Kapitola 16

Lineární algebra počtvrté — hrátky s operátory a maticemi

Možná si leckterý čtenář řekne, že lineární algebry už bylo dost. Jenže lineární algebry není nikdy dost, zejména pro praktické aplikace. Z předchozích algebraických kapitol, první v prvém dílu, čtvrté a šesté v druhém dílu, víme ledacos o maticích, víme ledacos o lineárních operátorech ve vektorových prostorech, ale také o jejich souvislosti. Víme, že lineární operátor je v pevně zvolené bázi vektorového prostoru V_n nad polem reálných nebo komplexních čísel, resp. v bázi vektorového prostoru se skalárním součinem (unitárního U_n nad polem komplexních čísel či euklidovského E_n nad polem reálných čísel) reprezentován čtvercovou maticí n-tého řádu osazenou komplexními, resp. reálnými čísly. Zatímco však operátor je objektem invariantním (říkáme také *geometrickým*), je reprezentující matice závislá na volbě báze. Matice A a $\bar{A}$ reprezentující týž lineární operátor v různých bázích $(e_1, \ldots, e_n)$ a $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ vektorového prostoru mají mezi sebou úzký vztah. Jsou vázány *podobnostní transformací* $\bar{A} = TAT^{-1}$, kde T je (regulární) matice přechodu od báze $(e_1, \ldots, e_n)$ k bázi $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$. (Přesvědčili jsme se o tom v odstavci 4.2.2 v druhém dílu.) V kapitolách 4 a 6 jsme se pak zabývali otázkou, za jakých podmínek lze daný lineární operátor reprezentovat nejjednodušším možným způsobem — diagonální maticí. Zjistili jsme, že tato reprezentace odpovídá bázi tvořené vlastními vektory operátoru. Také jsme zjistili, že taková báze vždy existuje pro speciální typy operátorů v unitárních, resp. euklidovských prostorech, konkrétně pro operátory unitární a samoadjungované (v U_n), resp. ortogonální (mají-li pouze reálné vlastní hodnoty) a symetrické (v E_n). Obecně však není vždy možné sestavit z vlastních vektorů bázi — někdy je prostě nezávislých vlastních vektorů málo. V této kapitole se budeme zabývat problémem reprezentace lineárního operátoru z obecnějšího hlediska než doposud. Dokonce připustíme, že vektorový prostor V_n, v němž naše operátory působí, není obecně vybaven skalárním součinem.

16.1 Co dělat, když operátor nemá diagonální reprezentaci

Pokud nelze z vlastních vektorů lineárního operátoru sestavit ve vektorovém prostoru bázi, nelze operátor reprezentovat diagonální maticí (s takovými příklady jsme se v odstavci 4.3, věnovaném vlastním vektorů, setkali, třeba v příkladu 4.50). Otázkou je, zda přece jen neexistuje nějaká jednoduchá reprezentace operátoru, i když to nebude reprezentace diagonální. Lineární algebra má na tuto otázku kladnou odpověď: jednou z možností je reprezentovat lineární operátor tzv. *Jordanovou maticí*, která je, dalo by se říci, „skoro“ diagonální. Je to horní trojúhelníková matice, navíc natolik speciální, že identicky není nulová pouze hlavní diagonála a vedlejší diagonála nad ní, v níž však jsou jen jedničky, nebo nuly. Důležité je, že jedná-li se o lineární operátory ve vektorovém prostoru nad **C**, existuje taková reprezentace vždy, ve vektorovém prostoru nad **R** tehdy, má-li charakteristický polynom operátoru pouze reálné kořeny. Vše postupně definujeme a dokážeme.

16.1.1 Podobnost matic a Jordanovy matice

I když o podobných maticích již leccos víme, zrekapitulujeme definici podobnosti a základní vlastnosti podobných matic. Jestliže totiž všechny navzájem podobné matice n-tého řádu reprezentují jediný *geometrický objekt*, jímž je lineární operátor ve vektorovém prostoru dimenze n, lze očekávat, že budou mít některé charakteristické vlastnosti shodné.

Označme $\mathcal{M}(n/n)$ množinu čtvercových matic řádu n nad polem komplexních, resp. reálných čísel. (Obecně budeme uvažovat o maticích nad polem komplexních čísel, omezení na speciální případ, jímž je pole čísel reálných, vždy explicitně zmíníme.) Víme, že tato množina s operací sčítání a násobení matic je (nekomutativním) okruhem, s operacemi sčítání matic a násobení matice komplexními, resp. reálnými čísly je vektorovým prostorem dimenze n^2 nad **C**, resp. nad **R**.

Matice $A, \bar{A} \in \mathcal{M}(n/n)$, se nazývají *podobné*, jestliže existuje regulární matice $T \in \in \mathcal{M}(n/n)$ tak, že platí $\bar{A} = TAT^{-1}$. Tento vztah mezi podobnými maticemi se nazývá *podobnostní transformace.*

Na první pohled je zřejmé, že vztah podobnosti mezi maticemi je relací ekvivalence na množině všech matic daného řádu (nad **C**, nebo nad **R**). Množina $\mathcal{M}(n/n)$ se tak „rozpadá“ na disjunktní třídy navzájem ekvivalentních matic. Každou třídu můžeme intepretovat tak, že reprezentuje právě jeden lineární operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$ operující na vektorovém prostoru V_n. Nulový lineární operátor, zobrazující každý vektor prostoru V_n na jeho neutrální prvek 0_{V_n}, je v každé bázi reprezentován nulovou maticí.

Příklad 16.1: Matice podobné jen samy sobě

Sama sobě je podobná každá matice. Platí totiž $A = EAE^{-1}$, kde E je jednotková matice. Existují však matice, které jsou podobné *jen* samy sobě a žádné jiné matici. (Takové matice by odpovídaly lineárním operátorům, které mají stejnou reprezentaci ve všech možných bázích vektorového prostoru V_n.) Tak například nulová matice je jediným prvkem své třídy. Skutečně, provedeme-li s ní libovolnou podobnostní transformaci, dostaneme zase nulovou matici: $T0_{\mathcal{M}(n/n)}T^{-1} = 0_{\mathcal{M}(n/n)}$ pro jakoukoli regulární matici T. Další maticí, která je ve své třídě podobných matic „sama“, je jednotková matice: dejme tomu, že jednotková matice je podobná nějaké matici A, tj. $E = TAT^{-1}$ pro jistou regulární matici T. Vynásobením této rovnosti zleva maticí T^{-1} a zprava maticí T dostaneme $T^{-1}ET = A$, a odtud $A = E$. Tomuto výsledku se jistě nedivíme, neboť jednotková matice reprezentuje operátor identity id_{V_n} v každé bázi, jiná reprezentace identického operátoru neexistuje. Otázkou zůstává, zda existuje ještě jiná matice, než nulová či jednotková, která je podobná jen sama sobě. Taková matice by musela splňovat podmínku $TAT^{-1} = A \to TA = AT$ pro *každou* regulární matici, musela by tedy s libovolnou regulární maticí komutovat. A to kromě případů $A = \alpha E$, kde α je libovolný skalár, splnit nelze.

Ukážeme důležité vlastnosti podobných matic. Tvrzení budeme formulovat pro matice nad polem komplexních čísel, stejná tvrzení platí i pro matice nad polem čísel reálných.

Věta 16.1 (Vlastnosti podobných matic): *Předpokládejme, že matice $A, \bar{A} \in \mathcal{M}(n/n)$ jsou podobné. Pak mají shodné tyto vlastnosti:*

- *determinant,* $\det \bar{A} = \det A$,
- *hodnost,* $h(A) = h(\bar{A})$,
- *stopu (součet prvků na hlavní diagonále),* $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} \bar{A}$, *kde* $\operatorname{Tr} A = \alpha^i_i$, $A = (\alpha^j_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$,
- *charakteristický polynom,* $\det(A - \lambda E) = \det(\bar{A} - \lambda E)$, *kde λ je proměnná,*
- *charakteristické kořeny (včetně násobnosti).*

Čtvrtou a z ní plynoucí pátou vlastnost jsme dokazovali v odstavci 4.3.2. Rovnost stop podobných matic se dokáže velmi snadno. Označme, jako obvykle, prvky matice T, resp. matice $S = T^{-1}$ jako τ^j_i, resp. σ^j_i, $i, j = 1, \ldots, n$, a počítejme (obdobně jako v druhém dílu používáme Einsteinovu sčítací symboliku, při níž je sčítacím indexem ten, který se v zápisu vyskytuje „dvojmo“, jako horní a dolní index):

$$\operatorname{Tr}(\bar{A}) = \bar{\alpha}^i_i = \tau^k_i \alpha^l_k \sigma^i_l = \alpha^l_k \left(\tau^k_i \sigma^i_l\right) = \alpha^l_k \delta^k_l = \alpha^k_k = \operatorname{Tr}(A)\,.$$

Také první vlastnost je zcela zřejmá, neboť

$$\det \bar{A} = \det(TAT^{-1}) = \det T \, \det A \, \det T^{-1} = \det A\,.$$

Pokud je jedna z matic $A, \bar{A}$ regulární, plyne z rovnosti determinantů i regulárnost druhé z nich, a tedy stejná (maximální) hodnost. Jsou-li však oba determinanty nulové, je třeba rovnost hodností dokázat jinak. Vezmeme-li v úvahu „operátorovou“ interpretaci podobných matic, je věc zřejmá ihned: hodnost obou matic je rovna dimenzi obrazu operátoru φ, který matice A a $\bar{A}$ reprezentují v různých bázích, tj. $h(A) = h(\bar{A}) = \dim \operatorname{Im} \varphi$. Pokusme se však dokázat tuto vlastnost pouze pomocí podobnostního vztahu matic samotných. Připomeneme si tím také již dříve zavedené pojmy, které budeme potřebovat. Hodnost obecně obdélníkové matice s m řádky a n sloupci jsme definovali v odstavci 1.1.2 prvního dílu jako počet nenulových řádků schodovitého tvaru matice, v odstavci 1.3.2 pak ekvivalentně jako počet lineárně nezávislých řádků původní matice. Na schodovitý tvar jsme převáděli matici pomocí tzv. *ekvivalentních* úprav, nazývaných též úpravami *elementárními*. V odstavci 4.2.3 druhého dílu, konkrétně v příkladu 4.44, jsme ukázali na příkladu čtvercových matic, že každou řádkovou elementární úpravu dané matice A lze provést jejím vynásobením zleva určitou speciální maticí. Sloupcovou elementární úpravu pak provádíme násobením matice A vhodnou elementární maticí zprava. Tento výsledek jsme použili při hledání inverzní matice k regulární matici. Stručně shrneme pojem elementárních úprav a uvedeme tvar elementárních matic.

Ekvivalentní, terminologicky též *elementární* úpravou matice $A \in \mathcal{M}(n/n)$ rozumíme kteroukoli ze čtyř úprav:

- typ 1: vynásobení i-tého řádku matice A libovolným *nenulovým* číslem κ (komplexním, nebo reálným, podle číselného pole, nad nímž množinu matic uvažujeme),
- typ 2: přičtení κ-násobku j-tého řádku k i-tému řádku,
- typ 3: vynásobení i-tého sloupce matice A libovolným *nenulovým* číslem κ,
- typ 4: přičtení κ-násobku j-tého sloupce k i-tému sloupci.

Matice A a A' prohlásíme za ekvivalentní ve smyslu elementárních úprav a značíme $A \sim A'$, lze-li jednu v druhou převést konečným počtem elementárních úprav.

Že vztah $A \sim A'$ je relací ekvivalence na množině matic, v našem případě čtvercových řádu n, už také víme z předchozích dílů. Je reflexivní, symetrický a tranzitivní. (Jen pozor, jedná se o jinou relaci ekvivalence než je relace podobnosti matic!)

Každou z elementárních úprav lze realizovat vynásobením matice A vhodnou *elementární maticí* takto:

- typ 1: násobení matice A zleva maticí $I_i^{(n)}(\kappa)$, $\kappa \neq 0$,
- typ 2: násobení matice A zleva maticí $I_{ij}^{(n)}(\kappa)$,
- typ 3: násobení matice A zprava maticí $I_i^{(n)}(\kappa)$, $\kappa \neq 0$,
- typ 4: násobení matice A zprava maticí transponovanou k matici $I_{ij}^{(n)}(\kappa)$,

přičemž

$$I_i^{(n)}(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \kappa & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{ij}^{(n)}(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \kappa & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{16.1}$$

V matici $I_{ij}^{(n)}(\kappa)$ leží číslo κ v i-tém řádku a j-tém sloupci. Elementární matice jsou regulární, inverzní matice k nim jsou rovněž elementárními maticemi a realizují „zpětné“ elementární úpravy.

Z příkladu 4.44 víme, že každou regulární matici T je možné převést konečným počtem elementárních úprav na matici jednotkovou, neboli každá regulární matice je ekvivalentní (ve smyslu elementárních úprav) s jednotkovou maticí. Znamená to, že existují matice U a V, z nichž každá je součinem elementárních matic, tak, že platí $UTV = E$, anebo také $T = U^{-1}EV^{-1} = U^{-1}V^{-1}$!

Každá regulární matice T je součinem jistých elementárních matic.

Pomocí definice hodnosti matice jako maximálního počtu jejích nezávislých řádků snadno nahlédneme, že libovolná elementární úprava zachovává hodnost matice. Zkuste si to. Je-li mezi maticemi A a $\bar{A}$ vztah podobnosti $\bar{A} = TAT^{-1}$, a zapíšeme-li matici T jako konečný součin elementárních matic (takový zápis není sice jednoznačný, ale to pro náš momentální cíl není podstatné), $T = U_1 \dots U_k$, pak $\bar{A} = U_1 \dots U_k A U_k^{-1} \dots U_1^{-1}$. Matice A a $\bar{A}$ jsou tedy ekvivalentní také ve smyslu elementárních úprav, jejich hodnost je proto shodná. Z podobnosti matic plyne jejich ekvivalence ve smyslu elementárních úprav. Naopak tomu však obecně není. Jak se o tom přesvědčit? Jednoduchým protipříkladem: Každá regulární matice je ve smyslu elementárních úprav ekvivalentní s jednotkovou maticí. Podobná je však jednotková matice jen sama sobě, jak jsme ukázali před chvílí v příkladu 16.1.

Nyní definujeme Jordanovu matici, jejíž souvislost s pojmem podobnosti ukážeme později.

Jordanovou submaticí s-tého řádu příslušnou číslu λ_0 nazýváme matici

$$J_0 = J^{(s)}(\lambda_0) \in \mathcal{M}(s/s)$$

tvaru

$$J^{(s)}(\lambda_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_0 \end{pmatrix}}_{\text{řád matice} = s}. \tag{16.2}$$

Jordanovou maticí řádu n pak rozumíme blokovou matici, jejíž bloky (rozložené podél diagonály) jsou tvořeny Jordanovými submaticemi $J^{(k_1)}(\lambda_1)$, $J^{(k_2)}(\lambda_2)$, až $J^{(k_p)}(\lambda_p)$, kde $k_1 + \dots + k_p = n$. Čísla λ_i, $i = 1, \dots, p$, nemusí být nutně různá, řády k_i nemusí být nutně odlišné.

Nebudeme-li hledět na uspořádání bloků podél diagonály Jordanovy matice (v průběhu dalších úvah se uspořádání bloků ukáže jako nepodstatné), můžeme ji jednoznačně charakterizovat tabulkou, v níž $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ jsou *navzájem různé* hodnoty:

hodnota	počet sestupně $q_1 \geq \dots \geq q_r$	řády sestupně
λ_1	q_1	$k_{11} \geq k_{12} \geq \dots \geq \dots \geq \dots \geq k_{1q_1}$
λ_2	q_2	$k_{21} \geq k_{22} \geq \dots \geq \dots \geq k_{2q_2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
λ_r	q_r	$k_{r1} \geq k_{r2} \geq \dots \geq k_{rq_r}$

Číslo q_j udává počet Jordanových submatic příslušných hodnotě λ_j, které jsou v dané Jordanově matici obsaženy. Protože jsme se rozhodli nedbat na pořadí bloků, můžeme číslování hodnot, jimž jednotlivé submatice přísluší, volit tak, aby platilo $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_r$. Řády submatic příslušných téže hodnotě λ_j pak značíme $k_{j\alpha_j}$, $1 \leq \alpha_j \leq q_j$, a řadíme je rovněž sestupně, jak je také v tabulce vyznačeno.

