Konzultační cvičení
Mechanika F1030

24. září 2021

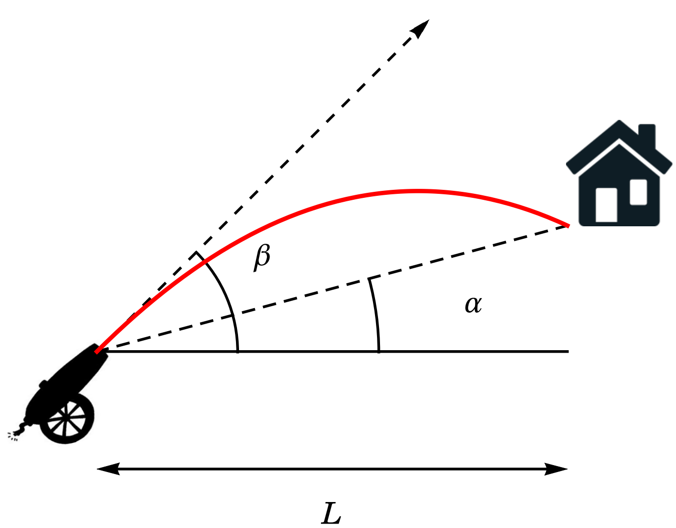
Michael Krbek

Pokyny pro písemné vypracování úloh

Pište čitelně a jasně. Prostě tak, aby řešení byli schopni pochopit Vaše kamarádky, kamarádi a zejména opravovatelé a konzultanti, kteří rozhodují o tom, zda bude řešení přijato. Součástí vypracovaného řešení by měl být diagram, graf a/nebo obrázek. Každý musí vypracovat vlastní řešení, zejména od ostatních ani odjinud řešení neopisujte ani svá řešení nikomu neposkytujte. Řešení vždy vypracujte nejprve obecně, tj. uveďte výpočet, jenž obsahuje proměnné. Případné zadané číselné hodnoty dosazujte až na závěr. Příklady označené ⋆ jsou náročnější a jejich vypracování není povinné, je však doporučené pro hlubší pochopení problematiky.

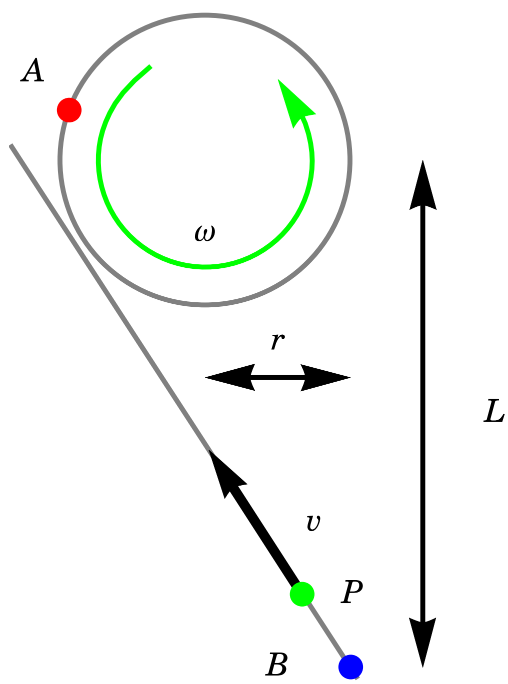
K odevzdání do 15.10.

Příklad 1. Střelba na cíl. Dělo stojící na kopci má zasáhnout cíl na vedlejším kopci. Z místa, kde se nachází dělo, je cíl vidět pod úhlem α, projektil z děla je vystřelen pod úhlem β. Úhly měříme vzhledem k vodorovné rovině. Vodorovná vzdálenost mezi dělem a cílem je L. Jaká musí být velikost úsťové rychlosti projektilu, aby byl zasažen cíl? Odpor vzduchu proti pohybu projektilu zanedbejte.



