t\,,$$

normální tvar generátorů vazebné distribuce C_U ze vztahů 3.3.13, kde $a^i_j \equiv a = \dfrac{1}{2\dot{q}^3}$:

$$\overline{\varphi} = \frac{1}{2\dot{q}^3}\varphi, \text{ a tedy } \overline{\varphi}_i = \frac{1}{2\dot{q}^3}\varphi_i \;,\; \overline{\varphi}_0 = \frac{1}{2t\dot{q}^3}\varphi_0\,,$$
$$\psi_0 = 0,\;\; \psi_\sigma = 0\,.$$

Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný mechanickému systému $[\alpha]$ a vazbě Q reprezentuje forma:

$$\alpha_Q = \sum_{l=1,2}\widetilde{A}_l\;\omega^l \wedge dt + \sum_{l,s=1,2}\widetilde{F}_{l,s}\omega^l \wedge \omega^s + \sum_{l,s=1,2}\widetilde{B}_{l,s}\omega^l \wedge d\dot{q}^s, \text{ kde}$$
$$\widetilde{A}_l = \left[A_l - A_3\overline{\varphi}_l\right]\circ\iota\,,$$
$$\widetilde{B}_{ls} = \left[B_{ls} + B_{3,3}\overline{\varphi}_s\,\overline{\varphi}_l\,\right]\circ\iota\,.$$

Dosazením z výše uvedených vztahů dostáváme:

$$\widetilde{A}_l = \left[m\widetilde{g}\frac{\dot{q}^l}{\dot{q}^3}\right]\circ\iota = m\widetilde{g}\frac{\dot{q}^l}{g}\,,$$
$$\widetilde{B}_{ls} = \left[-m\left(\delta_{ls} + \frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{\left(\dot{q}^3\right)^2}\right)\right]\circ\iota \;\; = -m\left(\delta_{ls} + \frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{g^2}\right).$$

Pro vázaný systém $[\alpha_Q]$ dostáváme dvě pohybové rovnice druhého řádu:

$$\widetilde{E}_l\circ J^2\gamma \equiv \left[\widetilde{A}_l + \sum_{s=1,2}\widetilde{B}_{l,s}\ddot{q}^s\right]\circ J^2\gamma = \left[m\widetilde{g}\frac{\dot{q}^l}{g} - \sum_{s=1,2} m\left(\delta_{ls} + \frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{g^2}\right)\ddot{q}^s\right]\circ J^2\gamma = 0$$

a jednu rovnici řádu prvního: $f\circ J^1\gamma = 0$. Po rozepsání a úpravách dostneme pohybové rovnice vázaného systému:

$$\ddot{q}^1(\gamma) = \widetilde{g}\,\frac{\dot{q}^1(\gamma)\sqrt{c - \left(\dot{q}^1(\gamma)\right)^2 - \left(\dot{q}^2(\gamma)\right)^2}}{c},\;\; \ddot{q}^2(\gamma) = \widetilde{g}\,\frac{\dot{q}^2(\gamma)\sqrt{c - \left(\dot{q}^1(\gamma)\right)^2 - \left(\dot{q}^2(\gamma)\right)^2}}{c}\,,$$
$$\dot{q}^3(\gamma) = \sqrt{c - \left(\dot{q}^1(\gamma)\right)^2 - \left(\dot{q}^2(\gamma)\right)^2}\,.$$

Tento výsledek je shodný s rovnicemi, kterých bylo dosaženo metodou popsanou v [4].

Chetaevova síla příslušná vazbě Q je tvaru:

$$\Phi = \mu_0\varphi\wedge\mathrm{d}t = \Phi_\sigma\mathrm{d}q^\sigma\wedge\mathrm{d}t\;\;,\;\Phi_\sigma = 2\mu_0\left(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3\right),$$

deformované pohybové rovnice jsou tvaru:

$$\left(-m\ddot{q}^{\sigma}-m\tilde{g}\delta_{3\sigma}-\mu_0 2\dot{q}^{\sigma}\right)\circ J^2\gamma=0\,.$$

Příklad 3.4.4: *(viz [4], example 4.3, str. 992)*
Mějme totéž zadání jako v 3.4.3, ale s vazebnou podmínkou:

$$f\equiv b^2\left(\left(\dot{q}^1\right)^2+\left(\dot{q}^2\right)^2\right)-\left(\dot{q}^3\right)^2=0\,,$$

dynamická forma: $E=\left(\frac{\partial L}{\partial q^{\sigma}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\sigma}}\right)\mathrm{d}q^{\sigma}\wedge\mathrm{d}t$, kde $\sigma=1,2,3$, tedy

$$E=\left(\underbrace{-m\tilde{g}\delta_{3\sigma}}_{A_{\sigma}}+\underbrace{\left(-m\delta_{\sigma\nu}\right)}_{B_{\sigma\nu}}\ddot{q}^{\nu}\right)\mathrm{d}q^{\sigma}\wedge\mathrm{d}t\,,$$

Lepageova forma: $\alpha=A_{\sigma}\omega^{\sigma}\wedge\mathrm{d}t+F_{\sigma\nu}\omega^{\sigma}\wedge\omega^{\nu}+B_{\sigma\nu}\omega^{\sigma}\wedge\mathrm{d}\dot{q}^{\nu}\,.$