Jistě se objeví otázka, zda diagonální matice je také Jordanova. Samozřejmě, že je. Je to Jordanova matice, jejíž všechny bloky jsou pouze prvního řádu. A ještě jedna samozřejmá, ale důležitá věc:

Charakteristickými kořeny Jordanovy matice (nebo, což je totéž, lineárního operátoru, jenž je touto maticí v nějaké bázi reprezentován) jsou právě hodnoty v diagonále, včetně násobnosti.

Charakteristický polynom Jordanovy matice je totiž

$$\det(J-\lambda E)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}+\cdots+k_{1q_1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{21}+\cdots+k_{2q_2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{r1}+\cdots+k_{rq_r}}\,.$$

Je to součin všech prvků v hlavní diagonále matice $(J-\lambda E)$. Násobnost charakteristického kořene λ_j, $1\le j\le r$, je $k_j=k_{j1}+\cdots+k_{jq_j}$.

Příklad 16.2: Jordanova matice

Jordanova matice řádu $n=12$ je zadána takto:

$$J=\begin{pmatrix}
\mathbf{3}&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\mathbf{3}&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\mathbf{3}&\mathbf{0}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\mathbf{3}&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\mathbf{3}&\mathbf{0}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\mathbf{5}&\mathbf{1}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\mathbf{5}&\mathbf{1}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{5}&\mathbf{1}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{5}&\mathbf{0}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{3}&\mathbf{1}&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{3}&\mathbf{0}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{5}
\end{pmatrix}.$$

Obsahuje tři submatice příslušné hodnotě $\lambda_1=3$, z nichž jedna je třetího řádu, a dvě druhého řádu, a dvě submatice příslušné hodnotě $\lambda_2=5$, jednu čtvrtého a jednu prvního řádu. Proto je $q_1=3$, $k_{11}=3$, $k_{12}=k_{13}=$ $=2$, a $q_2=2$, $k_{21}=4$, $k_{22}=1$. Matice obsahuje celkem $q_1+q_2=5$ Jordanových submatic, tj. 5 bloků. V jejím zadání jsou bloky odlišeny červenými tučnými nulami ve vedlejší diagonále.

Jak jistě tušíte, budeme se v dalším zabývat otázkou, zda může být lineární operátor ve vektorovém prostoru V_n reprezentován Jordanovou maticí, přesněji řečeno, zda a za jakých podmínek existuje ve V_n báze, v níž je daný operátor takto reprezentován, čím se v případě kladné odpovědi taková báze vyznačuje a jak ji najdeme. Odpověď budeme hledat dvojím způsobem. Nejprve způsobem geometrickým, pomocí vlastností vektorových prostorů a podprostorů, v odstavci 16.2 pak na základě teorie matic, kdy budeme hledat kritéria podobnosti matic a podmínky, za kterých je daná číselná matice podobná nějaké matici Jordanově. Oba způsoby směřují samozřejmě ke stejným výsledkům. Komu nevadí, že nebude do hloubky rozumět geometrické podstatě jordanovské reprezentace, a jde mu jen o to, jak ji najít, může rovnou přejít k odstavci 16.1.4.

16.1.2 Invariantní podprostory a nilpotentní zobrazení

Invariantní znamená neměnný. Samozřejmě je třeba říci, v jaké souvislosti o neměnnosti hovoříme. Invariantní jsou všechny geometrické objekty, jimiž jsme se dosud v lineární a multilineární algebře zabývali: vektory, lineární zobrazení a jejich speciální typ — lineární operátory, a také tenzory. Liší se však svou reprezentací v bázích. Vektor $a \in V_n$ zůstává stále „sám sebou“, i když má v různých bázích různé složky. Lineární operátor je v různých bázích reprezentován různými maticemi (víme, že podobnými), ale je to pořád jeden a týž operátor. V tomto odstavci půjde o poněkud jinou invarianci, konkrétně o jistý typ „zachování“ vektorových podprostorů při působení lineárních operátorů. O co přesně jde, je zřejmé z následující úvahy, která umožní zavést jeden z geometrických pojmů, na nichž stojí úvahy směřující k podmínkám reprezentace lineárních operátorů Jordanovými maticemi.

Jordanova matice patří do skupiny tzv. *blokových* matic, které se vyznačují tím, že mají podél hlavní diagonály rozloženy menší čtvercové matice obecně různých řádů, a jinak obsahují nuly. Představme si situaci, že nějaký lineární operátor je v určité bázi, řekněme $(e_1, \dots, e_n)$, reprezentován blokovou maticí. Co to znamená? Pro jednoduchost uvažujme o matici $A = (\alpha_i^j)$, $1 \le i, j \le n$, tvořené pouze dvěma bloky, v levém horním rohu „modrý“ blok řádu k, v pravém dolním rohu „červený“ blok řádu $(n-k)$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_k^1 & \dots & \alpha_k^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1}^{k+1} & \dots & \alpha_{k+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n^{k+1} & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Pro obrazy vektorů báze pak můžeme psát

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \alpha_1^1 e_1 + \dots + \alpha_1^k e_k + 0e_{k+1} + \dots + 0e_n, \\ \varphi(e_2) &= \alpha_2^1 e_1 + \dots + \alpha_2^k e_k + 0e_{k+1} + \dots + 0e_n, \\ \dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_k) &= \alpha_k^1 e_1 + \dots + \alpha_k^k e_k + 0e_{k+1} + \dots + 0e_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(e_{k+1}) &= 0e_1 + \dots + 0e_k + \alpha_{k+1}^{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_{k+1}^n e_n, \\ \dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(e_n) &= 0e_1 + \dots + 0e_k + \alpha_n^{k+1} e_{k+1} + \dots + \alpha_n^n e_n. \end{aligned}$$

Označíme-li $\mathcal{L}_1 = [|e_1, \dots, e_k|]$ a $\mathcal{L}_2 = [|e_{k+1}, \dots, e_n|]$, pak z předchozích rovnic hned vidíme, že obraz libovolného vektoru $a_1 \in \mathcal{L}_1$ bude opět prvkem $\mathcal{L}_1$ a obraz libovolného vektoru $a_2 \in \mathcal{L}_2$ prvkem $\mathcal{L}_2$, tj. $\varphi(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$ a $\varphi(\mathcal{L}_2) \subset \mathcal{L}_2$. Operátor φ tedy v jistém smyslu zachovává podprostory $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$, jsou *invariantní* vůči působení tohoto operátoru. A všimněme si ještě jedné důležité věci vyplývající přímo z tvaru reprezentace operátoru φ: vektorové podprostory

$\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ nemají kromě nulového vektoru žádné společné prvky. Zároveň platí $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = V_n$, takže vektorový prostor V_n je přímým součtem invariantních podprostorů $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$.

Je-li matice operátoru v některé bázi tvořena více diagonálními bloky, odpovídá každému z nich vektorový podprostor, jehož prvky se operátorem zobrazují zpět do tohoto podprostoru. Průnikem každé dvojice takových podprostorů je vždy pouze nulový vektor a přímým součtem všech těchto podprostorů je celý vektorový prostor V_n. Na tomto jednoduchém příkladu je založen pojem invariantního podprostoru.

Nechť φ je lineární operátor ve vektorovém prostoru V_n. Vektorový podprostor $L \subset$ $\subset V_n$ se nazývá *invariantní podprostor* vzhledem k φ, je-li $\varphi(L) \subset L$.

Příklad 16.3: Některé důležité invariantní podprostory už známe

I když jsme dosud pojem invariantního podprostoru nezaváděli, neznamená to, že bychom se s takovými podprostory nesetkali. Určitě si vzpomenete na tři z nich. Je-li φ lineární operátor ve vektorovém prostoru V_n, pak k podprostorům, které jsou vzhledem k němu invariantní, patří

- jádro operátoru, neboť pro každý vektor $a \in \operatorname{Ker}\varphi$ platí $\varphi(a) = 0_{V_n} \in \operatorname{Ker}\varphi$,
- obraz operátoru, neboť pro každý vektor $a \in \operatorname{Im}\varphi$ je také $\varphi(a) \in \operatorname{Im}\varphi$,
- každý vektorový podprostor L_i generovaný vlastními vektory operátoru φ příslušnými vlastní hodnotě λ_i; kromě toho pro vektorové podprostory $L_1, \ldots, L_r$ příslušné navzájem různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ platí $L_i \cap L_j = \{0_{V_n}\}$, $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$, a pokud je $L_1 \dot{+} \cdots \dot{+} L_r = V_n$, lze operátor reprezentovat diagonální maticí.

Uvědomme si navíc, že jádro operátoru je zároveň vektorovým podprostorem tvořeným všemi vlastními vektory příslušnými nulové vlastní hodnotě (doplněnými nulovým vektorem). Skutečně, je-li $\varphi(b) = 0b$, pak $b \in \operatorname{Ker}\varphi$, a naopak, pokud $b \in \operatorname{Ker}\varphi$, pak $\varphi(b) = 0_{V_n} = 0b$ a b je tak vlastním vektorem operátoru příslušným vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Z toho také vyplývá, že není-li nula vlastní hodnotou operátoru, je $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{V_n}\}$, což znamená, že operátor je regulární.

Příklad 16.4: Invariantní podprostor dané dimenze

Předpokládejme, že ve V_n existuje vektorový podprostor $\mathcal{L} = [|a_1, \ldots, a_k|]$ dimenze k, $1 \leq k < n$, invariantní vzhledem k lineárnímu operátoru φ. Jaký tvar bude mít matice reprezentující operátor φ v bázi $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, kde vektory $a_{k+1}, \ldots, a_n$ doplňují soubor vektorů $(a_1, \ldots, a_k)$ na bázi ve V_n libovolným způsobem? Jako vždy se úspěšně uplatní věta 4.2 (odstavec 4.2.2, druhý díl), podle níž je lineární zobrazení jednoznačně určeno obrazy libovolné báze. Platí

$$
\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= \alpha_1^1 a_1 + \cdots + \alpha_1^k a_k, \\
\varphi(a_2) &= \alpha_2^1 a_1 + \cdots + \alpha_2^k a_k, \\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots \\
\varphi(a_k) &= \alpha_k^1 a_1 + \cdots + \alpha_k^k a_k, \\
\varphi(a_{k+1}) &= \alpha_{k+1}^1 a_1 + \cdots + \alpha_{k+1}^k a_k + \alpha_{k+1}^{k+1} a_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+1}^n a_n, \\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots \\
\varphi(a_n) &= \alpha_n^1 a_1 + \cdots + \alpha_n^k a_k + \alpha_n^{k+1} a_{k+1} + \cdots + \alpha_n^n a_n,
\end{aligned}
$$

reprezentující matice má proto do jisté míry speciální tvar

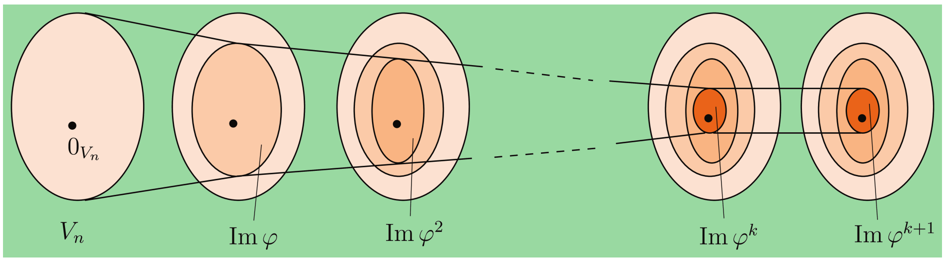
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_k^1 & \dots & \alpha_k^k & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{k+1}^1 & \dots & \alpha_{k+1}^k & \alpha_{k+1}^{k+1} & \dots & \alpha_{k+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^k & \alpha_n^{k+1} & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Naopak, pokud je operátor φ v nějaké bázi reprezentován maticí uvedeného tvaru, existuje v prostoru V_n k-rozměrný invariantní podprostor generovaný prvními k prvky této báze.

V textu, který předcházel příkladu 16.3, jsme viděli souvislost blokové reprezentace lineárního operátoru s invariantními podprostory. Jde o to, zda tato reprezentace vždy existuje a za jakých podmínek. A také o to, najít takovou bázi (nebo báze) prostoru V_n, v níž by bloky reprezentující matice byly co nejmenší a reprezentující matice co nejjednodušší. Tak by se nám podařilo rozložit vektorový prostor V_n na „co nejmenší“ invariantní podprostory.

Příklad 16.5: Ještě jeden význam nulové vlastní hodnoty

Co když má operátor *jenom* nulovou vlastní hodnotu? Předpokládejme, že operátor φ má tuto vlastnost. Znamená to, že mu přísluší jediný podprostor vlastních vektorů a ten je totožný s jádrem operátoru. Rozmysleme, co se stane, budeme-li působení operátoru opakovat několikrát po sobě, tj. používat operátor φ, φ^2, …, φ^k, atd. Obecně platí (viz schematický obrázek 16.1)



Obrázek 16.1 Mocniny operátorů.

$$\operatorname{Im}\varphi^{k+1} = \operatorname{Im}\varphi^k \subset \operatorname{Im}\varphi^{k-1} \subset \dots \subset \operatorname{Im}\varphi^2 \subset \operatorname{Im}\varphi \subset V_n\,, \tag{16.3}$$

$$0 \le \dim \operatorname{Im}\varphi^{k+1} = \operatorname{Im}\varphi^k \le \dim \operatorname{Im}\varphi^{k-1} \le \dots \le \dim \operatorname{Im}\varphi^2 \le \dim \operatorname{Im}\varphi \le n\,.$$

Obraz libovolné vyšší mocniny operátoru φ je vektorovým podprostorem obrazu jeho libovolné nižší mocniny. Zvyšováním mocniny operátoru klesá, popřípadě se nemění dimenze jejího obrazu, přičemž tato dimenze může poklesnout nanejvýš na nulu. Pro určité $k \le n$ tak zcela jistě nastane situace, kdy $\operatorname{Im}\varphi^k = \operatorname{Im}\varphi^{k+1}$. (Tato situace nastane „nejpozději“ pro $k = n$, a to tehdy, poklesne-li při každé další aplikaci operátoru dimenze dalšího obrazu jen o jedničku.) V takovém případě je však zúžení operátoru φ na vektorový podprostor $\operatorname{Im}\varphi^k$ prosté, a tedy regulární. Vlastní hodnotou regulárního zobrazení však nemůže být nula, neboť jediným vektorem, který se regulárním operátorem zobrazí na svůj 0-násobek, je zase nulový vektor. A ten z definice není vektorem vlastním. A že by operátor φ zúžený na nějaký vektorový podprostor (v našem případě $\operatorname{Im}\varphi^k$) neměl žádné vlastní hodnoty, se také v případě vektorového prostoru V_n nad **C** stát nemůže. Operátor φ má tedy alespoň jednu nenulovou vlastní hodnotu. A to je ve sporu s naším výchozím předpokladem, až na jedinou výjimku. To když je $\operatorname{Im}\varphi^k = \operatorname{Im}\varphi^{k+1} = \{0_{V_n}\}$.

Naopak je tomu s jádry mocnin operátoru φ,

$$\{0_{V_n}\} \subset \operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}\varphi^{k-1} \subset \operatorname{Ker}\varphi^k = \operatorname{Ker}\varphi^{k+1}\,, \tag{16.4}$$

$$0 \le \dim\operatorname{Ker}\varphi \le \dim\operatorname{Ker}\varphi^2 \le \cdots \le \dim\operatorname{Ker}\varphi^{k-1} \le \dim\operatorname{Ker}\varphi^k = \dim\operatorname{Ker}\varphi^{k+1} \le n\,.$$

Nastane-li rovnost $\operatorname{Im}\varphi^k = \operatorname{Im}\varphi^{k+1} = \{0_{V_n}\}$, pak $\operatorname{Ker}\varphi^k = \operatorname{Ker}\varphi^{k+1} = V_n$, neboť z odstavce 4.2.3 (vztah (4.28)) víme, že $\dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Im}\varphi = n$. A to nejde jinak, než že φ^k je nulový operátor. I s takovými operátory jsme se setkali v odstavci 4.2.3, nazývali jsme je *nilpotentní*.