Příklad 2. Záchrana ve vesmíru. Uvažte následující situaci ve vesmírném prostoru. Astronautka Alice se nachází na obvodu kosmické lodi tvaru válce, který rovnoměrně rotuje kolem své osy symetrie. Astronaut Bob a jeho kosmická loď jsou v klidu vzhledem ke středu hmotnosti kosmické lodi Alice a soustava spojená s Bobem a jeho lodí je inerciální. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že Alice A a Bob B se nachází ve společné rovině kolmé k ose rotace kosmické lodi, na níž se nachází Alice. Situace je znázorněna schematicky na obrázku níže. Známe poloměr R a velikost úhlové rychlosti ω lodi Alice a vzdálenost L. Bob potřebuje Alici poslat nádobu s palivem P tak, aby ji Alice mohla zachytit. Kdy, kam a jakou rychlostí má Bob nádobu vyslat, aby Alice mohla nádobu zachytit s co nejmenším možným úsilím? Jak by se dalo zamezit dramatu, které můžeme shlédnout zde

`https://www.youtube.com/watch?v=XXpcVsBotW4?`



Příklad 3. Kolo železničního vagónu. Železniční vagón se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti v. Kolo železničního vagónu má vnitřní poloměr R větší než vnější poloměr r. Kolo na kolejnici neprokluzuje. Popište pohyb bodu P na vnitřním obvodu kola

(a) v soustavě K spojené s kolem,

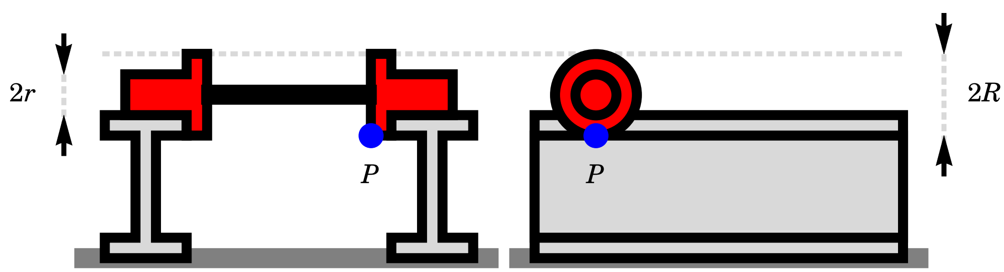
(b) v soustavě V spojené s vagónem,

(c) v soustavě Z spojené se Zemí.

Pro (a), (b) a (c) napište rychlost, zrychlení, tečné a normálové zrychlení bodu P v zadaných soustavách.

(d) Napište vztahy pro přechod od soustavy K k soustavám V a Z a naopak.

(e) Rozhodněte, které ze soustav K, V a Z lépe či hůře vyhovují požadavkům inerciálnosti a proč.



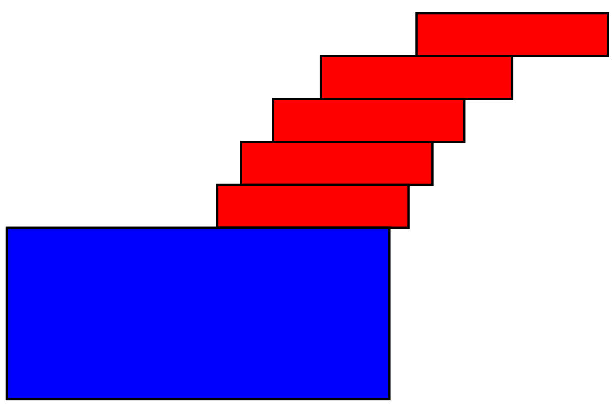
Příklad 4. Vliv odporu prostředí při volném pádu.⋆ Za jistých podmínek je odporová síla při pohybu tělesa prostředím dána výrazem