Mějme $U\subset J^1Y\equiv R\times R^3\times R^3$ a adaptované souřadnice jako výše, pak známým postupem dostáváme:

$$g=b\sqrt{\left(\dot{q}^1\right)^2+\left(\dot{q}^2\right)^2}\,,$$

$$\varphi=\underbrace{2b^2\dot{q}^1}_{\varphi_1}\mathrm{d}q^1+\underbrace{2b^2\dot{q}^2}_{\varphi_2}\mathrm{d}q^2+\underbrace{\left(-2\dot{q}^3\right)}_{\varphi_3}\mathrm{d}q^3+\underbrace{\left(-b^2\left(\dot{q}^1\right)^2-b^2\left(\dot{q}^2\right)^2+\left(\dot{q}^3\right)^2\right)}_{\varphi_0}\mathrm{d}t\,,$$

$$a^i_j\equiv a=-\frac{1}{2\dot{q}^3}\,,$$

$$\overline{\varphi}_1=-\frac{b^2\dot{q}^1}{\dot{q}^3}\;,\;\overline{\varphi}_2=-\frac{b^2\dot{q}^2}{\dot{q}^3}\;,\;\overline{\varphi}_3=1\;,\;\overline{\varphi}_0=\frac{1}{2\dot{q}^3}\left(b^2\left(\dot{q}^1\right)^2+b^2\left(\dot{q}^2\right)^2-\left(\dot{q}^3\right)^2\right),$$

$$\psi_0=0,\;\psi_{\sigma}=0\,,$$

$$\alpha_Q=\sum_{l=1,2}\tilde{A}_l\,\omega^l\wedge\mathrm{d}t+\sum_{l,s=1,2}\tilde{F}_{l,s}\omega^l\wedge\omega^s+\sum_{l,s=1,2}\tilde{B}_{l,s}\omega^l\wedge\mathrm{d}\dot{q}^s,\text{ kde}$$

$$\tilde{A}_l=\left[A_l-A_3\overline{\varphi}_l\right]\circ\iota\,,\;\tilde{B}_{ls}=\left[B_{ls}+B_{3,3}\overline{\varphi}_s\overline{\varphi}_l\right]\circ\iota\,.$$

Dosazením z výše uvedených vztahů dostáváme:

$$\tilde{A}_l=\left[m\tilde{g}\frac{b^2\dot{q}^l}{\dot{q}^3}\right]\circ\iota=-m\tilde{g}\frac{b\dot{q}^l}{\sqrt{\left(\dot{q}^1\right)^2+\left(\dot{q}^2\right)^2}}\,,$$

$$\tilde{B}_{ls}=\left[-m\left(\delta_{ls}+b^4\frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{\left(\dot{q}^3\right)^2}\right)\right]\circ\iota\;=-m\left(\delta_{ls}+b^2\frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{\left(\dot{q}^1\right)^2+\left(\dot{q}^2\right)^2}\right).$$

Pro vázaný systém $[\alpha_Q]$ dostáváme dvě pohybové rovnice druhého řádu:

$$\widetilde{E}_l \circ J^2\gamma \equiv \left[\widetilde{A}_l + \sum_{s=1,2} \widetilde{B}_{l,s}\ddot{q}^s\right] \circ J^2\gamma =$$

$$= \left[-m\widetilde{g}\frac{b\dot{q}^l}{\sqrt{\left(\dot{q}^1\right)^2 + \left(\dot{q}^2\right)^2}} - \sum_{s=1,2} m\left(\delta_{ls} + b^2\frac{\dot{q}^l\dot{q}^s}{\left(\dot{q}^1\right)^2 + \left(\dot{q}^2\right)^2}\right)\ddot{q}^s\right] \circ J^2\gamma = 0\,.$$

Po úpravách dostaneme systém pohybových rovnic:

$$\ddot{q}^1(\gamma) = -b\widetilde{g}\frac{\dot{q}^1(\gamma)}{\left(1+b^2\right)\sqrt{\left(\dot{q}^1(\gamma)\right)^2 + \left(\dot{q}^2(\gamma)\right)^2}},\ \ddot{q}^2(\gamma) = -b\widetilde{g}\frac{\dot{q}^2(\gamma)}{\left(1+b^2\right)\sqrt{\left(\dot{q}^1(\gamma)\right)^2 + \left(\dot{q}^2(\gamma)\right)^2}},$$

$$\dot{q}^3(\gamma) = b\sqrt{\left(\dot{q}^1(\gamma)\right)^2 + \left(\dot{q}^2(\gamma)\right)^2}\,.$$

Tento výsledek je shodný s rovnicemi, kterých bylo dosaženo metodou popsanou v [4].

Po derivování poslední rovnice dostáváme: $\ddot{q}^3(\gamma) = \frac{b^2}{\dot{q}^3}\left(\dot{q}^1\ddot{q}^1 + \dot{q}^2\ddot{q}^2\right)$. Dosazením ze zbylých dvou pohybových rovnic a úpravou máme: $\ddot{q}^3(\gamma) = -\frac{\widetilde{g}b^2}{1+b^2}$ a dostaneme $\dot{q}^3(\gamma) = -\frac{\widetilde{g}b^2}{1+b^2}t + k_1^3$, je tedy $\sqrt{\left(\dot{q}^1(\gamma)\right)^2 + \left(\dot{q}^2(\gamma)\right)^2} = \frac{1}{b}\left(-\frac{\widetilde{g}b^2}{1+b^2}t + k_1^3\right)$. Po dosazení z tohoto vztahu do prvních dvou pohybových rovnic je řešíme metodou separace proměnných a dostáváme:

$$q^1(\gamma) = -\tfrac{1}{2}\frac{\widetilde{g}b^2}{1+b^2}k_1^1t^2 + k_1^1k_1^3t + k_2^1,\ q^2(\gamma) = -\tfrac{1}{2}\frac{\widetilde{g}b^2}{1+b^2}k_1^2t^2 + k_1^2k_1^3t + k_2^2,$$

$$q^3(\gamma) = -\tfrac{1}{2}\frac{\widetilde{g}b^2}{1+b^2}t^2 + k_1^3t + k_2^3,$$

kde k_b^a jsou konstanty a platí $\frac{1}{b^2} = \left(k_1^1\right)^2 + \left(k_1^2\right)^2$.