Lineární operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje (přirozené) číslo k tak, že $\varphi^k = 0_{L(V_n,V_n)}$. Nejmenší takové číslo se nazývá *stupeň nilpotence* operátoru φ.

V příkladu 16.5 jsme se připravili na vyslovení následující věty, dokonce jsme provedli obtížnější část jejího důkazu.

Věta 16.2: *Lineární operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$ je nad* **C** *nilpotentní právě tehdy, je-li jedinou jeho vlastní hodnotou nula.*

Jednodušší část důkazu spočívající v prokázání skutečnosti, že nilpotentní operátor nemá jiné vlastní hodnoty než nulu, je opravdu triviální. Je-li totiž $\varphi^k = 0_{L(V_n,V_n)}$ pro jisté k, a $b \in V_n$ je vlastní vektor operátoru φ příslušný vlastní hodnotě λ, platí

$$\varphi(b) = \lambda b \implies \varphi^k(b) = \lambda^k b\,.$$

Avšak φ^k je nulový operátor, proto je $\lambda^k = 0 \Rightarrow \lambda = 0$.

Jak je tomu s reprezentací nilpotentního operátoru v bázích? Jednoduše. Je-li nilpotentní operátor φ stupně nilpotence k reprezentován v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ maticí A, pak k-tou mocninou této matice je matice nulová, $A^k = 0_{\mathcal{M}(n/n)}$.

Matice $A \in \mathcal{M}(n/n)$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje (přirozené) číslo k tak, že $A^k = 0_{\mathcal{M}(n/n)}$. Nejmenší takové číslo se nazývá *stupeň nilpotence* matice A.

Matice nilpotentního operátoru je samozřejmě nilpotentní pro jakoukoli volbu báze, vlastnost nilpotence se zachovává při podobnostní transformaci. Skutečně, pro libovolnou regulární matici T platí

$$(TAT^{-1})^k = \underbrace{(TAT^{-1})(TAT^{-1})\cdots(TAT^{-1})}_{k-\text{krát}} = TA^kT^{-1} = 0_{\mathcal{M}(n/n)}\,.$$

Pokud je možné reprezentovat niplotentní operátor Jordanovou maticí, musí být tato matice také nilpotentní, stejného stupně. A jak taková nilpotentní Jordanova matice vypadá? Je složena z niplotentních Jordanových submatic. Každá nilpotentní Jordanova submatice, třeba řádu s (pozor, neplést řád matice se stupněm nilpotence!), přísluší hodnotě $\lambda_0 = 0$, má proto tvar

$$J^{(s)}(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\text{řád matice}=s} .$$

Vzhledem k tomu, že bloky Jordanovy matice odpovídají invariantním podprostorům, které se při působení operátoru „nepromíchají“ navzájem, je k-tá mocnina Jordanovy matice tvořena bloky, z nichž každý je k-tou mocninou odpovídající Jordanovy submatice. Znamená to, že stupeň nilpotence Jordanovy matice je roven nejvyššímu stupni nilpotence jejích submatic. Jak ale určíme stupeň nilpotence Jordanovy submatice? Hned uvidíme.

Příklad 16.6: Finta na určení stupně nilpotence Jordanovy submatice $J^{(s)}(0)$

Jistě bychom si mohli zkoušet, jak vypadají mocniny Jordanových submatic $J^{(s)}(0)$. Tak třeba (maticové násobení pořádně propočítejte)

$$\left[J^{(2)}(0)\right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}(2/2)} ,$$

$$\left[J^{(3)}(0)\right]^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}(3/3)} ,$$

$$\text{ale } \left[J^{(3)}(0)\right]^2 \neq 0_{\mathcal{M}(n/n)}, \quad \left[J^{(4)}(0)\right]^4 = 0_{\mathcal{M}(4/4)}, \ \text{ale } \left[J^{(4)}(0)\right]^3 \neq 0_{\mathcal{M}(4/4)} ,$$

atd. Zdá se, že stupeň nilpotence Jordanovy submatice příslušné hodnotě $\lambda_0 = 0$ je roven jejímu řádu. Potřebujeme však tento výsledek dokázat. K tomu použijeme avizovanou „fintu“. Pokusíme se najít nilpotentní lineární operátor na vhodně vybraném vektorovém prostoru, který je v nějaké šikovně zvolené bázi reprezentován Jordanovou submaticí $J^{(s)}(0)$, a jehož stupeň nilpotence známe přímo z jeho zadání, abychom nepotřebovali Jordanovy submatice násobit. Jestli jste si při studiu kapitoly 4 vyřešili i úlohy ve cvičeních, pak si jistě vzpomenete na úlohu 7 z odstavce 4.2.6. Jedním z jejích úkolů bylo určit matici reprezentující operátor derivace působící v $(n+1)$-rozměrném vektorovém prostoru $P[n]$ polynomů stupně nejvýše n v bázi

$$\big(e_1(x), e_2(x), \dots, e_{n+1}(x)\big) = \left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\right) .$$

Reprezentující matice je, jako vždy, určena obrazy prvků báze, tj. derivacemi polynomů $e_1(x)$ až $e_{n+1}(x)$,

$$e_1'(x) = 0, \ e_2'(x) = 1, \ e_3'(x) = x, \ \dots, \ e_{n+1}'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} ,$$

takže $\varphi\big(e_1(x)\big) = 0_{P[n]}$, $\varphi\big(e_p(x)\big) = e_{p-1}(x)$, $2 \le p \le n$. Reprezentující matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left[J^{(n+1)}(0)\right]^T .$$

V bázi $\left(1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\right)$ je operátor derivace působící v prostoru $P[n]$ reprezentován transponovanou Jordanovou submaticí řádu $(n+1)$ příslušnou hodnotě $\lambda_0 = 0$. Transpozice je z hlediska určení stupně nilpotence nepodstatná, neboť obecně platí $(A^T)^k = (A^k)^T$. Je zřejmé, že tento operátor je nilpotentní stupně $(n+1)$ ($(n+1)$-tá derivace libovolného polynomu stupně nejvýše n je nulová a číslo $n+1$ je nejmenší s touto vlastností). Jordanova submatice $n+1$-tého řádu má tedy i stupeň nilpotence roven $n+1$.

V předchozím příkladu jsme ukázali první část následujícího tvrzení, jeho další části jsou triviální:

- Jordanova submatice s-tého řádu příslušná hodnotě $\lambda_0 = 0$ je nilpotentní stupně s, $\left[J^{(s)}(0)\right]^s = 0_{\mathcal{M}(s/s)}$, $\left[J^{(s)}(0)\right]^{s-1} \neq 0_{\mathcal{M}(s/s)}$.
- Jordanova matice je nilpotentní stupně k právě tehdy, je-li tvořena nilpotentními Jordanovými submaticemi, z nichž alespoň jedna je řádu k a ostatní jsou řádu nejvýše k.
- Je-li lineární operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$ reprezentován v nějaké bázi $f_1, \dots, f_n$ nilpotentní Jordanovou maticí stupně nilpotence k, je nilpotentním operátorem stupně rovněž k.

Teď je ještě potřeba zjistit podmínky, za kterých lze libovolný nilpotentní operátor opravdu reprezentovat Jordanovou maticí a také, jak souvisí reprezentace obecného operátoru Jordanovou maticí s nilpotentními operátory. K tomu poslouží nové pojmy z následujícího odstavce.

16.1.3 Co je to kořenový vektor a kořenový prostor

Uvažujme nejprve o operátoru φ, jenž má diagonální reprezentaci, a připomeňme výsledky odstavce 4.3. Ke každé z navzájem různých vlastních hodnot $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $1 \leq r \leq n$, operátoru φ existuje podprostor vlastních vektorů L_i (tvořený všemi vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě λ_i a doplněný nulovým vektorem), pro jehož dimenzi q_i platí $q_i = k_i$, kde k_i je násobnost vlastní hodnoty λ_i jakožto charakteristického kořene operátoru. Dostáváme rozklad vektorového prostoru V_n na invariantní podprostory

$$V_n = L_1 \dot{+} \cdots \dot{+} L_r .$$

Reprezentující (diagonální) matice je speciálním případem matice Jordanovy (všechny její Jordanovy submatice jsou řádu jedna).

Nyní budeme směřovat ke konstrukci rozkladu na invariantní podprostory i pro obecný případ operátoru, který diagonální reprezentaci mít nemusí. Pro dimenzi q_i každého z podprostorů L_i platí obecný vztah $1 \leq q_i \leq k_i$.

Je-li $b \in V_n$ vlastní vektor operátoru φ příslušný vlastní hodnotě λ_0, tj. $\varphi(b) = \lambda_0 b$, platí

$$\varphi(b) - \lambda_0 b = 0_{V_n} \quad \Longrightarrow \quad (\varphi - \lambda_0 \,\mathrm{id}_{V_n})(b) = 0_{V_n} \,.$$

Vektor b je tedy současně vlastním vektorem operátoru $\psi = \varphi - \lambda_0 \,\mathrm{id}_{V_n}$ příslušným nulové vlastní hodnotě. Je také vlastním vektorem libovolné mocniny tohoto operátoru, příslušným rovněž nulové vlastní hodnotě. Dejme si za úkol hledat všechny vlastní vektory mocnin operátoru ψ. Má vůbec problém, který jsme formulovali před chvílí, další *nezávislé* řešení než jen vlastní vektory operátoru $\psi = \varphi - \lambda_0 \,\mathrm{id}_{V_n}$? Rozhodně je mít může, neboť jsme dokázali (viz vztah (16.4)), že jádro nižší mocniny operátoru je podmožinou jádra mocniny vyšší, tj. $\{0_{V_n}\} \subset \subset \operatorname{Ker} \psi \subset \operatorname{Ker} \psi^2 \subset \cdots \subset V_n$. Od toho se odvíjí následující definice.

Nechť $k \geq 2$. Vektor $c \in V_n$, $c \neq 0_{V_n}$, se nazývá *kořenový vektor stupně k* operátoru $\varphi \in L(V_n, V_n)$ příslušný hodnotě λ_0, jestliže je

$$(\varphi - \lambda_0 \,\mathrm{id}_{V_n})^k(c) = 0_{V_n}, \quad (\varphi - \lambda_0 \,\mathrm{id}_{V_n})^{k-1}(c) \neq 0_{V_n} \,. \tag{16.5}$$

Vlastní vektor operátoru φ příslušný vlastní hodnotě λ_0 se nazývá *kořenovým vektorem stupně 1* tohoto operátoru příslušným hodnotě λ_0.

Jinými slovy, stupeň kořenového vektoru c pro daný operátor φ a jeho pevně zvolenou vlastní hodnotu λ_0 je nejmenší celé číslo k, pro něž je vektor c vlastním vektorem operátoru ψ^k, $\psi = \varphi - \lambda_0 \,\mathrm{id}_{V_n}$, příslušným nulové vlastní hodnotě. Kořenové vektory prvního stupně existují vždy, neboť jsou to vektory vlastní (připomeňme, že stále uvažujeme o vektorovém prostoru V_n nad $\mathbf{C}$). Kořenové vektory vyšších stupňů, tj. takové, které nejsou vlastními vektory operátoru φ, existovat nemusejí. Nastane to například v případě operátoru, který má jednoduché spektrum, takže všechny kořenové vektory jsou pouze prvního stupně. Otázkou je, jaký je nejvyšší možný stupeň kořenového vektoru. Odpověď je jednoduchá:

Operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$ má kořenové vektory stupně nejvýše n.

V podstatě není ani co dokazovat. Tvrzení plyne přímo ze vztahu (16.3), aplikujeme-li jej na operátor $\psi = \varphi - \lambda_0 \,\mathrm{id}_{V_n}$.

K čemu jsou kořenové vektory dobré? Pokusme se zjistit, zda vhodně specifikovaná množina kořenových vektorů daného operátoru, samozřejmě doplněná o nulový vektor, který definice kořenového vektoru vyloučila ze hry, netvoří třeba vektorový podprostor ve V_n. Označme

$$\mathcal{L}^{(k)}_{\lambda_0} = \{c \in V_n \,|\, c \text{ je kořenový vektor operátoru } \varphi \text{ příslušný } \lambda_0, \text{ stupně nejvýše } k\} \cup \{0_{V_n}\}\,. \tag{16.6}$$

Zvolme vektory $c_1, c_2 \in \mathcal{L}^{(k)}_{\lambda_0}$. Předpokládejme, že stupeň kořenového vektoru c_1, resp. c_2 je k_1, resp. k_2, přičemž je zřejmé, že $k_1, k_2 \leq k$. Označme $c = \alpha^1 c_1 + \alpha^2 c_2$ a $\psi = \varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n}$. Platí

$$\psi^k(c) = \alpha^1 \psi^k(c_1) + \alpha^2 \psi^k(c_2) = \alpha^1 \psi^{k-k_1} \circ \psi^{k_1}(c_1) + \alpha^2 \psi^{k-k_2} \circ \psi^{k_2}(c_2) = 0_{V_n}\,,$$

takže $c \in \mathcal{L}^{(k)}_{\lambda_0}$. Vidíme, že podmnožina $\mathcal{L}^{(k)}_{\lambda_0} \subset V_n$ prostoru V_n má skutečně strukturu vektorového podprostoru prostoru V_n. Co se stane, zobrazíme-li jeho libovolný prvek c operátorem φ? Vyjděme ze základní vlastnosti kořenového vektoru stupně k a počítejme. Dostáváme postupně

$$(\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^k(c) = (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})(\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(c) = 0_{V_n} \implies$$

$$\implies \varphi\Big((\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(c)\Big) = \lambda_0 (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(c)\,,$$

takže vektor $(\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(c)$ je vlastní vektor operátoru φ příslušný vlastní hodnotě λ_0 (jeho nenulovost plyne z definice stupně kořenového vektoru). A počítejme dál:

$$0_{V_n} = (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^k(c) = (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})(c)$$

$$\implies (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}\varphi(c) = \lambda_0 (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(c)\,,$$

$$\implies (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k}\varphi(c) = \lambda_0 (\varphi - \lambda_0 \operatorname{id}_{V_n})^{k}(c) = 0_{V_n}\,.$$

Odtud již plyne, že obraz $\varphi(c)$ je kořenovým vektorem stupně nejvýše k, proto je prvkem vektorového podprostoru $\mathcal{L}^{(k)}_{\lambda_0}$. Tento vektorový podprostor je tedy invariantním podprostorem vzhledem k operátoru φ.

Kořenovým podprostorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě λ_0 tohoto operátoru rozumíme vektorový podprostor

$$\mathcal{L}_{\lambda_0} = \{c \in V_n \,|\, c \ \text{ je kořenový vektor operátoru } \varphi \text{ příslušný } \lambda_0\} \cup \{0_{V_n}\} \subset V_n\,. \tag{16.7}$$

Rozumí se tím podprostor všech kořenových vektorů (všech stupňů) operátoru φ příslušných k vlastní hodnotě λ_0 (při doplnění nulovým vektorem).

Z toho, co jsme dokázali o podprostoru $\mathcal{L}^{(k)}_{\lambda_0}$ všech kořenových vektorů stupně nejvýše k příslušných hodnotě λ_0, je zřejmé, že $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ je vektorovým podprostorem ve V_n, a to podprostorem invariantním vzhledem k operátoru φ.

Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $1 \leq r \leq n$, jsou navzájem různé vlastní hodnoty (charakteristické kořeny) operátoru φ. Každé z nich přísluší kořenový podprostor, $\mathcal{L}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{L}_{\lambda_r}$. Když si vzpomeneme na základní vlastnost vektorových podprostorů tvořených vlastními vektory operátoru, totiž že $L_i \cap L_j = \{0_{V_n}\}$ pro $i \neq j$, může nás napadnout, že totéž by mohlo platit i pro kořenové podprostory. Navíc je jasné, že kořenový podprostor příslušný dané vlastní hodnotě je „větší“, nebo „stejně velký“ jako podprostor vlastních vektorů příslušných téže hodnotě, tj. $L_i \subset \mathcal{L}_{\lambda_i}$. A co když je součtem kořenových podprostorů celý vektorový prostor V_n? Jsou to zatím jen nápady, které musíme prověřit.