$$\mathbf{F}_O = -\tfrac{1}{2}\rho C S \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Zde ρ je hustota prostředí, C je aerodynamický koeficient, S je plocha kolmého průmětu tělesa do roviny kolmé ke směru pohybu a $\mathrm{d}\mathbf{r}(t)/\mathrm{d}t$ je rychlost tělesa. Popište volný pád tělesa v homogenním gravitačním poli Země z výšky H s uvážením odporu prostředí daného výše uvedeným silovým zákonem. Za jak dlouho a jakou rychlostí dopadne těleso na Zem? Srovnejte s výpočtem, který odpor prostředí zanedbává. Jakou rychlostí a za jak dlouho dopadne na Zem člověk/mravenec při volném pádu z osmipatrové budovy?

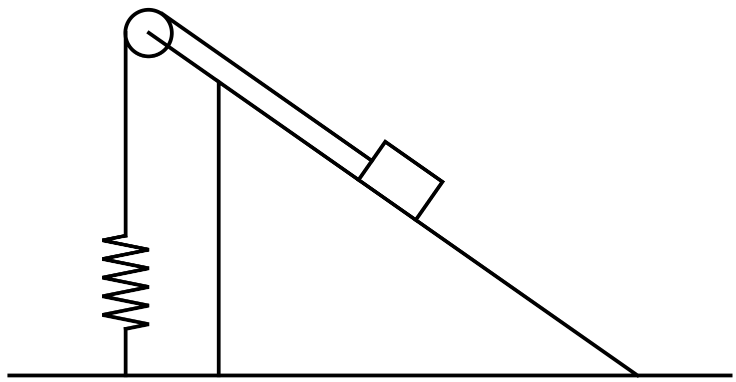
K odevzdání do 12.11.

Příklad 5. Stavba z cihel. Stejné homogenní cihly délky L jsou skládány na sebe tak, že každá následující o něco přesahuje níže položenou. Nalezněte maximální délky přesahů cihel a_1, a_2, $\ldots a_n$ a celkový přesah A, při kterých stavba ještě zůstane v rovnováze. Rozměr běžné cihly je $29 \times 14 \times 6{,}5$ cm. Kolik cihel je nejméně potřeba pro dosažení přesahu 1 m? Jakou by měla taková stavba výšku? Viz obrázek níže, kde je znázorněno řešení pro $n = 5$ cihel.



Příklad 6. Drsné kvádry. Kvádr o hmotnosti M_1 leží na kvádru o hmotnosti M_2, který leží na vodorovném stole. Na horní kvádr začne působit konstantní vodorovná síla o velikosti F. Určete zrychlení kvádrů vzhledem k podložce pro různé vlastnosti rozhraní. Koeficient statického resp. dynamického tření rozhraní mezi kvádry je σ_1 resp. μ_1, koeficient statického resp. dynamického tření rozhraní mezi dolním kvádrem a stolem je σ_2 resp. μ_2.

Příklad 7. Kmitající kostka. Na dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu α je umístěna kostka o hmotnosti m, která je nehmotným nepružným provazem přes nehmotnou kladku spojena s pružinou o tuhosti k. V počátečním okamžiku uvolníme kostku při napjatém lanku ze stavu, kdy pružina není napnuta. Vyjádřete polohu kostky v závislosti na čase.



Příklad 8. Lano na centrifuze. $\star$ Lano o hmotnosti M a délce L je upevněno na jednom konci a rovnoměrně se kolem něj otáčí úhlovou rychlostí o velikosti ω. Zanedbejte gravitaci, aby se lano otáčelo ve vodorovné rovině. Určete napětí lana ve vzdálenosti r od osy rotace.

K odevzdání do 10.12.

Příklad 9. Stoupající provaz. Lano, jehož jedna délková jednotka má hmotnost λ jednotek hmotnosti je stočeno na hladkém vodorovném stole. Jeden konec lana zvedáme nahoru konstantní rychlostí o velikosti v.

(a) Nalezněte sílu, kterou je nutno působit na horním konci lana v závislosti na výšce horního konce lana od roviny stolu.

