Náhradní příklady k zápočtu z termodynamiky a statistické fyziky

1. Spočtěte křivkové integrály $\int y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, $\int y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$ z bodu $(0,0)$ do bodu $(1,1)$ po obloucích kružnic $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

2. Najděte funkci $F(x,y)$ pro niž platí $\mathrm{d}F = (x^2 - y^2)\mathrm{d}x + (5 - 2xy)\mathrm{d}y$.

3. Spočtěte rozložení hustoty v atmosféře tvořené ideálním plynem nacházející se v homogenním gravitačním poli za předpokladu, že atmosféra je izotermická.

4. Dané množství vzduchu má při teplotě 0°C objem $27\,\mathrm{m}^3$ a hustotu $0,00129\,\mathrm{g\,cm}^{-3}$. Spočtěte množství tepla potřebného pro ohřátí vzduchu na teplotu 20°C (měrná tepelná kapacita vzduchu při konstantním objemu na jednotku hmotnosti je $c_\mathrm{V} = 710\,\mathrm{J\,kg}^{-1}$), jestliže ohřev probáhá a) při konstantním objemu, b) při konstantním tlaku. Koeficient adiabaty vzduchu $\kappa = 1,41$.

5. Při změně souřadnice a vykoná systém popsaný stavovou rovnicí $f(T,a,A)$ práci $\delta W = A\mathrm{d}a$. Spočtěte rozdíl tepelných kapacit $c_A - c_a$.

6. Dokažte následující vztahy:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V.$$

7. Van der Waalsova stavová rovnice pro 1 mol plynu má tvar $(p+\frac{a}{V^2})(V-b) = RT$, kde a, b jsou konstanty. Spočtěte energii van der Waalsova plynu za předpokladu, že c_V nezávisí na teplotě. Ukažte, že rovnice adiabaty má tvar $T(V-b)^{\kappa-1}$ =konst., $(p+\frac{a}{V^2})(V-b)^{\kappa}$ =konst., kde $\kappa = (c_V + R)/c_V$.

8. Ověřte platnost relace

$$T\,\mathrm{d}S = c_p\,\mathrm{d}T - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}p.$$

9. Spočtěte růst entropie ideálního plynu při jeho ohřevu z teploty T_1 na T_2 a) při konstantním tlaku, b) při konstantním objemu. Ukažte, že v prvním případě je nárůst entropie κ-násobně větší. Předpokládejte, že c_V nezávisí na teplotě.

10. Energie plynu je určena vztahem $E = (\frac{3}{4}S)^{4/3}(\sigma V)^{-1/3}$, kde S je jeho entropie a V objem, σ je konstanta. Určete jeho stavovou rovnici.

11. Ukažte, že při procesech při kterých je teplota a objem látky konstantní spěje při přechodu k rovnováze k minimu volná energie.

12. Plyn se skládá z N stejných částic. Ukažte, že pro kvazistatické procesy platí

$$\left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{T,V} - \mu = -T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N}.$$

13. Koeficient izotermické kompresibility je roven $\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$, koeficient adiabatické kompresibility je roven $\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$. Ukažte, že jsou si tyto koeficienty rovny pokud je roztažnost látky nulová, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0$.

14. Uvažujte Carnotův cyklus, který probíhá s fotonovým plynem. Hustota energie fotonového plynu $u = aT^4$, jeho tlak $p = \frac{1}{3}u$, kde a je konstanta. Přímým výpočtem spočtěte účinnost tohoto tepelného stroje.

15. Spočtěte fluktuaci energie částice $\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle$ Maxwellova-Boltzmannova plynu.

16. Spočtěte hustotu stavů $\rho(E)$ extrémně relativistického plynu, pro který je energie svázána s hybností vztahem $E = cp$.

17. Energie n-tého stavu kvantového harmonického oscilátoru je $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Spočtěte jeho entropii S a ověřte, že splňuje 3. větu termodynamickou.

18. Pomocí Landauova potenciálu ideálního fermionového plynu

$$\Omega = -kT\frac{gV}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{5}{2}}\left(\frac{\mu}{kT}\right)$$

odvoďte stavovou rovnici tohoto plynu $p = p(T, V, N)$ v případě, že můžeme předpokládat $F_n\left(\frac{\mu}{kT}\right) \approx \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)$ (klasická aproximace).