Nejprve uvažujme o průniku $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$ pro $i \neq j$. Ukážeme, že obsahuje pouze nulový vektor. Předpokládejme, že průnik $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$ pro $i \neq j$ obsahuje kromě nulového vektoru i další vektory. Dokážeme, že operátor $\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n}$ zúžený na podprostor $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$ je regulární. Provedeme to sporem: předpokládejme, že existuje *nenulový* vektor $b \in \mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$, pro který je $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})(b) = 0_{V_n}$. Vektor b je však současně kořenovým vektorem operátoru φ příslušným hodnotě λ_j. Dejme tomu, že jeho stupeň je k, tj. $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})^k(b) = 0_{V_n}$, avšak $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(b) \neq 0_{V_n}$. Před chvílí jsme dokázali, že vektor $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(b)$ je vlastním vektorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě λ_j. Současně platí

$$(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(b) = (\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})(b) = 0_{V_n} ,$$

neboť libovolné mocniny operátorů $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ a $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})$ komutují (zdůvodněte), a dále, podle výchozího předpokladu důkazu sporem, je $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})(b) = 0_{V_n}$. Vektor $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})^{k-1}(b)$ je tedy nejen vlastním vektorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě λ_j, ale také vlastním vektorem téhož operátoru příslušným vlastní hodnotě λ_i. Vzhledem k různosti hodnot λ_i a λ_j to ovšem není možné. Dospěli jsme ke sporu a dokázali tak, že operátor $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ zúžený na průnik $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$ je regulární. Jediným prvkem průniku $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$, který se operátorem $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ zobrazí na nulu, je nulový vektor. Totéž platí pro operátor $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})$, jak bychom jistě snadno dokázali zopakováním předchozího postupu. Libovolná mocnina regulárního operátoru je ovšem rovněž regulární. (Dovedete to zdůvodnit?) Předpokládejme, že v průniku $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$ leží nějaký nenulový vektor c. Pak je kořenovým vektorem operátoru $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$, tj. existuje číslo p tak, že $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})^p(c) = 0_{V_n}$. To je ovšem spor s regulárností operátoru $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ zúženého na $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j}$, kterou jsme právě dokázali. Proto je $\mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_j} = 0_{V_n}$.

Nakonec prověřme přímý součet $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\lambda_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{L}_{\lambda_r}$. Je-li správné naše „podezření“, že tento součet je roven celému vektorovému prostoru V_n, mělo by se nám podařit dokázat, že *každý* vektor $a \in V_n$ je součtem kořenových vektorů. Úplně by stačilo, kdybychom znali dimenze kořenových podprostorů příslušných jednotlivým vlastním hodnotám. Dimenze prostoru $\mathcal{L}$ by musela být součtem těchto dimenzí, a pokud by byla rovna n, byl by důkaz hotov. Následující tvrzení, které uvádíme bez důkazu, problém řeší.

Věta 16.3: *Dimenze kořenového prostoru operátoru $\varphi \in L(V_n, V_n)$ příslušného hodnotě λ_i, $1 \leq i \leq r$, kde $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ jsou navzájem různé vlastní hodnoty operátoru φ, je rovna násobnosti vlastní hodnoty λ_i jakožto charakteristického kořene operátoru φ.*

Konečně můžeme vyslovit důležitou větu týkající se rozkladu vektorového prostoru V_n nad $\mathbf{C}$ na přímý součet invariantních podprostorů přímo souvisejících se zkoumaným lineárním operátorem φ.

Věta 16.4 (Rozklad V_n na kořenové prostory operátoru):
Nechť $\varphi \in L(V_n, V_n)$ je lineární operátor na vektorovém prostoru V_n nad $\mathbf{C}$ a $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ kořenové prostory operátoru φ příslušné navzájem různým vlastním hodnotám λ_i, $1 \le i \le r$, kde $1 \le r \le n$. Násobnost vlastní hodnoty λ_i jakožto charakteristického kořene operátoru φ označme k_i, přičemž $k_1 + \cdots + k_r = n$. Platí

- *Každý prostor $\mathcal{L}_{\lambda_i}$, $1 \le i \le r$, je invariatním podprostorem vektorového prostoru V_n vzhledem k operátoru φ.*
- *Dimenze prostoru $\mathcal{L}_{\lambda_i}$, $1 \le i \le r$, je rovna násobnosti charakteristického kořene λ_i, $\dim \mathcal{L}_{\lambda_i} = k_i$.*
- *Vektorový prostor V_n je přímým součtem kořenových prostorů operátoru φ, $V_n = \mathcal{L}_{\lambda_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{L}_{\lambda_r}$.*
- *Každý z operátorů $(\varphi - \lambda_i \, \mathrm{id}_{V_n})$ zúžený na prostor $\mathcal{L}_{\lambda_i}$, $1 \le i \le r$, je nilpotentní.*

První tři tvrzení jsme již pořádně odvodili, nebo komentovali, a ve větě je pouze shrnujeme. Čtvrté tvrzení je v dosavadních úvahách také zahrnuto, ne však tak explicitně. Proto krátký komentář: Jde nám o nilpotenci operátoru $(\varphi - \lambda_i \, \mathrm{id}_{V_n})$ pro případ, že jeho definiční obor omezíme na kořenový prostor příslušný právě hodnotě λ_i. Tento prostor obsahuje všechny vektory (a pouze tyto vektory), které se po konečném počtu aplikací operátoru $(\varphi - \lambda_i \, \mathrm{id}_{V_n})$ nakonec zobrazí na nulový vektor. Největší principiálně možná „opakovací délka“ je n (to jsme ukázali), pro daný kořenový prostor však může být i kratší. Pro každý prostor $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ tak existuje nejmenší možná hodnota p_i, pro kterou je p_i-tá mocnina operátoru $(\varphi - \lambda_i \, \mathrm{id}_{V_n})$ s definičním oborem zúženým na prostor $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ nulovým operátorem. Platí $1 \le p_i \le k_i$.

Tím se dostáváme zpět k nilpotentním operátorům a možnosti jejich reprezentace Jordanovými maticemi. Nilpotentní operátor budeme odteď označovat ψ, aby později nedošlo ke kolizi s obecným operátorem φ.

Nejprve ještě zapřemýšlejme, jak by vypadala jordanovská reprezentace nilpotentního operátoru, pokud bychom takovou bázi opravdu našli. Víme to z odstavce 16.1.2. Jordanova matice by měla v diagonále samé nuly, ve vedlejší diagonále nad ní jedničky, nebo nuly, podle velikosti bloků, jinak nuly. Abychom úvahy propojili s úvahami o kořenových prostorech operátoru, uvědomme si, že nilpotentní operátor má jediný charakteristický kořen (vlastní hodnotu), a to $\lambda_1 = 0$, přičemž tento kořen je n-násobný. Proto také má jediný kořenový prostor, jehož dimenze je n, takže platí $\mathcal{L}_{\lambda_1} = V_n$. Nic překvapivého, že? Jenže kořenový prostor se může „rozpadat“ na menší invariantní podprostory, které by odpovídaly menším blokům. Jak teď ale zjistit, zda by Jordanova matice byla tvořena jediným blokem, nebo více bloky (součet řádů $= n$)? Zatím máme jen možnost, jak zjistit velikost největšího bloku (resp. největších bloků pro případ, že by bloků s největším řádem bylo více). Stačí zjistit stupeň nilpotence operátoru. Tato informace je však nedostatečná, neboť stupeň nilpotence operátoru nám nic neřekne o počtu největších bloků ani nám nedá žádnou informaci o blocích menších.

Skutečně nezbude, než hledat vhodnou bázi. Jak by taková báze měla vypadat, resp. jaké by měla mít vlastnosti vzhledem k oprátoru ψ, je přímo vidět z tvaru nilpotentní Jordanovy matice, v níž pro přehlednost vypíšeme jen bloky, nebudeme vypisovat přebytečné nuly:

$$J^{(n)}(0) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & \dots & 0 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\
 & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & \dots & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \dots & \dots & & & & \\
 & & & & & & & & & \dots & \dots & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1 & \dots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \dots & \dots & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix}.$$

Řády jednotlivých bloků označme třeba $n_1, \dots, n_s$, $n_1 + \cdots + n_s = n$. Bázi, ve které je nilpotentní operátor ψ reprezentován touto maticí, označme $(f_1, \dots, f_n)$. Z reprezentující matice hned vidíme, jak operátor ψ zobrazuje jednotlivé prvky této báze. Obraz i-tého vektoru báze, $1 \le i \le n$, je totiž lineární kombinací této báze, přičemž koeficienty jsou prvky i-tého řádku matice. Platí

$$\begin{array}{rl}
\text{první blok} & \psi(f_1) = f_2,\ \psi(f_2) = f_3,\ \dots,\ \psi(f_{n_1-1}) = f_{n_1},\ \psi(f_{n_1}) = 0_{V_n}, \\
\text{druhý blok} & \psi(f_{n_1+1}) = f_{n_1+2},\ \psi(f_{n_1+2}) = f_{n_1+3},\ \dots,\ \psi(f_{n_1+n_2-1}) = f_{n_1+n_2}, \psi(f_{n_1+n_2}) = 0_{V_n}, \\
\dots & \dots \\
\text{s-tý blok} & \psi(f_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1}) = f_{n_1+\cdots n_{s-1}+2},\ \psi(f_{n_1+\cdots n_{s-1}+2}) = \\
 & = f_{n_1+\cdots n_{s-1}+3},\ \dots,\ \psi(f_{n-1}) = f_n,\ \psi(f_n) = 0_{V_n}.
\end{array}$$

Okamžitě je také vidět, že každému bloku přísluší ve V_n invariantní podprostor, jehož dimenze je rovna řádu bloku,

$$\mathcal{L}_1 = [|f_1, \dots, f_{n_1}|], \mathcal{L}_2 = [|f_{n_1+1}, \dots, f_{n_1+n_2}|], \dots, \mathcal{L}_s = [|f_{n_1+\cdots+n_{s-1}}, \dots, f_n|] \,.$$

Předchozí vztahy můžeme také zapsat pomocí jednoduchého přehledného obrázku 16.2. Schéma

$$\begin{array}{l}
f_1 \xrightarrow{\psi} f_2 \xrightarrow{\psi} f_3 \xrightarrow{\psi} \dots \xrightarrow{\psi} f_{n_1-1} \xrightarrow{\psi} f_{n_1} \xrightarrow{\psi} 0_{V_n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{n_1+\cdots+n_{p-1}+1} \xrightarrow{\psi} f_{n_1+\cdots+n_{p-1}+2} \xrightarrow{\psi} \dots \xrightarrow{\psi} f_{n_1+\cdots+n_p} \xrightarrow{\psi} 0_{V_n} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1} \xrightarrow{\psi} f_{n_1+\cdots+n_{s-1}+2} \xrightarrow{\psi} \dots \xrightarrow{\psi} f_n \xrightarrow{\psi} 0_{V_n}
\end{array}$$

Obrázek 16.2 Cyklické prostory nilpotentního operátoru.

na obrázku vede k zavedení dalšího typu invariantního podprostoru.

Nechť $\psi \in L(V_n, V_n)$ je nilpotentní operátor. Vektorový podprostor $\mathcal{L} \subset V_n$ se nazývá *cyklický* vzhledem k operátoru ψ, jestliže v něm existuje báze $(f_1, \dots, f_p)$, $1 \le p \le n$, taková, že platí

$$\psi(f_j) = f_{j+1}, \quad 1 \le j \le p-1, \quad \psi(f_p) = 0_{V_n} \,. \tag{16.8}$$

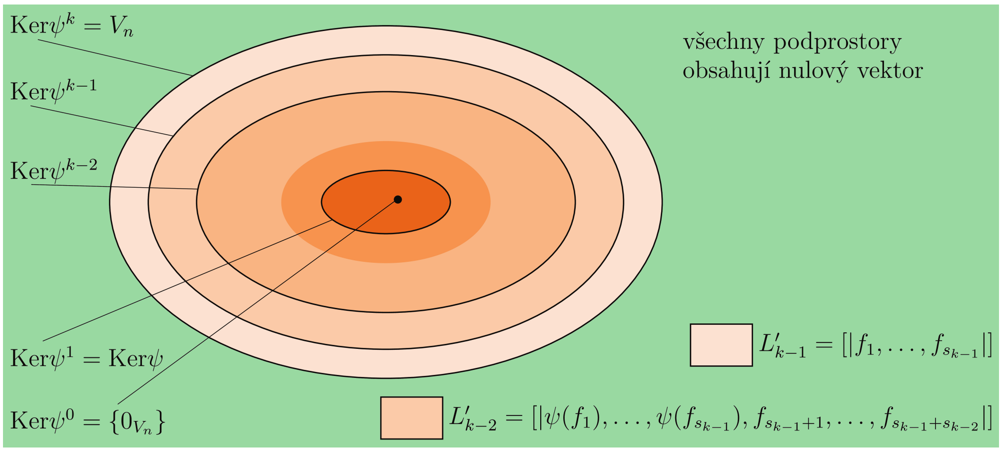
Báze $(f_1, \dots, f_p)$ se pak nazývá *Jordanova.*

Podprostor $\mathcal{L}$, který je vzhledem k operátoru ψ cyklický, je samozřejmě také invariantní. Ukážeme, že pro libovolný nilpotentní operátor ψ ve vektorovém prostoru V_n vždy existuje rozklad tohoto prostoru na podprostory, které budou vzhledem k němu cyklické. Bázi „poskládanou“ z jednotlivých Jordanových bází cyklických podprostorů budeme také nazývat *Jordanova* (v ní bude operátor ψ reprezentován Jordanovou maticí). Víme, že existenci něčeho nejlépe dokážeme tak, že to najdeme. Pokusme se proto o konstrukci Jordanovy báze pro nilpotentní operátor. Konstrukce to bude poněkud nepříjemná, protože je obecná a abstraktní. Je ale důležitá, abychom uvěřili hlavní větě o jordanovské reprezentaci. Při praktických výpočtech ji můžeme a nemusíme použít, existují i jiné způsoby nalezení báze, v níž je operátor reprezentován Jordanovou maticí. Na druhé straně je konstrukce cyklických prostorů a Jordanovy báze složitá spíše v teoretické poloze. V praxi, kde většinou pracujeme v prostorech menších dimenzí, je dobře schůdná a má i své výhody (uvidíme na příkladech).

Dejme tomu, že stupeň nilpotence operátoru ψ je k. Inkluze (16.4) má tvar

$$\{0_{V_n}\} \subset \operatorname{Ker}\psi \subset \operatorname{Ker}\psi^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}\psi^{k-1} \subset \operatorname{Ker}\psi^k = V_n \,.$$

Při konstrukci hledané báze postupujme po krocích, které jsou alespoň částečně názorně patrné z obrázku 16.3. Pozor, je čistě schematický! Množinové rozdíly je třeba chápat jako doplňky jistých vektorových podprostorů v jiných vektorových prostorech.



Obrázek 16.3 Konstrukce Jordanovy báze.