Chetaevova síla příslušná vazbě Q je tvaru:

$$\Phi = \mu_0\varphi \wedge \mathrm{d}t = \Phi_\sigma \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t\ ,\ \Phi_\sigma = 2\mu_0\left(b^2\dot{q}^1, b^2\dot{q}^2, -\dot{q}^3\right),$$

deformované pohybové rovnice jsou tvaru:

$$-m\ddot{q}^1 - 2\mu_0 b^2\dot{q}^1 = 0,\ -m\ddot{q}^2 - 2\mu_0 b^2\dot{q}^2 = 0,\ -m\ddot{q}^3 - m\widetilde{g} + 2\mu_0\dot{q}^3 = 0.$$

Ze známého řešení deformovaných pohybových rovnic uvedeného výše můžeme nyní získat Lagrangeův multiplikátor a složky Chetaevovy síly:

$$\mu_0 = \frac{m\widetilde{g}}{2\left(-\widetilde{g}b^2t + k_1^3\left(1+b^2\right)\right)}, \qquad \Phi_\sigma = m\frac{\widetilde{g}}{1+b^2}\left(b^2k_1^1, b^2k_1^2, -1\right).$$

Příklad 3.4.5: *(formulace zadání viz [6], str 12, example 4.2)*
Bruslař na ledě kladoucí jednu brusli před druhou mění kontrolovaným způsobem úhel, který svírají jeho brusle. Předpokládejme, že křivost jeho trajektorie je zadanou funkcí času $s = s(t)$.

Na varietě $Y \equiv R \times R^3$ jsou dány fibrované souřadnice $\left(q^1, q^2, q^3\right)$, kde q^2 a q^3 jsou souřadnice polohy bruslaře na R^2, q^1 je úhel, který svírá směr pohybu bruslaře s přímkou $q^2 = 0$. Pro rychlost bruslaře platí $\vec{v} = v\left(\cos q^1, \sin q^1\right) = \left(\dot{q}^2, \dot{q}^3\right)$, a pro křivost trajektorie $s(t) = \frac{\left|\dot{\vec{\tau}}(t)\right|}{v}$, kde $\dot{\vec{\tau}}(t) = \left(-\sin q^1(t), \cos q^1(t)\right)\dot{q}^1$ derivace jednotkového vektoru tečny k trajektorii. Za předpokladu $\dot{q}^1 > 0$ je $s(t) = \frac{\dot{q}^1}{v}$ a tedy

$$\dot{q}^2 = v \cos q^1 = \frac{\dot{q}^1 \cos q^1}{s},\ \dot{q}^1 = v \sin q^1 = \frac{\dot{q}^1 \sin q^1}{s}.$$

Systém je tedy podroben neholonomním podmínkám:

$$\bar{f}^1 = \dot{q}^2 - g^1 = 0,\ g^1 = \frac{\dot{q}^1 \cos q^1}{s},\ \bar{f}^2 = \dot{q}^3 - g^2 = 0,\ g^2 = \frac{\dot{q}^1 \sin q^1}{s}.$$

Pro systém platí: $A_\sigma = 0$, $B_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$, kde m je hmotnost bruslaře a J jeho moment setrvačnosti vzhledem k vertikální ose vedené jeho těžištěm.

Podmínka 3.2.3 má tvar: $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial \bar{f}^i}{\partial \dot{q}^\sigma}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -\frac{\cos q^1}{s} & 1 & 0 \\ -\frac{\sin q^1}{s} & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ a tedy Q je vazební podvarietou (vazbou) dim Q=5.

Nechť $U \subset J^1 Y$ je otevřená množina takových bodů, kde $\left(\dot{q}^2\right)^2 + \left(\dot{q}^3\right)^2 \neq 0$. Mějme na U adaptované souřadnice: $\left(t, q^1, q^2, q^3, \dot{q}^1, \bar{f}^1, \bar{f}^2\right)$. Vázaný systém $[\alpha_Q]$ příslušný mechanickému systému $[\alpha]$ a vazbě Q reprezentuje forma $\alpha_Q = \tilde{A}_1\, \omega^1 \wedge \mathrm{d}t + \tilde{B}_{1,1}\, \omega^1 \wedge \mathrm{d}\dot{q}^1$, kde

$$\tilde{A}_1 = \left[\sum_{s=1,2} \sum_{j=1,2} B_{1+j,1+s} \frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^1}\left(\frac{\partial g^s}{\partial t} + \frac{\partial g^s}{\partial q^\sigma}\dot{q}^\sigma\right)\right] \circ \iota,\ \tilde{B}_{11} = \left[B_{11} + \sum_{r,j=1,2} B_{1+j,1+r} \frac{\partial g^r}{\partial \dot{q}^1}\frac{\partial g^j}{\partial \dot{q}^1}\right] \circ \iota.$$

Dosazením z výše uvedených vztahů dostáváme: $\tilde{A}_1 = m\frac{1}{s^3}\frac{ds}{dt}\dot{q}^1$, $\tilde{B}_{11} = J + \frac{m}{s^2}$.