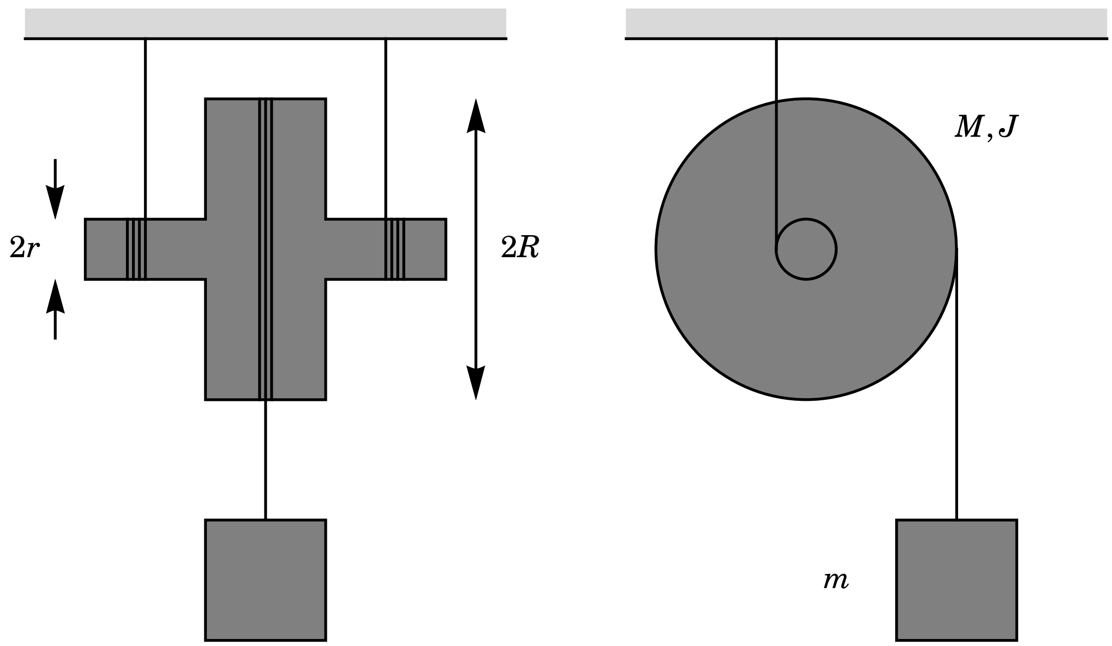
(b) Srovnejte výkon této síly s časovou změnou celkové mechanické energie soustavy a vysvětlete případný rozdíl.

Příklad 10. Krychle. Krychle o hmotnosti m a hraně délky a z homogenního materiálu stojí v nestabilní rovnovážné poloze na jedné ze svých hran na vodorovné podložce. Vypočítejte úhlovou rychlost krychle při dopadu stěnou na podložku za předpokladu,

(a) že hrana je upevněna na podložce a kostka se může volně otáčet,

(b) že hrana volně klouže po dokonale hladké podložce.

Příklad 11. Hmotný kotouč a závaží. Homogenní symetrický kotouč na obrázku o hmotnosti M a momentu setrvačnosti vzhledem k ose symetrie J je zavěšen ze stropu na nehmotných nitích. Z kotouče na nehmotné niti visí těleso o hmotnosti m. Kotouč a těleso uvolníme z klidu. Vypočítejte úhlové zrychlení kotouče, zrychlení středu hmotnosti kotouče a tělesa za předpokladu, že pohyb středu hmotnosti kotouče i tělesa se děje ve svislém směru. Nárys a bokorys soustavy je níže.



Příklad 12. Kladkostroj. ⋆ Tělesa o hmotnostech M_1, M_2 a m na obrázku níže jsou přes nehmotné kladky nehmotným nepružným lankem. Vodorovné stoly jsou dokonale hladké. Vypočtěte zrychlení všech tří těles.