- Jádro operátoru ψ^{k-1}, $\mathrm{Ker}\,\psi^{k-1}$, je vlastním podprostorem jádra $\mathrm{Ker}\,\psi^k = V_n$, tj. $\mathrm{Ker}\,\psi^{k-1} \neq$ $\neq V_n$. Je totiž $\psi^{k-1} \neq 0_{L(V_n,V_n)}$, jak plyne z definice stupně nilpotence. Označme $p_{k-1} =$ $= \dim \mathrm{Ker}\,\psi^{k-1}$ (platí $p_{k-1} < n$). Zvolme libovolný doplněk L'_{k-1} podprostoru $\mathrm{Ker}\,\psi^{k-1}$ v prostoru $V_n = \mathrm{Ker}\,\psi^k$. Jeho dimenzi označme s_{k-1}. Z vlastností doplňku (viz odstavec 4.1.5) plyne
$$L'_{k-1} \dot{+} \mathrm{Ker}\,\psi^{k-1} = \mathrm{Ker}\,\psi^k = V_n, \quad p_{k-1} + s_{k-1} = n\,.$$
Zvolme vektory $(f_1, \ldots, f_{s_{k-1}})$, jimiž doplníme libovolnou bázi v $\mathrm{Ker}\,\psi^{k-1}$ na kompletní bázi ve $V_n = \mathrm{Ker}\,\psi^k$, tj.
$$L'_{k-1} = [|f_1, \ldots, f_{s_{k-1}}|], \quad \mathrm{Ker}\,\psi^{k-1} = [|f^{(1)}_{s_{k-1}+1}, \ldots, f^{(1)}_n|]\,.$$
Pak $(\psi^{k-1}(f_1), \ldots, \psi^{k-1}(f_{s_{k-1}}))$ je báze podprostoru $\mathrm{Im}\,\psi^{k-1}$. Opravdu? Zkusme to. Položme
$$\gamma^1\psi^{k-1}(f_1) + \cdots + \gamma^{s_{k-1}}\psi^{k-1}(f_{s_{k-1}}) = 0_{V_n} \implies \psi^{k-1}\left(\gamma^1 f_1 + \cdots + \gamma^{s_{k-1}} f_{s_{k-1}}\right) = 0_{V_n}.$$
Vzhledem k tomu, že $\gamma^1 f_1 + \cdots + \gamma^{s_{k-1}} f_{s_{k-1}} \in L'_{k-1}$ a současně $L'_{k-1} \cap \mathrm{Ker}\,\psi^{k-1} = \{0_{V_n}\}$, není možné tuto rovnost splnit jinak, než že $\gamma^1 f_1 + \cdots + \gamma^{s_{k-1}} f_{s_{k-1}} = 0_{V_n}$. Vektory $f_1, \ldots, f_{s_{k-1}}$ jsou však lineárně nezávislé, proto $\gamma^1 = \ldots = \gamma^{s_{k-1}} = 0$. Vektory $\psi^{k-1}(f_1)$ až $\psi^{k-1}(f_{s_{k-1}})$ jsou tedy rovněž lineárně nezávislé. To, že náležejí do podprostoru $\mathrm{Im}\,\psi^{k-1}$ je zřejmé, jde však o to, zda jej generují, tj. zda $\mathrm{Im}\,\psi^{k-1} = \left[\left|\psi^{k-1}(f_1), \ldots, \psi^{k-1}(f_{s_{k-1}})\right|\right]$.

Zvolme libovolně vektor $c \in \operatorname{Im} \psi^{k-1}$. Pak existuje vektor $a \in V_n$ tak, že $\psi^{k-1}(a) = c$. Platí

$$a = \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^{s_{k-1}} f_{s_{k-1}} + \alpha^{s_{k-1}+1} f^{(1)}_{s_{k-1}+1} + \cdots + \alpha^n f^{(1)}_n \,,$$
$$c = \psi^{k-1}(a) = \alpha^1 \psi^{k-1}(f_1) + \cdots + \alpha^{s_{k-1}} \psi^{k-1}(f_{s_{k-1}}) \,,$$

neboť $f^{(1)}_j \in \operatorname{Ker} \psi^{k-1}$, tj. $\psi^{k-1}(f^{(1)}_j) = 0_{V_n}$ pro $s_{k-1} + 1 \le j \le n$. Vektor c se podařilo vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\psi^{k-1}(f_1), \ldots, \psi^{k-1}(f_{s_{k-1}})$. Všimněte si, že v tomto kroku byly důležité pouze vektory $f_1, \ldots, f_{s_{k-1}}$, ostatní sice doplňují systém na bázi ve V_n, ale nemají žádnou specifickou úlohu.

- Označme $p_{k-2} = \dim \operatorname{Ker} \psi^{k-2}$ (zjevně je $p_{k-2} < p_{k-1}$). Zvolme libovolně doplněk L'_{k-2} podprostoru $\operatorname{Ker} \psi^{k-2}$ v podprostoru $\operatorname{Ker} \psi^{k-1}$. Platí (zdůvodněte)

$$\psi(L'_{k-1}) \subset \operatorname{Ker} \psi^{k-1}, \;\; \psi(L'_{k-1}) \cap \operatorname{Ker} \psi^{k-2} = \{0_{V_n}\} \implies \psi(L'_{k-1}) \subset L'_{k-2} \,.$$

Tyto vztahy říkají, že zobrazíme-li vektory $f_1, \ldots, f_{s_{k-1}}$ operátorem ψ, padnou obrazy do podprostoru $\operatorname{Ker} \psi^{k-1}$, nikoli však do $\operatorname{Ker} \psi^{k-2}$. Je tedy jasné, že vektory $\psi(f_1), \ldots, \psi(f_{s_{k-1}})$ jsou prvky prostoru L'_{k-2}. Že jsou lineárně nezávislé jsme dokázali už v prvním kroku, obecně však negenerují celý prostor L'_{k-2}. Použít jako část báze v L'_{k-2} je můžeme, bázi však musíme doplnit dalšími vektory, které označme $f_{s_{k-1}+1}, \ldots, f_{s_{k-1}+s_{k-2}}$, takže $\dim L'_{k-2} = s_{k-1} + s_{k-2}$. Bázi prostoru $\operatorname{Ker} \psi^{k-2}$ zvolme libovolně. Pak

$$L'_{k-2} = \left[\left|\psi(f_1), \ldots, \psi(f_{s_{k-1}}), f_{s_{k-1}+1}, \ldots, f_{s_{k-1}+s_{k-2}}\right|\right] ,$$

$$\operatorname{Ker} \psi^{k-2} = [|f^{(2)}_{s_{k-1}+s_{k-2}+1}, \ldots, f^{(2)}_{s_{k-1}+s_{k-2}+p_{k-2}}|], \quad p_{k-2} = n - s_{k-1} - s_{k-2} \,,$$
$$L'_{k-1} \dot{+} L'_{k-2} \dot{+} \operatorname{Ker} \psi^{k-2} = \operatorname{Ker} \psi^k = V_n \,.$$

Konkrétní výběr báze v prostoru $\operatorname{Ker} \psi^{k-2}$ opět není podstatný.

- Další postup je zcela analogický: v třetím kroku označíme $p_{k-3} = \dim \operatorname{Ker} \psi^{k-3}$ (platí $p_{k-3} < p_{k-2} < p_{k-1}$). Zvolme libovolně doplněk L'_{k-3} podprostoru $\operatorname{Ker} \psi^{k-3}$ v podprostoru $\operatorname{Ker} \psi^{k-2}$. Platí

$$\psi(L'_{k-2}) \subset \operatorname{Ker} \psi^{k-2}, \;\; \psi(L'_{k-2}) \cap \operatorname{Ker} \psi^{k-3} = \{0_{V_n}\} \implies \psi(L'_{k-2}) \subset L'_{k-3} \,.$$

Bázi podprostoru L'_{k-3} sestavíme zčásti z vektorů

$$\psi^2(f_1), \ldots, \psi^2(f_{s_{k-1}}), \psi(f_{s_{k-1}+1}), \ldots, \psi(f_{s_{k-1}+s_{k-2}})$$

a doplníme ji dalším potřebným počtem vektorů, řekněme $f_{s_{k-1}+s_{k-2}+1}, \ldots, f_{s_{k-1}+s_{k-2}+s_{k-3}}$. Bázi $\operatorname{Ker} \psi^{k-3}$ opět zvolíme libovolně. Platí

$$L'_{k-3} = \left[\left|\psi^2(f_1), \ldots, \psi^2(f_{s_{k-1}}), \psi(f_{s_{k-1}+1}), \ldots \right.\right. ,$$

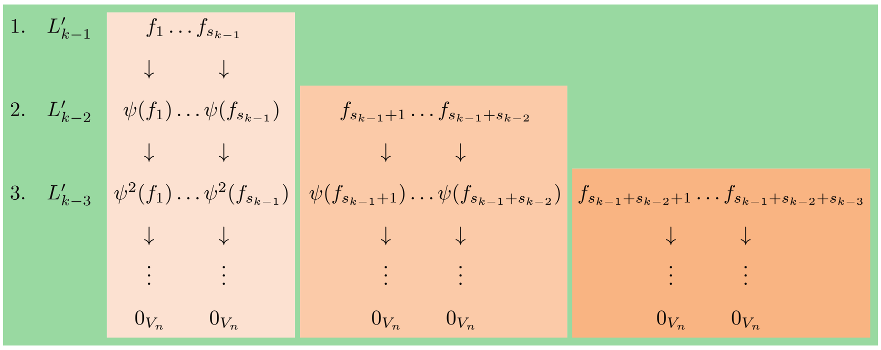
$$\ldots\ \psi(f_{s_{k-1}+s_{k-2}}), f_{s_{k-1}+s_{k-2}+1}, \ldots, f_{s_{k-1}+s_{k-2}+s_{k-3}}\Big|\Big],$$

$$L'_{k-1}\dot{+}L'_{k-2}\dot{+}L'_{k-3}\dot{+}\operatorname{Ker}\psi^{k-3} = \operatorname{Ker}\psi^{k} = V_n\,,$$

$$\operatorname{Ker}\psi^{k-3} = [|f^{(3)}_{s_{k-1}+s_{k-2}+s_{k-3}+1}, \ldots, f^{(3)}_{s_{k-1}+s_{k-2}+s_{k-3}+p_{k-3}}|], \quad p_{k-3} = n - s_{k-1} - s_{k-2} - s_{k-3}\,.$$

- Další kroky provádíme stejně, až dospějeme k jádru $\operatorname{Ker}\psi^0 = \{0_{V_n}\}$.

Nakonec takto získáme bázi v prostoru V_n. K čemu bude dobrá se ukáže, uspořádáme-li její prvky do přehlednějšího schématu. Z tohoto schématu je okamžitě vidět, že vektorové pod-



Obrázek 16.4 Konstrukce Jordanovy báze.

prostory generované vektory „propojenými“ svislými šipkami (obrázek 16.4), jsou cyklické. Konkrétně jde o tyto podprostory:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= \Big[\Big|f_1, \psi(f_1), \psi^2(f_1), \ldots, \psi^{k-1}(f_1)\Big|\Big],\\
\mathcal{J}_2 &= \Big[\Big|f_2, \psi(f_2), \psi^2(f_2), \ldots, \psi^{k-1}(f_2)\Big|\Big],\\
\ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathcal{J}_{s_{k-1}} &= [|f_{s_{k-1}}, \psi(f_{s_{k-1}}), \psi^2(f_{s_{k-1}}), \ldots, \psi^{k-1}(f_{s_{k-1}})|],
\end{aligned} \tag{16.9}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_{s_{k-1}+1} &= \Big[\Big|f_{s_{k-1}+1}, \psi(f_{s_{k-1}+1}), \psi^2(f_{s_{k-1}+1}), \ldots, \psi^{k-2}(f_{s_{k-1}+1})\Big|\Big],\\
\mathcal{J}_{s_{k-1}+2} &= \Big[\Big|f_{s_{k-1}+2}, \psi(f_{s_{k-1}+2}), \psi^2(f_{s_{k-1}+2}), \ldots, \psi^{k-2}(f_{s_{k-1}+2})\Big|\Big],\\
\ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathcal{J}_{s_{k-1}+s_{k-2}} &= \Big[\Big|f_{s_{k-1}+s_{k-2}}, \psi(f_{s_{k-1}+s_{k-2}}), \psi^2(f_{s_{k-1}+s_{k-2}}), \ldots, \psi^{k-2}(f_{s_{k-1}+s_{k-2}})\Big|\Big],
\end{aligned} \tag{16.10}$$

atd. Každý z cyklických podprostorů získaných touto konstrukcí je invariantní. Současně je zřejmé, že průnikem každých dvou z těchto podprostorů je triviální podprostor obsahující pouze nulový vektor. „Spojením“ bází všech těchto podprostorů dostaneme Jordanovu bázi pro nilpotentní operátor stupně nilpotence k. Jordanova matice, která reprezentuje operátor ψ v této bázi je složena z bloků (Jordanových submatic příslušných hodnotě $\lambda = 0$), jejichž řády jsou rovny dimenzím podprostorů (16.9), (16.10), atd. Máme tedy obecně s_{k-1} bloků řádu k, s_{k-2} bloků řádu $(k-1)$, atd. Samozřejmě, že bloky některých řádů mohou chybět. Tak například operátor ψ n-tého stupně nilpotence bude v Jordanově bázi reprezentován jediným blokem n-tého řádu.

Teď už můžeme vyslovit jedno ze základních tvrzení týkajících se možnosti reprezentace lineárního operátoru Jordanovou maticí. Zatím pro nilpotentní operátory.

Věta 16.5 (Jordanovská reprezentace nilpotentního operátoru): *Nechť* $\psi \in$ $\in L(V_n, V_n)$ *je nilpotentní operátor. Pak platí*

- *Existuje rozklad prostoru* $V_n = \mathcal{J}_1 \dot{+} \mathcal{J}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{J}_N$ *na podprostory, které jsou vzhledem k operátoru* ψ *cyklické.*
- *V prostorech* $\mathcal{J}_1$ *až* $\mathcal{J}_N$ *existují báze, které společně vytvoří ve* V_n *tzv. Jordanovu bázi, v níž je operátor* ψ *reprezentován Jordanovou maticí.*
- *Jordanova matice je určena jednoznačně až na pořadí bloků.*

Příklad 16.7: Cyklické prostory a Jordanova báze

I když jsme čtenáře ujistili, že v praktických příkladech není nutné hledat Jordanovu bázi podle vzoru důkazu její existence, příklad si ukážeme. Operátor $\psi \in L(V_3, V_3)$ je v obecné bázi (e_1, e_2, e_3) zadán maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pro niž snadno ověříte platnost rovnosti $A^2 = 0$. Operátor φ je nilpotentní stupně $k = 2$, takže je $\operatorname{Ker}\psi^2 = V_3$. Celý prostor V_3 je (jediným) kořenovým prostorem operátoru ψ. Také se snadno přesvědčíte, že Jordanovu matici operátoru ψ lze z matice A získat podobnostní transformací $J = QAQ^{-1}$, například

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jordanova matice je tvořena dvěma bloky, větším druhého a menším prvního řádu. Vektorový prostor V_3 (a současně kořenový prostor $\mathcal{L}$) je přímým součtem dvou invariantních podprostorů, dvojrozměrného a jednorozměrného. Rozklad na invariantní podprostory není určen jednoznačně. Způsobem, kterým jsme dokazovali existenci Jordanovy báze, najdeme báze cyklických podprostorů i v tomto konkrétním příkladu.

- Určíme jádro operátoru ψ^1, $\operatorname{Ker}\psi$, které je podprostorem všech vlastních vektorů operátoru. Řešíme vektorovou rovnici $\psi(b) = 0_{V_n}$, ve složkách soustavu rovnic

  $$(\beta)A = (0)\,, \quad (\beta^1 \;\; \beta^2 \;\; \beta^3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \;\; 0 \;\; 0)\,.$$

  Její obecné řešení je $(\beta^1, \beta^2, \beta^1)$, přičemž složky β^1 a β^2 jsou libovolné. Dostáváme

$$\operatorname{Ker}\psi^1 = \big[\big|(1,0,1),(0,1,0)\big|\big]\,.$$

- Najdeme bázi (libovolného) doplňku podprostoru $\operatorname{Ker}\psi^1$ v prostoru $V_3 = \operatorname{Ker}\psi^2$, třeba $f_1 = (1,0,-1)$, tj. $L_1' = \big[\big|(1,0,-1)\big|\big]$.
- Sestrojíme podprostor L_0', který je doplňkem podprostoru $\operatorname{Ker}\psi^0 = \{0_{V_n}\}$ v prostoru $\operatorname{Ker}\psi^1$. Zjevně $\dim L_0' = \dim\operatorname{Ker}\psi^1 - \dim\operatorname{Ker}\psi^0 = 2$, bázi prostoru L_0' budou proto tvořit vektory $f_2 = \psi(f_1) = (1,0,-1)A = (-2,0,-2)$ a třeba $f_3 = (0,1,0)$. Pak $L_0' = \big[\big|(-2,0,-2),(0,1,0)\big|\big]$.
- Nyní již můžeme generovat cyklické podprostory,

$$\mathcal{J}_1 = \big[\big|(1,0,-1),(-2,0,-2)\big|\big], \quad \mathcal{J}_2 = \big[\big|(0,1,0)\big|\big]\,.$$

Vektory $f_1 = (1,0,-1)$, $f_2 = (-2,0,-2)$ a $f_3 = (0,1,0)$ tvoří Jordanovu bázi v (jediném) kořenovém prostoru $\mathcal{L}_0 = V_3$ operátoru ψ. Matice přechodu od báze (e_1,e_2,e_3) k Jordanově bázi (f_1,f_2,f_3) a matice inverzní jsou

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

O tom, že výsledkem podobnostní transformace TAT^{-1} je Jordanova matice J, shodná s maticí QAQ^{-1}, se přesvědčte sami. V bázi $(\bar{f}_1,\bar{f}_2,\bar{f}_3)$, k níž od báze (e_1,e_2,e_3) vede přechod pomocí matice Q, je operátor ψ rovněž reprezentován Jordanovou maticí. Možná jste při konstrukci cyklických prostorů $\mathcal{J}_1$ a $\mathcal{J}_2$ v tomto příkladu postřehli její výhody: přímo dostáváme regulární matici T, která realizuje podobnostní transformaci TAT^{-1} a jejím provedením také Jordanovu matici.