Pro *vázaný systém* $[\alpha_Q]$ dostáváme jednu pohybovou rovnici druhého řádu:

$$\tilde{E}_1 \circ J^2\gamma \equiv \left[\tilde{A}_1 + \tilde{B}_{11}\ddot{q}^1\right] \circ J^2\gamma = \left[m\frac{1}{s^3}\frac{ds}{dt}\dot{q}^1 + \left(J + \frac{m}{s^2}\right)\ddot{q}^1\right] \circ J^2\gamma = 0$$

a dvě rovnice řádu prvního: $f^{1,2} \circ J^2\gamma = 0$. Po rozepsání a úpravách dostaneme pohybové rovnice systému s vazbou:

$$\ddot{q}^1(\gamma) = m\frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{1}{Js^2 + m}\dot{q}^1(\gamma),\ \dot{q}^2(\gamma) = \frac{\dot{q}^1(\gamma)\cos q^1(\gamma)}{s},\ \dot{q}^3(\gamma) = \frac{\dot{q}^1(\gamma)\sin q^1(\gamma)}{s}.$$

Tyto rovnice jsou ve shodě s výsledky uvedenými v [6].

Chetaevova síla příslušná vazbě Q má tvar

$$\Phi = \mu_0 \varphi \wedge \mathrm{d}t = \Phi_\sigma \mathrm{d}q^\sigma \wedge \mathrm{d}t \ , \ \Phi_\sigma = \left(-\left(\mu_0^1 \frac{\cos q^1}{s} + \mu_0^2 \frac{\sin q^1}{s} \right), \mu_0^1, \mu_0^2 \right),$$

$$\Phi = -\left(\mu_0^1 \frac{\cos q^1}{s} + \mu_0^2 \frac{\sin q^1}{s} \right) \mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}t + \mu_0^1 \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}t + \mu_0^2 \mathrm{d}q^3 \wedge \mathrm{d}t \,,$$

deformované pohybové rovnice:

$$\left(J\ddot{q}^1 + \mu_0^1 \frac{\cos q^1}{s} + \mu_0^2 \frac{\sin q^1}{s} \right) \circ J^2\gamma = 0 \,, \ \left(m\ddot{q}^2 - \mu_0^1 \right) \circ J^2\gamma = 0 \,, \ \left(m\ddot{q}^3 - \mu_0^2 \right) \circ J^2\gamma = 0 \,.$$

Zjistěme, jaká bude vazební síla v případě, že $s \equiv \dfrac{1}{R} = \text{konst.}$ Řešení má pak tvar:

$$q^1 = \omega\, t + \delta, \ q^2 = -R \sin(\omega\, t + \delta) + k^2, \ q^3 = R \cos(\omega\, t + \delta) + k^3,$$

kde ω, δ, k^2, k^3 jsou integrační konstanty. Z deformovaných pohybových rovnic dostaneme:

$$\mu_0^1 = mR\omega^2 \sin(\omega\, t + \delta), \ \mu_0^2 = -mR\omega^2 \cos(\omega\, t + \delta),$$
$$\Phi_\sigma = \left(0, mR\omega^2 \sin(\omega\, t + \delta), \ -mR\omega^2 \cos(\omega\, t + \delta)\right).$$

V tomto případě se jedná o rovnoměrný pohyb po kružnici, kde vazební silou je síla dostředivá.

Všimněme si nyní fyzikální interpretace příkladu 3.4.5, převzatého z [6]. V článku [6] jsou východiskem k řešení problému pohybové rovnice nevázaného systému, které mají tvar: $J\ddot{q}^1 = 0$, $m\ddot{q}^2 = 0$, $m\ddot{q}^3 = 0$.

Tato soustava představuje zápis první a druhé impulsové věty pro tuhé těleso rotující kolem pevné osy kolmé k rovině souřadnic q^2, q^3, na něž působí jeho okolí tak, že výslednice i výsledný moment vnějších sil jsou nulové. Takové těleso lze považovat za volný symetrický setrvačník. Omezíme-li možné pohyby tohoto setrvačníku zadanou neholonomní vazbou, dostáváme model bruslaře, který kontrolovaným způsobem projíždí zatáčku (řídí její křivost, jako funkci času) a přitom se dívá stále ve směru tečny k trajektorii.

Z fyzikálního hlediska je zřejmé, že takový systém lze popsat i jako nevázaný, ovšem na pravé straně pohybových rovnic musí vystupovat síly, resp. momenty sil, které spolu s vhodně zadanými počátečními podmínkami „zajistí“ požadovaný pohyb. Tyto síly představující reálné působení okolí na bruslaře jsou v geometrické teorii souhrnně reprezentovány Chetaevovou silou.

Řešme nyní příklad s bruslařem výhradně fyzikální metodou, tj. formulací impulzových vět, a porovnejme dosažené výsledky s výsledky geometrické teorie.

Ve skutečnosti není bruslař volným setrvačníkem, neboť na něj působí jednak v jeho těžišti tíhová síla, jednak tlaková síla a síla statického tření, jejíž působiště leží ve styčné ploše brusle s ledem. Označme výslednici posledně dvou jmenovaných sil $\vec{N}$. Dynamickou třecí sílu ve směru tečny k trajektorii zanedbáme. Síla $\vec{N}$ je kolmá k břitu brusle.