Zbývá poslední úkol, přejít od otázky jordanovské reprezentace nilpotentního operátoru k operátoru obecnému. Označme jej jako dříve φ a jeho navzájem různé vlastní hodnoty $\lambda_1,\dots,\lambda_r$, $1 \le r \le n$. Násobnosti vlastních hodnot (kořenů charakteristického polynomu operátoru φ) označme $k_1,\dots,k_r$, přičemž $k_1 + \cdots + k_r = n$. Postupujme takto:

- Podle věty 16.4 existuje rozklad vektorového prostoru V_n na kořenové podprostory operátoru φ, $V_n = \mathcal{L}_{\lambda_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{L}_{\lambda_r}$.
- Každý z operátorů $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$, $1 \le i \le r$, zúžený na kořenový prostor příslušný právě hodnotě λ_i, je nilpotentní. V každém kořenovém prostoru můžeme sestrojit jeho Jordanovu bázi. Jordanovy báze kořenových prostorů označme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\lambda_1} &= [|f_1,\dots,f_{k_1}|], \\ \mathcal{L}_{\lambda_2} &= [|f_{k_1+1},\dots,f_{k_1+k_2}|], \\ \dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathcal{L}_{\lambda_r} &= [|f_{k_1+\cdots+k_{r-1}+1},\dots,f_n|]. \end{aligned}$$

- V Jordanově bázi prostoru $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ je operátor $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ zúžený na prostor $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ reprezentován Jordanovou maticí řádu k_i s nulovými prvky v hlavní diagonále.

- Pro operátor φ zúžený na prostor $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ platí

  $$\varphi\Big|_{\mathcal{L}_{\lambda_i}} = (\varphi - \lambda_i \,\mathrm{id}_{V_n})\Big|_{\mathcal{L}_{\lambda_i}} + \lambda_i \,\mathrm{id}_{\mathcal{L}_{\lambda_i}} ,$$

  pro $1 \le i \le r$. V Jordanově bázi prostoru $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ je proto reprezentován Jordanovou maticí řádu k_i, jejíž všechny diagonální prvky jsou rovny λ_i.

- Soubor všech vektorů Jordanových bází kořenových prostorů je bází ve vektorovém prostoru V_n, $V_n = [|f_1, \ldots, f_n|]$.

- V bázi $(f_1, \ldots, f_n)$ je operátor φ reprezentován Jordanovou maticí s bloky tvořenými Jordanovými maticemi reprezentujícími operátor φ (zúžený na kořenové prostory) v Jordanových bázích kořenových prostorů.

Získané výsledky, které jsme odvodili pro vektorový prostor V_n nad polem komplexních čísel, shrneme v závěrečné větě, kterou doplníme o zřejmé tvrzení týkající se vektorových prostorů nad polem čísel reálných.

Věta 16.6 (Jordanova reprezentace operátoru): *Nechť $\varphi \in L(V_n, V_n)$ je (lineární) operátor ve vektorovém prostoru V_n. Pak platí:*

- *Je-li V_n vektorový prostor nad* $\mathbf{C}$*, pak v něm existuje báze, v níž je operátor φ reprezentován Jordanovou maticí.*
- *Je-li V_n vektorový prostor nad* $\mathbf{R}$*, pak v něm existuje báze, v níž je operátor φ reprezentován Jordanovou maticí, právě tehdy, jsou-li všechny jeho charakteristické kořeny reálné.*

Jordanova matice J reprezentující lineární operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$ se nazývá *Jordanův normální tvar operátoru φ*. Jordanova matice J, která je podobná matici A, se nazývá *Jordanův normální tvar matice A*.

16.1.4 Řetízky z rovnic a Jordanův normální tvar

V předchozích kapitolách jsme ukázali, že pro každý lineární operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$, operující ve vektorovém prostoru V_n nad polem *komplexních* čísel, lze najít bázi, v níž je reprezentován Jordanovou maticí. Jordanova matice je až na pořadí bloků určena jednoznačně, báze jednoznačná není. To byla teorie. Možná trochu složitější, ale díky ní jsme se ujistili, že to, co hledáme (jordanovskou reprezentaci operátoru), existuje. Praktický postup nalezení báze, v níž je operátor reprezentován Jordanovu maticí, zase tak složitý není. Nevyhneme se při něm ovšem určení vlastních hodnot operátoru (ty obsadí diagonálu Jordanovy matice) a řešení soustav lineárních rovnic pro neznámé vektory báze.

Dejme tomu, že lineární operátor φ je v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ vektorového prostoru V_n zadán maticí A. Zatím neznámou bázi, v níž je tento operátor reprezentován Jordanovou maticí, charakterizovanou tabulkou z odstavce 16.1.1, označme $(f_1, \ldots, f_n)$. Obraz $\varphi(f_i)$ vektoru f_i, $1 \le i \le n$, je lineární kombinací báze $(f_1, \ldots, f_n)$ s koeficienty z i-tého řádku matice, která operátor v této bázi reprezentuje. A to je matice Jordanova. V jejím libovolném i-tém řádku je na i-té sloupcové pozici některá z vlastních hodnot (charakteristických kořenů, uvažujeme-li obecně nad $\mathbf{C}$) operátoru φ a na $(i+1)$-té sloupcové pozici je jednička, nebo nula. V případě, že na $(i+1)$-té sloupcové pozici je nula, je vektor f_i vlastním vektorem operátoru. Pro přehlednost zapíšeme právě uvedený komentář do rovnic. Dejme tomu, že bloky v Jordanově matici jsou uspořádány tak, jak odpovídá číslování navzájem různých hodnot v diagonále a sestupnému řazení jim příslušných Jordanových submatic podle řádů. Vyjádříme nejprve obrazy vektorů $f_1, \ldots, f_{k_{11}}$, které budou lineárními kombinacemi prvků báze s koeficienty z prvního bloku Jordanovy matice. Platí

$$
\begin{aligned}
\varphi(f_1) &= \lambda_1 f_1 + f_2 + 0f_3 + \cdots + 0f_{k_{11}-1} + 0f_{k_{11}},\\
\varphi(f_2) &= 0f_1 + \lambda_1 f_2 + f_3 + \cdots + 0f_{k_{11}-1} + 0f_{k_{11}},\\
\varphi(f_3) &= 0f_1 + 0f_2 + \lambda_1 f_3 + f_4 + \cdots + 0f_{k_{11}-1} + 0f_{k_{11}},\\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi(f_{k_{11}-1}) &= 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + \cdots + \lambda_1 f_{k_{11}-1} + f_{k_{11}},\\
\varphi(f_{k_{11}}) &= 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + \cdots + 0f_{k_{11}-1} + \lambda_1 f_{k_{11}},
\end{aligned}
$$

přičemž nenulové členy jsme vyznačili barevně. Bez vypisování nulových členů jsou rovnice velmi přehledné,

$$
\begin{aligned}
\varphi(f_1) &= \lambda_1 f_1 + f_2\,,\\
\varphi(f_2) &= \qquad\quad \lambda_1 f_2 + f_3\,,\\
\varphi(f_3) &= \qquad\qquad\qquad \lambda_1 f_3 + f_4\,,\\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\varphi(f_{k_{11}-1}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_1 f_{k_{11}-1} + f_{k_{11}}\,,\\
\varphi(f_{k_{11}}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \lambda_1 f_{k_{11}}\,.
\end{aligned}
\tag{16.11}
$$

Z tohoto zápisu je hned vidět, že vektor $f_{k_{11}}$ je vlastním vektorem operátoru φ příslušným vlastní hodnotě λ_1. Zapišme rovnice odpovídající dalšímu bloku, již bez vypisování nulových členů:

$$\begin{aligned}\varphi(f_{k_{11}+1}) &= \lambda_1 f_{k_{11}+1} + f_{k_{11}+2}\,,\\ \varphi(f_{k_{11}+2}) &= \qquad\quad \lambda_1 f_{k_{11}+2} + f_{k_{11}+3}\,,\\ \varphi(f_{k_{11}+3}) &= \qquad\qquad\qquad \lambda_1 f_{k_{11}+3} + f_{k_{11}+4}\,,\\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\ \varphi(f_{k_{11}+k_{12}-1}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_1 f_{k_{11}+k_{12}-1} + f_{k_{11}+k_{12}}\,,\\ \varphi(f_{k_{11}+k_{12}}) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_1 f_{k_{11}+k_{12}}\,.\end{aligned} \tag{16.12}$$

A takto můžeme pokračovat pro všechny další bloky příslušné jak hodnotě λ_1, tak ostatním vlastním hodnotám. Co jsme to vlastně dostali za rovnice? Každý blok dává vzniknout soustavě „zřetězených“ vektorových rovnic. Proto mluvíme o *řetízcích rovnic*. V čem spočívá řetězení? Známe-li řešení poslední rovnice bloku (vlastní vektor), například $f_{k_{11}}$, můžeme jej dosadit do rovnice předposlední, tu vyřešit, dosadit do rovnice předchozí, atd. Počty vektorových rovnic v řetízcích odpovídají řádům $k_{j\alpha_j}$, $1 \leq j \leq r$, $1 \leq \alpha_j \leq q_j$, Jordanových submatic, každá z nich představuje při reprezentaci v bázi n rovnic skalárních. Řetízek tedy obsahuje $k_{j\alpha_j}$ soustav n rovnic pro n neznámých složek vektorů $f_{k_{11}+\cdots+k_{j\alpha_j}}$ (vlastní vektor), $f_{k_{11}+\cdots+k_{j\alpha_j}-1}$, …, $f_{k_{11}+\cdots+k_{j\alpha_{j-1}}+1}$, číslujeme-li vektory báze průběžně. Podrobně si postup obecného řešení těchto soustav a nalezení podobnostní transformace mezi maticemi A a J ukážeme v následujícím odstavci.

Teď se ještě věnujme geometrickým aspektům problému. V odstavci 4.3.2 (druhý díl) jsme se přesvědčili, že vlastními vektory příslušnými dané vlastní hodnotě λ_j je generován vektorový podprostor L_j v prostoru V_n a ukázali jsme, že průnikem každé dvojice vektorových podprostorů příslušných různým vlastním hodnotám je vektorový podprostor obsahující pouze nulový vektor 0_{V_n}. Dimenzi vektorového podprostoru L_j jsme v odstavci 4.3.2 značili q_j. Nyní tak značíme počet Jordanových submatic příslušných vlastní hodnotě λ_j. Je to náhoda? Mohla by být, ale není. Dimenze vektorového podprostoru L_j generovaného vlastními vektory operátoru φ příslušnými vlastní hodnotě λ_j je skutečně rovna počtu bloků příslušných této hodnotě v Jordanově matici. Jen to musíme dokázat.

Všimněme si řetízků vektorových rovnic odpovídajících Jordanovým submaticím. Vezměme v úvahu třeba hned ten první, odpovídající bloku řádu k_{11} příslušnému vlastní hodnotě λ_1. Vektory f_1 až $f_{k_{11}}$ generují vektorový podprostor $\mathcal{L}_{11} = [|f_1, \ldots, f_{k_{11}}|]$ dimenze k_{11}, jehož libovolný prvek $a = \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^{k_{11}} f_{k_{11}}$ se působením operátoru φ zobrazí opět do podprostoru $\mathcal{L}_{11}$. Skutečně, platí

$$\begin{aligned}\varphi(a) = \alpha^1\varphi(f_1) + \cdots + \alpha^{k_{11}}\varphi(f_{k_{11}}) = \quad \text{upravte}\\ = \alpha^1\lambda_1 f_1 + (\alpha^1 + \alpha^2\lambda_1) f_2 + \cdots + (\alpha^{k_{11}-1} + \alpha^{k_{11}}\lambda_1) f_{k_{11}} \in \mathcal{L}_{11}\,.\end{aligned}$$

Podprostor $\mathcal{L}_{11}$ se při působení operátoru φ „zachovává“ v tom smyslu, že jeho obraz je jeho vektorovým podprostorem, $\varphi(\mathcal{L}_{11}) \subset \mathcal{L}_{11}$. Totéž platí pro vektorové podprostory spojené s ostatními bloky Jordanovy matice.

Průnik libovolné dvojice vektorových podprostorů odpovídajících různým blokům Jordanovy matice obsahuje pouze nulový vektor a součtem všech je celý prostor V_n (vektory $f_1, \ldots, f_n$, které „blokové“ prostory postupně generují, tvoří bázi ve V_n).

Získané výsledky formulujeme v následující větě.

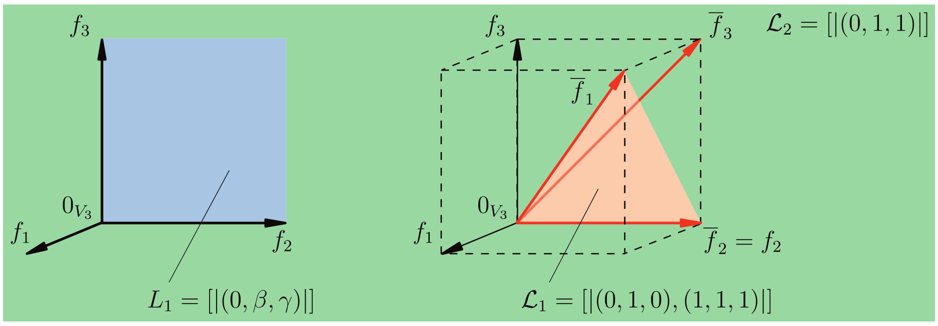
Věta 16.7: *Nechť lineární operátor $\varphi \in L(V_n, V_n)$ je v bázi $(f_1, \ldots, f_n)$ reprezentován Jordanovou maticí s Jordanovými submaticemi odpovídajícími navzájem různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $1 \le r \le n$, přičemž hodnotě λ_j, $j = 1, \ldots, r$, přísluší q_j Jordanových submatic řádů $k_{j\alpha_j}$, $1 \le \alpha_j \le q_j$. Pak platí:*

Každý z vektorových podprostorů $\mathcal{L}_{j\alpha_j}$ $1 \le j \le r$, $1 \le \alpha_j \le q_j$ (dimenze $k_{j\alpha_j}$), spjatý s Jordanovou submaticí řádu $k_{j\alpha_j}$ příslušnou vlastní hodnotě λ_j je invariantním podprostorem vzhledem k operátoru φ a prostor V_n je přímým součtem těchto invariantních podprostorů:

$$\mathcal{L}_{11} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{L}_{1q_1} \dot{+} \mathcal{L}_{21} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{L}_{2q_2} \dot{+} \ldots\ldots \dot{+} \ldots\ldots \dot{+} \mathcal{L}_{r1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathcal{L}_{1q_r} = V_n.$$

Příklad 16.8: Ještě jednou invariantní podprostory

Pokusme se pochopit strukturu řetízků rovnic na nejjednodušším možném příkladu, který si dovedeme i názorně představit (obrázek 16.5). Je velice triviální, ale právě takové jednoduché a názorné příklady lépe umožní uvědomit si věci, kterých bychom si v rámci abstraktních teoretických úvah nemuseli všimnout. Předpokládejme,



Obrázek 16.5 Invariantní podprostory — k příkladu 16.8.

že lineární operátor φ je v bázi (f_1, f_2, f_3) zadán Jordanovou maticí,

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

tvořenou dvěma submaticemi příslušnými téže vlastní hodnotě λ_1, z nichž jedna je druhého a jedna prvního řádu, jako tomu bylo v příkladu 16.7. Operátor je spjatý s jediným kořenovým prostorem, a tím je celý prostor V_3. Souborem (f_1, f_2, f_3) může být jakákoli báze, v níž je operátor reprezentován danou Jordanovou maticí.

Pokud jsme pronikli do geometrické struktury řetízků rovnic, hned vidíme, že vlastní vektory operátoru φ generují dvojrozměrný vektorový podprostor $L_1 = \big[\big|(0,1,0),(0,0,1)\big|\big]$, přičemž složky generujících vektorů jsou zadány v bázi (f_1, f_2, f_3). Kdo by chtěl vlastní vektory počítat z definice, vyjde z předpokladu, že jsou v bázi (f_1, f_2, f_3) zadány zatím neznámými složkami (α, β, γ), a ty musí splňovat vektorovou rovnici $(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)(J - \lambda_1 E) = (0\ \ 0\ \ 0)$. Dostaneme

$$(\alpha\ \ \beta\ \ \gamma)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ \ 0\ \ 0) \implies \alpha = 0,\ \beta, \gamma \text{ libovolné}\,,$$

takže vektorový podprostor vlastních vektorů příslušných (jediné) vlastní hodnotě λ_1 je skutečně

$$L_1 = \{(0, \beta, \gamma),\ \beta, \gamma \text{ lib.}\}\,.$$

Pokračujme v řešení rovnic řetízku. Neznámé složky dalších vektorů, které už nejsou vektory vlastními, označme (A, B, C). Soustava rovnic pro ně má tvar $(A\ \ B\ \ C)(J - \lambda_1 E) = (0\ \ \beta\ \ \gamma)$, tj.

$$(A\ \ B\ \ C)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ \ \beta\ \ \gamma) \implies A = \beta, \gamma = 0, B, C \text{ libovolné}\,.$$

Vidíme, že tato soustava rovnic v řetízku má řešení pouze pro $\gamma = 0$, tj. v případě, že vlastní vektor v poslední (v našem případě druhé) rovnici řetízku je tvaru $(0, \beta, 0) = \beta f_2$, kde složka β je libovolná. Tento vektor generuje vektorový podprostor $[|f_2|]$. Obecné řešení první soustavy v řetízku je tak tvaru (β, B, C), kde složky B a C jsou libovolné. Dostáváme tedy invariantní podprostory

$$\mathcal{L}_1 = \big[\big|(0, \beta, 0), (\beta, B, C)\big|\big] \quad \text{a} \quad \mathcal{L}_2 = \big[\big|(0, \beta, \gamma), \gamma \neq 0\big|\big] = \big[\big|(0, \overline{\beta}, 1), \overline{\beta} \text{ lib.}\big|\big]\,,$$

odpovídající prvnímu (většímu) a druhému bloku Jordanovy matice. (V obrázku 16.5 je vyznačen vektor $f_3 = (0,1,1)$, který generuje invariantní podprostor $\big[\big|(0,1,1)\big|\big]$.)

Co z tohoto řešení vidíme? Že invariantní podprostory obecně nejsou určeny jednozačně (samozřejmě, kořenové prostory, které jsou rovněž invariantní, jednoznačné jsou). Především vidíme, že každý jednorozměrný vektorový podprostor generovaný vlastním vektorem operátoru se při působení tohoto operátoru zachová (to je podstatou definice vlastního vektoru). Volnost při volbě jednorozměrného invariantního podprostoru $\mathcal{L}_2$ odpovídajícího menšímu bloku Jordanovy matice spočívá v libovolnosti hodnoty $\overline{\beta}$. Volnost při volbě invariantního podprostoru $\mathcal{L}_1$ zase spočívá v libovolnosti hodnot β, B a C. Není tedy prostor $\mathcal{L}_1$ nakonec trojrozměrný a rovný celému prostoru V_3? Hned uvidíme, jak se věci mají. Jeden z generujících vektorů podprostoru $\mathcal{L}_1$, vektor $(0, \beta, 0)$, je pevně dán, až na skalární násobek β, což není podstatné. Zvolme čísla B a C pevně. Při pevné volbě bude odpovídající vektorový podprostor $\mathcal{L}_1$ pochopitelně dvojrozměrný. Zobrazme operátorem φ libovolný prvek z tohoto podprostoru, $a = p(0, \beta, 0) + q(\beta, B, C) = (q\beta, p\beta + qB, qC)$,

$$(q\beta\quad p\beta + qB\quad qC)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\lambda_1 q\beta\quad q\beta + \lambda_1 p\beta + \lambda_1 qB\quad \lambda_1 qC) =$$

$$= (\lambda_1 p + q)(0\ \ \beta\ \ 0) + \lambda_1 q(\beta\ \ B\ \ C) \in \mathcal{L}_1\,.$$

Je vidět, že pro každou pevně zvolenou dvojici čísel B a C je dvojrozměrný vektorový podprostor $\mathcal{L}_1$ odpovídající této volbě podprostorem invariantním, tj. $\varphi(\mathcal{L}_1) \subset \mathcal{L}_1$. Při jiné pevné volbě čísel B a C dostaneme jiný invariantní podprostor $\big[\big|(0,\beta,0),(\beta,B,C)\big|\big]$, opět dvojrozměrný. Podle toho, jak volíme čísla B a C, dostáváme různé *dvojrozměrné* invariantní podprostory. Je jich nekonečně mnoho. Pro vektory prostoru $\mathcal{L}_2$ platí

$$\alpha(\,0 \quad \overline{\beta} \quad 1\,)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = (\,0 \quad \alpha\lambda_1\overline{\beta} \quad \alpha\lambda_1\,) = \alpha\lambda_1(\,0 \quad \overline{\beta} \quad 1\,)\,.$$

Různou volbou $\overline{\beta}$ dostáváme různé jednorozměrné invariantní podprostory.

Všimněme si však, že při jakékoli pevné volbě $\overline{\beta}$, resp. β, B a C, platí

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{0_{V_3}\}, \quad \mathcal{L}_1 \dot{+} \mathcal{L}_2 = V_3\,.$$

I když tedy invariantní podprostory $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ nejsou obecně určeny jednoznačně (řetízky rovnic mají nekonečně mnoho řešení), jejich podstatné vlastnosti jednoznačné jsou:

- jejich dimenze jsou určeny jednoznačně a odpovídají velikosti bloků Jordanovy matice,
- průnikem každé dvojice těchto podprostorů je triviální podprostor tvořený pouze nulovým vektorem,
- přímým součtem každé dvojice těchto podprostorů je celý vektorový prostor,
- zvolíme-li bázi v prostoru V_3 tak, že dva z jejích vektorů budou ležet v *kterémkoli* z dvojrozměrných invariantních podprostorů typu $\mathcal{L}_1$ a třetí v *kterémkoli* z jednorozměrných invariantních podprostorů typu $\mathcal{L}_2$, bude v ní operátor φ reprezentován Jordanovou maticí.

Z našich úvah tedy vyplývá, že ani báze, v níž je daný lineární operátor reprezentován Jordanovou maticí, není určena jednoznačně. Tato nejednoznačnost není dána pouze nejednoznačným uspořádáním bloků v matici, která je z geometrického hlediska zcela nepodstatná a odpovídala by pouze přečíslování vektorů báze. Dokumentujme to konkrétní číselnou ukázkou. Představme si, že místo báze (f_1, f_2, f_2) zvolíme bázi $(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$ třeba takto: $\overline{f_1} = (1,1,1)$, $\overline{f_2} = f_2 = (0,1,0)$, $\overline{f}_3 = (0,1,1)$, tj. $\overline{f}_3 \in L_1$ je vlastní vektor operátoru. Složky vektorů nové báze jsou zadány v bázi původní, tj. v bázi (f_1, f_2, f_3). Vektory $\overline{f}_1$ a $\overline{f}_2$ leží v invariantním podprostoru $\mathcal{L}_1 = \big[\big|(1,1,1),(0,1,0)\big|\big]$ odpovídajícím volbě $\beta = 1$, $B = 1$, $C = 1$, vektor $\overline{f}_3$ v invariantním podprostoru $\mathcal{L}_2 = \big[\big|(0,1,1)\big|\big]$ odpovídajícím volbě $\overline{\beta} = 1$. (Volitelné hodnoty vybíráme tak, aby počítání bylo jednoduché a čtenáři ponecháváme k vyřešení případy obecnější.) Pokud jsme dosud uvažovali správně, měla by matice reprezentující operátor φ být v nové bázi stejná, jako v bázi původní, tj. $\overline{J} = TJT^{-1} = J$, kde T je matice přechodu od původní báze k nové,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{J} = TJT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sami se přesvědčte, že když matice T, J a T^{-1} vynásobíte, opravdu dostanete matici J, jak to odpovídá předchozí geometrické úvaze.

V příkladu 16.8 jsme se přesvědčili, že volba báze $(f_1, \dots, f_n)$, v níž je lineární operátor reprezentován Jordanovou maticí, zdaleka není jednoznačná. Proto ani není jednoznačná podobnostní transformace od původní matice A reprezentující operátor v obecné bázi $(e_1, \dots, e_n)$ k matici Jordanově.

16.1.5 Jak nalézt podobnostní transformaci prakticky

Jak? Buď nalezením Jordanovy báze pomocí cyklických podprostorů procedurou, jíž jsme existenci Jordanovy báze dokazovali a kterou jsme použili v příkladu 16.7, anebo řešením řetízků rovnic jako v příkladu 16.8. Příklad 16.8 byl samozřejmě triviální tím, že jsme přímo vycházeli z báze, v níž byl operátor reprezentován Jordanovou maticí. Takže v podstatě nebylo co řešit, neboť možné další báze, v nichž by týž operátor byl reprezentován stejnou maticí, byly jasně vidět z charakteru jednotlivých bloků matice. V praxi je ovšem třeba řešit obecné situace, kdy je operátor zadán maticí A v bázi $(e_1, \dots, e_n)$, která nemusí být nijak speciálně zvolena. Úkolem je najít nejen odpovídající Jordanovu matici, ale také všechny báze $(f_1, \dots, f_n)$, v nichž je operátor touto Jordanovou maticí reprezentován. Nebo alespoň jednu. Proto je třeba přepsat řetízky vektorových rovnic do složek v bázi $(e_1, \dots, e_n)$, přičemž složky vektorů $f_1, \dots, f_n$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ jsou neznámými veličinami. Označíme je

$$f_j = (\varepsilon_j^1, \dots, \varepsilon_j^n), \;\; j = 1, \dots, n\,.$$

j-tý vektor hledané báze je tedy v bázi $(e_1, \dots, e_n)$ reprezentován řádkovou n-ticí $(\varepsilon_j) = (\varepsilon_j^1 \;\; \dots \;\; \varepsilon_j^n)$. Zapišme ve složkách soustavy rovnic odpovídající řetízkům (16.11) a (16.12):

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_1)(A - \lambda_1 E) &= (\varepsilon_2)\,, \\
(\varepsilon_2)(A - \lambda_1 E) &= (\varepsilon_3)\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\,, \\
(\varepsilon_{k_{11}-1})(A - \lambda_1 E) &= (\varepsilon_{k_{11}})\,, \\
(\varepsilon_{k_{11}})(A - \lambda_1 E) &= (0)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{k_{11}+1})(A - \lambda_1 E) &= (\varepsilon_{k_{11}+2})\,, \\
(\varepsilon_{k_{11}+2})(A - \lambda_1 E) &= (\varepsilon_{k_{11}+3})\,, \\
\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\,, \\
(\varepsilon_{k_{11}+k_{12}-1})(A - \lambda_1 E) &= (\varepsilon_{k_{11}+k_{12}})\,, \\
(\varepsilon_{k_{11}+k_{12}})(A - \lambda_1 E) &= (0)\,,
\end{aligned}$$

atd. Po „vyčerpání“ bloků odpovídajících vlastní hodnotě λ_1 postoupíme k blokům odpovídajícím hodnotě λ_2, až skončíme u posledního bloku odpovídajícího hodnotě λ_r. V podstatě se jedná o rutinní řešení homogenních a nehomogenních soustav rovnic s tím, že jejich obecné řešení obsahuje všechny báze, v nichž je zadaný operátor reprezentován Jordanovou maticí. Ukážeme si praktický postup nalezení obecného řešení v následujícím příkladu.

Příklad 16.9: Řetízky teď už prakticky

Lineární operátor $\varphi \in L(V_4, V_4)$ je v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Najdeme všechny báze, v nichž je reprezentován Jordanovou maticí. Nejprve je třeba najít vlastní hodnoty a vektory operátoru. Charakteristický polynom jistě dokážete spočítat sami, uvedeme proto jen výsledek

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - 1)^4 \implies \lambda_1 = 1\,.$$

Operátor má jediný čtyřnásobný charakteristický kořen (vlastní hodnotu) $\lambda_1 = 1$. Máme proto jediný kořenový prostor shodný se samotným prostorem V_4, $\mathcal{L}_{\lambda_1} = V_4$. V tuto chvíli ještě nevíme, jak vypadá Jordanova matice, známe pouze diagonálu, v níž jsou jedničky. Dále je celkem pět možností

- jeden blok čtvrtého řádu,
- jeden blok třetího a jeden prvního řádu,
- dva bloky druhého řádu,
- jeden blok druhého a dva prvního řádu,
- čtyři bloky prvního řádu (diagonální matice).

O tom, která z nich nastane, rozhodne řešení řetízků rovnic. Nejprve najdeme vlastní vektory operátoru úpravou matice soustavy rovnic pro ně, tj. $(A - \lambda_1 E)^T$, na schodovitý tvar,

$$(A - \lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 & -17 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice soustavy je 2, dimenze řešení (a tedy podprostoru vlastních vektorů) je $\dim L_1 = 4 - 2 = 2$. (V tuto chvíli již můžeme říci, že Jordanova matice bude mít právě dva bloky. Proč? O tom, zda budou oba druhého řádu, nebo jeden blok třetího a jeden prvního řádu, rozhodnou teprve následující výpočty). Označíme-li (x, y, z, t) neznámé složky vlastních vektorů a proměnné y a t zvolíme za volné neznámé, dostaneme obecné řešení soustavy ve tvaru $(2y + 5t, y, t, t)$, tj.

$$L_1 = \{(2y + 5t, y, t, t) \mid y, t \in \mathbf{C} \text{ lib.}\}\,, \quad L_1 = \big[\big|(2,1,0,0), (5,0,1,1)\big|\big]\,.$$

Pro lepší představu jsme uvedli příklad vektorů generujících podprostor L_1, v dalším výpočtu však budeme pokračovat obecně. Nehomogenní soustava rovnic pro další vektory v řetízcích má, při označení jejich zatím neznámých složek $(\xi, \upsilon, \zeta, \tau)$, tvar

$$(\xi \ \ \upsilon \ \ \zeta \ \ \tau)(A - \lambda_1 E) = (2y + 5t \ \ y \ \ t \ \ t)\,,$$

řešení najdeme opět úpravou matice soustavy na schodovitý tvar,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 7 & -17 & 2y+5t \\ 1 & -2 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -6 & y \\ 0 & 0 & 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má při volbě proměnných υ a τ za volné neznámé obecné řešení

$$(\xi, \upsilon, \zeta, \tau) = (2\upsilon + 5\tau + y - t, \upsilon, \tau + t, \tau) = (2\upsilon + 5\tau, \upsilon, \tau, \tau) + (y - t, 0, t, 0)\,.$$

Toto řešení reprezentuje všechny možné báze, v nichž je operátor reprezentován Jordanovou maticí. Dostaneme je všemi možnými nezávislými volbami dvojic volných neznámých (y, t) a (υ, τ). Kořenový prostor $\mathcal{L}_{\lambda_1} = V_4$ se vždy rozpadá na dva invariantní podprostory, z nichž každý má dimenzi 2. Jordanova matice je proto tvořena dvěma bloky druhého řádu. Podobnostní transformace $J = TAT^{-1}$ převádějící matici A na Jordanův normální tvar je realizována maticí T, jejíž obecný tvar je

$$T = \begin{pmatrix} 2\upsilon_1 + 5\tau_1 + y_1 - t_1 & \upsilon_1 & \tau_1 + t_1 & \tau_1 \\ 2y_1 + 5t_1 & y_1 & t_1 & t_1 \\ 2\upsilon_2 + 5\tau_2 + y_2 - t_2 & \upsilon_2 & \tau_2 + t_2 & \tau_2 \\ 2y_2 + 5t_2 & y_2 & t_2 & t_2 \end{pmatrix},$$

kde dvojice (y_1, t_1) a (y_2, t_2) znamenají nezávislé volby volných neznámých (tj. $(y_1, t_1) \neq (y_2, t_2)$, $(y_1, t_1) \neq (0, 0)$ a $(y_2, t_2) \neq (0, 0)$). Sami si rozmyslete, proč klademe takové požadavky právě na volné neznámé y a t, zatímco na υ, τ nikoli. Jakou vlastnost musí mít matice přechodu T? Je našimi požadavky zaručena?