Nechť (q^2, q^3, q^4) jsou souřadnice v R^3. Souřadnice q^2, q^3 mají nezměněný význam-popisují polohu bruslaře na vodorovné rovině, q^4 je souřadnice na svislé ose, q^1 je úhel definovaný výše. Síla $\vec{N}$

má složky $(N_{q^2}, N_{q^3}, N_{q^4})$, výsledný moment síly $\vec{N}$ působící na bruslaře je $\vec{M} = (0{,}0, M_{q^4})$. Pohybové rovnice systému mají tvar:

$$J\ddot{q}^1 = M_{q^4},\ m\ddot{q}^2 = N_{q^2}, m\ddot{q}^3 = N_{q^3},\ m\ddot{q}^4 = -m\widetilde{g} + N_{q^4},$$

kde $(0{,}0, M_{q^4})$ je moment síly vzhledem k těžišti (předpoklad $M_{q^2} = M_{q^3} = 0$ vyjadřuje požadavek, aby bruslař rotoval jen kolem svislé osy). Vzhledem k podmínce $q^4 \equiv 0$ dostáváme $m\widetilde{g} = N_{q^4}$. Označme vektorem $\vec{l}$ spojnici těžiště bruslaře a bodu dotyku bruslí s ledem.

Bruslař je při zatáčení nakloněn tak, že průmět vektoru $\vec{l}$ do roviny ledu leží na přímce procházející středem oskulační kružnice po níž se bruslař v daném okamžiku pohybuje. Označme ϑ úhel, který svírá vektor $\vec{l}$ s vektorem $(0{,}0{,}-1)$, $\vec{l}$ má pak složky $\vec{l} = l(-\sin\vartheta\sin q^1,\ \sin\vartheta\cos q^1,\ -\cos\vartheta)$, kde l značí velikost vektoru $\vec{l}$. Pak je:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{l}\times\vec{N} = \\ &= l\left(m\widetilde{g}\sin\vartheta\cos q^1 + N_{q^3}\cos\vartheta,\ -N_{q^2}\cos\vartheta + m\widetilde{g}\sin\vartheta\sin q^1,\ -N_{q^3}\sin\vartheta\sin q^1 - N_{q^2}\sin\vartheta\cos q^1\right)\end{aligned}$$

Z podmínky $\vec{M} = (0{,}0, M_{q^4})$ dostaneme:

$$N_{q^3} = -\frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\cos q^1}{\cos\vartheta},\ N_{q^2} = \frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\sin q^1}{\cos\vartheta},\ M_{q^4}=0.$$

Pohybové rovnice systému dostávají tvar:

$$J\ddot{q}^1 = 0,\ m\ddot{q}^2 = \frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\sin q^1}{\cos\vartheta},\ m\ddot{q}^3 = -\frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\cos q^1}{\cos\vartheta},$$

kde ϑ je prozatím neznámý úhel náklonu bruslaře. Tuto novou soustavu lze považovat za pohybové rovnice nevázaného systému, který přidáním neholonomní vazby $\dot{q}^2 = \frac{\dot{q}^1\cos q^1}{s}, \dot{q}^3 = \frac{\dot{q}^1\sin q^1}{s}$ vede k vázanému systému ekvivalentnímu s původním. Přesvědčíme se o tom, že redukované rovnice obou systémů jsou totožné. Nyní je pro nový systém: $A'_\sigma = \left(0, -\frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\sin q^1}{\cos\vartheta}, \frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\cos q^1}{\cos\vartheta}\right)$,

$B'_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$. Je zřejmé, že $B'_{\sigma\nu} = B_{\sigma\nu}$ ale $A'_\sigma \neq A_\sigma$ a tedy $\widetilde{B}'_{11} = \widetilde{B}_{11}$ a

$$\widetilde{A}'_1 = \left[A'_1 + A'_2\frac{\partial g^1}{\partial\dot{q}^1} + A'_3\frac{\partial g^2}{\partial\dot{q}^1} + B_{22}\frac{\partial g^1}{\partial\dot{q}^1}\frac{\partial g^1}{\partial t} + B_{33}\frac{\partial g^2}{\partial\dot{q}^1}\frac{\partial g^2}{\partial t}\right]\circ\iota = \widetilde{A}_1, \text{ neboť}$$

$$A'_1 + A'_2\frac{\partial g^1}{\partial\dot{q}^1} + A'_3\frac{\partial g^2}{\partial\dot{q}^1} = -\frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\sin q^1\cos q^1}{s\cos\vartheta} + \frac{m\widetilde{g}\sin\vartheta\cos q^1\sin q^1}{s\cos\vartheta} = 0.$$

Platí-li pro dva systémy rovnic relace $B'_{\sigma\nu} = B_{\sigma\nu}$ ale $A'_\sigma \neq A_\sigma$ a jsou-li oba systémy podrobeny týmž neholonomním vazbám dostávám z 3.4.1 (*m-k*) podmínek pro to, aby redukované rovnice systémů byly totožné:

$$A_l - A'_l + \sum_{p=1}^{k} \left(A_{m-k+p} - A'_{m-k+p}\right)\frac{\partial g^p}{\partial \dot{q}^l} = 0,\ 1 \le l \le m-k. \tag{3.4.6}$$

Tyto relace, jak bylo ukázáno v příkladě 3.4.2, jsou splněny je-li čárkovaným systémem příslušný deformovaný systém. Nabízí se tedy myšlenka, že ´fyzikálně správný´ systém je systémem deformovaným vazební silou se složkami

$$\hat{\Phi}_\sigma = \left(0, \frac{m\tilde{g}\sin\vartheta\sin q^1}{\cos\vartheta}, -\frac{m\tilde{g}\sin\vartheta\cos q^1}{\cos\vartheta}\right).$$

Ve zjednodušeném případě $s \equiv \frac{1}{R} = \text{konst}$ byly složky vazební síly:

$$\Phi_\sigma = \left(0, mR\omega^2\sin(\omega\, t+\delta),\ -mR\omega^2\cos(\omega\, t+\delta)\right),$$

Mohlo by platit $mR\omega^2 = m\tilde{g}\,\text{tg}\,\vartheta$, což by odpovídalo velikosti dostředivé síly a síla vazební by mohla být silou dostředivou. Za tohoto předpokladu získáváme také podmínku pro „správný“ úhel náklonu ϑ: $\text{tg}\,\vartheta = \frac{R\omega^2}{\tilde{g}}$.

Ověřme si tuto teorii tak, že nevázáný fyzikální systém podrobíme známým neholonomním podmínkám a budeme jej řešit pomocí deformovaných rovnic. Podrobíme nevázaný systém vazbám, které splňuje sám nevázaný systém. Najdeme složky vazební síly $\overline{\Phi}_\sigma$ pro zjednodušený případ $s \equiv \frac{1}{R} = \text{konst}$.

Deformovaný fyzikální systém:

$$J\ddot{q}^1 - \overline{\Phi}_1 = 0,\ m\ddot{q}^2 - m\tilde{g}\text{tg}\vartheta\sin q^1 - \overline{\Phi}_2 = 0,\ m\ddot{q}^3 + m\tilde{g}\text{tg}\vartheta\cos q^1 - \overline{\Phi}_3 = 0,$$

kde $\overline{\Phi}_\sigma = \left(-\left(\mu_0^1\frac{\cos q^1}{s} + \mu_0^2\frac{\sin q^1}{s}\right), \mu_0^1, \mu_0^2\right)$.

Dosazením řešení systému, které je uvedeno výše, dostaneme pro tyto redukované rovnice Lagrangeovy multiplikátory tvaru:

$$\overline{\mu}_0^1 = mR\omega^2\sin(\omega\, t+\delta) - m\tilde{g}\text{tg}\vartheta\sin(\omega\, t+\delta),$$
$$\overline{\mu}_0^2 = -mR\omega^2\cos(\omega\, t+\delta) + m\tilde{g}\text{tg}\vartheta\cos(\omega\, t+\delta),$$

a odtud *složky Chetaevovy síly*

$$\Phi_\sigma = \left(0, \left(mR\omega^2 - m\tilde{g}\text{tg}\vartheta\right)\sin(\omega\, t+\delta),\ -\left(mR\omega^2 - m\tilde{g}\text{tg}\vartheta\right)\cos(\omega\, t+\delta)\right).$$

Proto, aby výchozí pohybové rovnice, které jsme získali z impulzových vět přímo vedly k požadované trajektorii bruslaře, je třeba aby $\overline{\Phi}_\sigma = 0$ a z této rovnice získáme podmínku pro úhel sklonu bruslaře $\text{tg}\,\vartheta = \frac{R\omega^2}{\tilde{g}}$ a naše výše uvedená domněnka o povaze vazební síly se potvrdila.

Příklad 3.4.7: *(zadání úlohy viz [8]):*
Dvojkužel (těleso vzniklé ‚slepením‘ podstav dvou shodných kuželů) je umístěn na rozbíhající se nakloněné kolejnice do místa, kde se kolejnice dotýkají, což je nejnižší místo kolejnic. Neuvažujeme

prokluzování kuželu. Kužel se po dvojkolejnici valí vlivem gravitační síly tak, že body dotyku dvojkužele s kolejnicí stoupají po kolejnici směrem vzhůru.

Těžiště dvojkužele se pohybuje (klesá) po přímce. Zvolme za osu X tuto přímku s počátkem v bodě styku kolejnic. Označme 2β úhel, který svírají kolejnice, ψ úhel který svírá X s osou úhlu rozbíhajících se kolejnic, φ úhel, který svírá osa X s vodorovnou rovinou. Dále označme T velikost dvou sil statického tření, které zabraňují prokluzu dvojkužele na kolejnicích, R poloměr podstavy dvojkužele, J moment setrvačnosti dvojkužele vzhledem k ose procházející těžištěm, M hmotnost dvojkužele, $\tilde{g}$ tíhové zrychlení. Celkový úhel otočení dvojkužele označíme q^1.

Soustava má dva stupně volnosti, za jednu souřadnici zvolíme otočení q^1 a souřadnicí q^2 bude poloha těžiště na ose X. Systém je vázán neholonomní podmínkou (viz [8]): $\dot{q}^2 - R\dot{q}^1 \cos\psi \; e^{-q^1 \sin\psi} = 0$, kde $R\dot{q}^1 \cos\psi \; e^{-q^1 \sin\psi} = g^1$. Pohybové rovnice nevázaného systému mají (viz [8]) tvar:

$$\underbrace{J\cos\psi}_{B_{11}} \; \ddot{q}^1 \underbrace{- 2TR\cos\beta\cos^2\psi \; e^{-q^1 \sin\psi}}_{A_1} = 0\,,$$
$$\underbrace{M}_{B_{22}}\ddot{q}^2 + \underbrace{2T\cos\beta\cos\psi - M\tilde{g}\sin\varphi}_{A_2} = 0\,.$$

Chetaevova síla je tvaru : $\Phi = \mu_0\left(-R\cos\psi \; e^{-q^1 \sin\psi}\right)\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}t + \mu_0 \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}t\,,$

deformované pohybové rovnice:

$$J\cos\psi \; \ddot{q}^1 - 2TR\cos\beta\cos^2\psi \; e^{-q^1 \sin\psi} - R\mu_0\cos\psi \; e^{-q^1 \sin\psi} = 0\,,$$
$$M\ddot{q}^2 + 2T\cos\beta\cos\psi - M\tilde{g}\sin\varphi - \mu_0 = 0\,.$$

Ze vztahů 3.4.1 dostáváme:

$$\widetilde{A}_1 = \left[A_1 + A_2\frac{\partial g^1}{\partial \dot{q}^1} + B_{22}\frac{\partial g^1}{\partial \dot{q}^1}\frac{\partial g^1}{\partial q^\sigma}\dot{q}^\sigma\right]\circ\iota \;=$$
$$= -MRg\sin\varphi\cos\psi \; e^{-q^1 \sin\psi} - MR^2\left(\dot{q}^1\right)^2\cos^2\psi\sin\psi \; e^{-2q^1 \sin\psi}\,,$$
$$\widetilde{B}_{11} = \left[B_{11} + \sum_{r,j=1}^{k} B_{22}\left(\frac{\partial g^1}{\partial \dot{q}^1}\right)^2\right]\circ\iota \; = \cos\psi\left(J + MR^2\cos\psi \; e^{-2q^1 \sin\psi}\right).$$

Pro *vázaný systém* $[\alpha_Q]$ dostáváme jednu pohybovou rovnici druhého řádu:

$$\widetilde{E}_1 \circ J^2\gamma \equiv \left(\widetilde{A}_1 + \widetilde{B}_{11}\ddot{q}^1\right)\circ J^2\gamma = 0\,,$$
$$-MRg\sin\varphi\cos\psi \; e^{-q^1 \sin\psi} - MR^2\left(\dot{q}^1\right)^2\cos^2\psi\sin\psi \; e^{-2q^1 \sin\psi} +$$
$$+\cos\psi\left(J + MR^2\cos\psi \; e^{-2q^1 \sin\psi}\right)\ddot{q}^1 = 0.$$

Tento výsledek se shoduje s výsledkem dosaženým v [8] .

Příklad 3.4.8: *Pohyb v odporujícím prostředí v tíhovém poli Země:*
Pohybové rovnice částice o hmotnosti m pohybující se v tíhovém poli Země (tíhové zrychlení $\tilde{g}$) v odporujícím prostředí mají při volbě Stokesova modelu pro vyjádření odporu prostředí

v dvojrozměrném prostoru ($Y = R^2 \times R$) tvar $m\ddot{x} + b\dot{x} = 0$, $m\ddot{y} + b\dot{y} - m\tilde{g} = 0$, kde b je konstanta. Tento systém není variační. Označme: $\dot{q}^1 \equiv \dot{x}$, $\dot{q}^2 \equiv \dot{y} - \frac{m\tilde{g}}{b}$, rovnice přejdou na tvar:

$$m\ddot{q}^1 + b\dot{q}^1 = 0,\; m\ddot{q}^2 + b\dot{q}^2 = 0.$$

Pokud podrobíme systém neholonomní vazbě $\bar{f} \equiv \dot{q}^2 - \sqrt{1-\left(\dot{q}^1\right)^2} = 0$, pak je systém na vazebné podvarietě Q volný, tj. jeho redukovaná rovnice je tvaru : $m\ddot{q}^1 = 0$. A dostáváme:

$$q^1 = k_1^1 t + k_2^1,\; \dot{q}^2 = \sqrt{1-\left(k_1^1\right)^2}.$$

Chetaevova síla je tvaru:

$$\Phi = \mu_0\left(\frac{\dot{q}^1}{\sqrt{1-\left(\dot{q}^1\right)^2}}\mathrm{d}q^1 \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}q^2 \wedge \mathrm{d}t\right), \Phi_\sigma = \left(\mu_0 \frac{\dot{q}^1}{\sqrt{1-\left(\dot{q}^1\right)^2}}, \mu_0\right),$$

deformované pohybové rovnice:

$$m\ddot{q}^1 + \dot{q}^1\left(b - \mu_0 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dot{q}^1\right)^2}}\right) = 0,\; m\ddot{q}^2 + b\dot{q}^2 - \mu_0 = 0.$$

Lagrangeův multiplikátor, složky Chetaevovy síly:

$$\mu_0 = b\sqrt{1-\left(k_1^1\right)^2},\; \Phi_\sigma = \left(bk_1^1, b\sqrt{1-\left(k_1^1\right)^2}\right).$$

Protože k_1^1, $\sqrt{1-\left(k_1^1\right)^2}$ mají význam složek vektoru rychlosti ve směru os q^1 a q^2, má Chetaevova vazební síla význam síly kompenzující odpor prostředí a tíhovou sílu.

Řešení vázaného systému má při vhodné volbě počátečních podmínek tvar:

$$x = k_1^1 t,\; y = \left(\sqrt{1-\left(k_1^1\right)^2} + \frac{m\tilde{g}}{b}\right)t.$$

Vázaný systém je na podvarietě Q volný, oproti systému q^1, q^2 se ale změnila složka rychlosti ve směru osy y o člen $\frac{m\tilde{g}}{b}$ reprezentující přítomnost tíhové síly. Aby bylo možné u částice pohybující se v odporujícím prostředí v tíhovém poli $\tilde{g}$ zajistit splnění zadané neholonomní vazby, je třeba kromě působení Chetaevovy síly zajistit ještě splnění počátečních podmínek tvaru: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, kde v_0 je libovolné, $\dot{y}(0) = \sqrt{1-\left(v_0\right)^2} + \frac{m\tilde{g}}{b}$.

4. Závěr

Cílem práce bylo prezentovat geometrickou teorii mechanických systémů s neholonomními vazbami na fibrovaných, aplikovat teoretické výsledky na fyzikální příklady a posoudit správnost dosažených výsledků.

Při studiu teorie byla též diskutována analogie s klasickou metodou Lagrangeových multiplikátorů (viz [7]). Soustava deformovaných rovnic vázaného mechanického systému společně s rovnicemi vazeb odvozená v rámci geometrické teorie je totožná se soustavou, kterou bychom získali pomocí klasické metody. Podmínka geometrické teorie pro tzv. ideální vazbu vyjadřuje splnění principu virtuální práce pro vazební síly, což také požaduje metoda Lagrangeových multiplikátorů při definici mechanického systému.

Geometrickou metodou je však klasická metoda multiplikátorů překonána, ve smyslu zjednodušení postupu při získání výsledných pohybových rovnic, neboť jsme získali popis vázaného systému definovaného na prvním jetovém prodloužení fibrované variety pomocí systému zadaného na tzv. vazební podvarietě původního prostoru, který lze považovat za nevázaný. Získali jsme redukované rovnice popisující tento nový, nevázaný systém, doplněné původními vazbami. Jejich řešením, jak jsem ukázala na příkladech v odstavci 3.4, získáváme trajektorie těles původního vázaného mechanického systému. Z redukovaných rovnic se ale vyloučením Lagrangeových multiplikátorů vytratí informace o vazební síle, která je z fyzikálního hlediska rovněž zajímavá. Protože soustava deformovaných rovnic a vazebních podmínek popisuje tentýž mechanický systém jako soubor redukovaných rovnic, musí se jejich řešení shodovat. Dosazením řešení redukovaných rovnic do rovnic deformovaných můžeme tedy vazební sílu určit

Původní převzaté zadání příkladu 3.4.5 není v rozporu s fyzikální představou, podle níž by v zadání měly figurovat síly, kterými led působí na břit brusle. Formulací a řešením fyzikálního zadání jsem však dospěla ke zjištění, že obě zadání vedou k týmž redukovaným pohybovým rovnicím. Deformované rovnice obou systémů se ale lišily. Zatímco nevázané rovnice fyzikálního zadání už samy o sobě představovaly rovnice deformované, nevázané rovnice odpovídající zadání převzatého z [6] byly deformovány nenulovou vazební silou. Pro zjednodušený případ zadání příkladu 3.4.5, kde se jednalo o rovnoměrný pohyb po kružnici byla vazební silou deformující nevázaný systém síla dostředivá, kterou zprostředkoval led působící na břit brusle. Srovnáním tvaru vazební síly odvozené ze silového působení ledu s tvarem vazební síly odvozené z vazebních podmínek zjišťujeme, že v případě použití původního zadání se ztrácí informace o konkrétním tvaru síly, kterou působí led na břit a zůstává pouze informace, že jde o sílu dostředivou. Tento fakt nemá samozřejmě na výsledný tvar redukovaných rovnic vliv.

Otázkou ale zůstává, jestli by relace 3.4.6 mohly být splněny i pro dva systémy rovnic, které nemají vztah nevázaných rovnic a příslušných rovnic redukovaných. Takové rovnice jsem ve své práci ale nehledala.

Řešením ostatních příkladů se potvrdila správnost odvozeného tvaru redukovaných rovnic, neboť bylo provedeno srovnání výsledků s výsledky dosaženými jinou metodou.

Moje práce by mohla sloužit jako úvodní text do problematiky geometrického popisu mechanických systémů s neholonomními vazbami i pro poměrně „nezasvěcené“ čtenáře, neboť definicím a vlastnostem základních geometrických objektů je věnována poměrně podrobná pasáž, která předpokládá pouze elementární matematické znalosti.

5. Seznam použité literatury

[1] O. KRUPKOVÁ, Mechanical Systems with nonholonomic constraints, J. Math. Phys. 38 (1997), 5098-5138

[2] O. KRUPKOVÁ, The Geometry of Ordinary Variational Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1997)

[3] A. IBORT, M. de LEÓN, G. MARMO, D. M. de DIEGO, Non-holonomic constrained systems as implicit differential equation, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Vol 54, 3 (1996), 295-317

[4] M. de LEÓN, J. C. MARRERO, D. M. de DIEGO, Mechanical systems with nonlinear constraints, International Journal of Theoretical Physics, Vol 36, No. 4 (1997), 979-995

[5] O. KRUPKOVÁ, J. MUSILOVÁ, The relativistic particle as a mechanical system with non-holonomic constraints, J. Phys. A.: Math. Gen. 34 (2001), 3859-3875

[6] CH. M. MARLE, Geometry of mechanical systems with active and kinematic constraints, Univers. P. et M. Curie, preprint 1998

[7] M. BRDIČKA, A. HLADÍK, Teoretická mechanika, Academia Praha (1987)

[8] J.BARTOŠ, Interpretační problémy demonstračních experimentů, diplomová práce, Masarykova univerzita 2002

[9] A.M.VERSHIK, L.D. FADDEEV, Differential geometry and Lagrangian mechanics with constraints, sov. Phys. Dokl., 17(1972), 34-36,

[10] O. KRUPKOVÁ, A Geometric Theory of Variational Ordinary Differential Equations, Preprint, Silesian University, Opava, 1993, 89 pp; Thesis, Silesian University, Opava, 1995, 165 pp