Pro „zprůhlednění“ obecného výsledku uveďme konkrétní příklady. U každého z nich ověřte, že platí $TAT^{-1} = J$. Tak třeba

- $(y_1, t_1) = (1, 0)$, $(y_2, t_2) = (0, 1)$, $(\upsilon_1, \tau_1) = (\upsilon_2, \tau_2) = (0, 0)$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

- $(y_1, t_1) = (1, 0)$, $(y_2, t_2) = (0, 1)$, $(\upsilon_1, \tau_1) = (\upsilon_2, \tau_2) = (1, 0)$:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

- $(y_1, t_1) = (1, 0)$, $(y_2, t_2) = (0, 1)$, $(\upsilon_1, \tau_1) = (\upsilon_2, \tau_2) = (0, 1)$:

$$T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -6 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix},$$

- $(y_1,t_1)=(1,0)$, $(y_2,t_2)=(0,1)$, $(\upsilon_1,\tau_1)=(1,0)$, $(\upsilon_2,\tau_2)=(0,1)$:

$$T=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\2&1&0&0\\4&0&2&1\\5&0&1&1\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&3&0&0\\1&-1&1&-1\\-6&6&-1&2\end{pmatrix},$$

- $(y_1,t_1)=(1,0)$, $(y_2,t_2)=(0,1)$, $(\upsilon_1,\tau_1)=(0,1)$, $(\upsilon_2,\tau_2)=(1,0)$:

$$T=\begin{pmatrix}6&0&1&1\\2&1&0&0\\1&1&1&0\\5&0&1&1\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-2&1&0&2\\1&-1&1&-1\\-6&1&-1&7\end{pmatrix},$$

a nepřeberná řada dalších možností. A ještě otázka: víte, co představují řádky matice T? Jistěže. Jsou to složky vektorů báze (f_1,f_2,f_3,f_4), v níž je operátor φ reprezentován Jordanovou maticí

$$J=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Příklad 16.10: Řetízky prakticky podruhé

Lineární operátor $\varphi\in L(V_4,V_4)$ je v bázi (e_1,e_2,e_3,e_4) tentokrát reprezentován maticí

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Opět najdeme všechny báze, v nichž je reprezentován Jordanovou maticí. Pro charakteristický polynom a jeho kořeny dostáváme stejný výsledek jako v předchozím příkladu

$$\det(A-\lambda E)=(\lambda-1)^4\implies\lambda_1=1\,.$$

Operátor má jediný čtyřnásobný charakteristický kořen (vlastní hodnotu) $\lambda_1=1$ a zase máme jediný kořenový prostor shodný se samotným prostorem V_4, $\mathcal{L}_{\lambda_1}=V_4$. Vlastní vektory operátoru získáme úpravou matice soustavy rovnic pro ně, tj. $(A-\lambda_1E)^T$, na schodovitý tvar

$$(A-\lambda_1E)^T=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Matice soustavy má hodnost 2, její řešení bude tedy obsahovat $4-2=2$ volné neznámé a podprostor L_1 generovaný vlastními vektory je dvojrozměrný

$$L_1=\{(0,y,z,0)\mid y,z\in\mathbf{C}\text{ lib.}\}\,.\tag{16.13}$$

Zdá se, že řešení bude velmi podobné tomu z předchozího příkladu. Ale pozor! V dalším postupu se ukáže, že dvoubloková Jordanova matice má tentokrát jeden blok třetího a jeden blok prvního řádu. Uvidíme. Nehomogenní soustava rovnic pro další vektory v řetízcích má, při označení jejich zatím neznámých složek $(\xi, \upsilon, \zeta, \tau)$, tvar

$$(\xi\ \ \upsilon\ \ \zeta\ \ \tau)(A - \lambda_1 E) = (0\ \ y\ \ z\ \ 0)\,,$$

řešení najdeme opět úpravou matice soustavy na schodovitý tvar,

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Podívejme se! Nehomogenní soustava má řešení pouze za předpokladu

$$y + z = 0\,.$$

Pouze pro tuto volbu vlastního vektoru existuje „řetízkový“ vektor $(\xi, \upsilon, \zeta, \tau)$ a má tvar (volné neznámé jsou υ a ζ, $z = -y$):

$$(\xi, \upsilon, \zeta, \tau) = (y, \upsilon, \zeta, 0)\,. \tag{16.14}$$

Chybí ještě poslední „řetízkový“ vektor, označme jej (R, S, T, U), který je řešením nehomogenní soustavy:

$$(R\ \ S\ \ T\ \ U)(A - \lambda_1 E) = (y\ \ \upsilon\ \ \zeta\ \ 0)\,,$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 0 & 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \upsilon \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \upsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \upsilon+\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

řešení existuje pouze pro

$$\upsilon + \zeta = 0$$

a je tvaru

$$(R, S, T, U) = (\upsilon, S, T, y)\,. \tag{16.15}$$

Nyní zbývá poskládat vypočítané vektory do matice přechodu T (první řádek odpovídá vektoru, který jsme získali v posledním kroku (16.15), druhý vektoru z předposledního kroku (16.14) s uvážením podmínky $\zeta = -\upsilon$, třetí vlastnímu vektoru (16.13) s volbou $z = -y$ a čtvrtý vlastnímu vektoru (16.13) s volbou nezávislou, tj. $y + z \neq 0$:

$$T = \begin{pmatrix} \upsilon & S & T & y \\ y & \upsilon & -\upsilon & 0 \\ 0 & y & -y & 0 \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix}, \quad \upsilon, S, T, y, c, d \in \mathbf{C}, \quad y \neq 0, c \neq -d\,.$$

Každá z těchto matic splňuje vztah

$$TAT^{-1} = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro konkrétní volbu například $c = 0$, $d = 1$, $y = 1$, $v = 0$, $S = 0$, $T = 0$ je

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propočítejte pro tuto matici podobnostní vztah $TAT^{-1} = J$. Proč některé volné neznámé můžeme a jiné nemůžeme volit nulové?

Příklad 16.11: Finta pro cyklický prostor

Do třetice uvažujme lineární operátor $\varphi \in L(V_4, V_4)$ reprezentovaný v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ještě se s ním setkáte ve cvičení). Na první pohled vidíme, že má jedinou čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_1 = 1$ a protože hodnost matice $A - 1E$ je rovna třem, podprostor L_1 je pouze jednorozměrný. Víme, že dimenze podprostoru generovaného vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě λ odpovídá počtu bloků, které k této vlastní hodnotě budou patřit v Jordanově matici. Naši Jordanovu matici proto tvoří jediný blok:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proč bychom tedy při hledání „řetízkových“ vektorů měli řešit postupně tři nehomogenní soustavy lineárních rovnic? Celý prostor V_4 je vzhledem k operátoru $\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_{V_n}$ cyklický. Můžeme náhodně zkusit zvolit vektor, například $a_1 = (1, 0, 0, 0)$ a zobrazovat ho zobrazením $(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_{V_n})$, tj. násobit jeho složky maticí $(A - 1E)$, dostáváme postupně:

$$(1\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \longrightarrow (1\ \ 0\ \ 0\ \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ \ 2\ \ 3\ \ 4)\,,$$

$$(0\ 2\ 3\ 4) \longrightarrow (0\ 2\ 3\ 4)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 4\ 12)\,,$$

$$(0\ 0\ 4\ 12) \longrightarrow (0\ 0\ 4\ 12)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0\ 8)\,,$$

$$(0\ 0\ 0\ 8) \longrightarrow (0\ 0\ 0\ 8)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ 0\ 0\ 0)\,.$$

Vektory (a_1, a_2, a_3, a_4), pro které platí při zobrazování operátorem $(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_{V_n})$

$$a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_4 \longrightarrow 0_{V_n}$$

tvoří Jordanovu bázi (cyklického) prostoru V_4, poslední z nich je vlastním vektorem operátoru φ. Zobrazení $\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_{V_4}$ je nilpotentní, proto se jeho opakovaným působením na libovolný vektor dostaneme dříve či později k vektoru nulovému. Kdybychom první vektor a_1 zvolili jinak, například $(0, 0, 0, 1)$, dostali bychom nulový vektor příliš brzy (již v prvním kroku) — tato volba by nám nepomohla k nalezení báze. Zobrazování vektoru je však mnohem méně pracné než řešení soustavy, proto se nám metoda „náhodné volby“ vektoru a jeho zobrazování většinou vyplatí (i kdybychom se na první pokus netrefili), matici T realizující podobnostní transformaci $TAT^{-1} = J$ máme téměř „bez práce“:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Nezapomínejme však, že postup funguje pouze pro Jordanovu matici s jedním blokem!

Příklad 16.12: Nalezení podobnostní transformace dvou matic

Dejme tomu, že nyní nechceme řešit úlohu „geometrickou“, ale zajímá nás, zda jsou dvě zadané matice A a B podobné a pokud ano, jaká matice T by mohla realizovat podobnostní transformaci mezi nimi, tj. $B = TAT^{-1}$. Geometrickou představu můžeme využít. Umíme již najít Jordanovu matici lineárního operátoru — představme si tedy, že dva operátory φ, resp. ψ jsou v téže bázi reprezentovány maticemi A, resp. B. Je-li jejich Jordanova matice stejná (označme ji J), platí

$$J = T_A A T_A^{-1} = T_B B T_B^{-1} \implies B = T_B^{-1} T_A A T_A^{-1} T_B\,.$$

A máme vyhráno: matice T_A a T_B najdeme a pro matici T, realizující podobnost mezi zadanými maticemi platí $T = T_B^{-1} T_A$.

Pro praktickou ukázku zvolme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme vlastní hodnoty:

$$\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)=\lambda^2-2\lambda, \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1=0,\ \ \lambda_2=2\,.$$

Protože jsou vlastní hodnoty jednonásobné, stačí ke každé najít vlastní vektor. Existuje báze z vlastních vektorů a Jordanova matice je diagonální:

$$J_A=J_B=J=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory matice A resp. B jsou (například):

$$a_{\lambda_1}=(1,-1),\ a_{\lambda_2}=(1,1), \quad \text{resp.} b_{\lambda_1}=(1,-2),\ b_{\lambda_2}=(1,0)\,.$$

Matice T_A resp. T_B realizující podobnostní transformace $J=T_AAT_A^{-1}$ resp. $J=T_BBT_B^{-1}$ jsou

$$T_A=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},\ \ T_B=\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}.$$

Hledaná matice T a T^{-1} realizující podobnostní transformaci $B=TAT^{-1}$ je

$$T=T_B^{-1}T_A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \ T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Zkontrolujte výpočtem správnost výsledku. Na podobnou úlohu narazíme ještě v příkladu 16.17 — tam budeme hledat podobnostní transformaci pomocí polynomických matic.

Na závěr formulujeme tvrzení, které je zřejmým důsledkem předchozích úvah a jež využijeme ve cvičení.

Matice A a B jsou podobné právě tehdy, když jejich Jordanův normální tvar je stejný (až na případné pořadí bloků podél diagonály).

16.1.6 Cvičení

1. V následujících příkladech reprezentuje zadaná matice lineární operátor $\varphi\in L(V_n,V_n)$, kde V_n je vektorový prostor nad $\mathbf{C}$. Určete vždy odpovídající Jordanovu matici a alespoň jednu bázi $(f_1,\ldots,f_n)$, v níž je operátor reprezentován touto Jordanovou maticí. Určete matici T, která realizuje podobnostní transformaci.

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&3&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix}7&1&-1&1\\-1&9&-1&1\\1&-1&9&-1\\1&-1&1&7\end{pmatrix},\quad \text{d)}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-5&21&17\\6&-26&-21\end{pmatrix},\quad \text{e)}\ \begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\text{f)}\quad \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{g)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{h)}\quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\text{i)}\quad \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}, \quad \text{j)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Výsledky: Je uváděna Jordanova matice a obecný tvar matice T, pro jejíž konkrétní volbu je třeba dosadit konkrétní hodnoty volných neznámých. Ty jsou značeny u, v, w, t, popřípadě i p, q, r, s, kde je třeba odlišení.

$$\text{a)}\quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} p-r & r & q-s & s \\ p & -p & q & -q \\ v-w & w & u-t & t \\ v & -v & u & -u \end{pmatrix},$$

dvojice (p, q) a (v, u) je třeba volit nezávislé,

$$\text{b)}\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2u & 2v-6u & w-3v+5u & t \\ 0 & 4u & 4v-6u & 2w \\ 0 & 0 & 8u & 8v \\ 0 & 0 & 0 & 16u \end{pmatrix}, \quad u \neq 0$$

$$\text{c)}\quad J = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad T\ (\text{příklad}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d)}\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -u-\frac{1}{4}v & 5u+\frac{1}{4}v & 4u \\ -v & 5v & 4v \\ -2w & 6w & 5w \end{pmatrix}, \quad v, w \neq 0,$$

$$\text{e)}\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -u+v-w & -2u+v-2w & u \\ v+w & 2v+w & -v \\ w & 2w & -w \end{pmatrix}, \quad w \neq 0,$$

$$\text{f)}\quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2u & -4u & u \\ (-1+\mathrm{i})v & (-3+2\mathrm{i})v & v \\ (-1-\mathrm{i})w & (-3-2\mathrm{i})w & w \end{pmatrix}, \quad u, v, w \neq 0,$$

$$\text{g)}\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -u+3v+2w & v & w \\ -u & -u & u \\ 3p+2q & p & q \end{pmatrix}, \quad u \neq 0,\ p \neq -q,$$

$$\text{h)}\quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} t & -v+3u & -2t+v-4u \\ v & -u & u-2v \\ u & 0 & -2u \end{pmatrix}, \quad u \neq 0,$$

$$\text{i)}\quad J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}v&u&2v-u\\u&0&2u\\w&2w&w\end{pmatrix},\quad u,w\neq 0\,,$$

$$\text{j)}\quad J=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}-2u&6u&3u\\-v-w&5v+2w&3v\\-3w&15w&9w\end{pmatrix},\quad u,w\neq 0\,.$$

2. Ukažte, že podobnost matic definovaná v odstavci 16.1.1 je relací ekvivalence (dokažte, že má vlastnost reflexivity a tranzitivity, symetrie plyne přímo z formulace definice).

3. Vraťte se k příkladu 16.1 a ukažte, že matice komutuje s libovolnou maticí právě tehdy, je-li tvaru $A=\alpha E$ (tj. právě pro matice toho typu je třída podobnosti jednoprvková).

4. Ukažte, že inverzní matice k elementárním maticím $I_i^{(n)}(\kappa)$, $I_{ij}^{(n)}(\kappa)$ (vztah (16.1)) jsou také elementární.

5. Je dána matice $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$ nad $\mathbf{C}$. Rozhodněte, kterým z následujících matic je podobná a kterým není podobná

$$B=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\3&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}4&\mathrm{i}\\3\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}.$$

Návod: Nejprve zkoumejte, zda mají matice B, C, D, F shodné vlastnosti z věty 16.1 s maticí A (tzv. *podobnostní invarianty*), pokud ano, určete jejich Jordanův normální tvar.
Výsledek: B a F jsou podobné A, všechny mají Jordanův normální tvar

$$J=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}.$$

Matice C má jinou stopu i determinant, matice D má jiný determinant — nemohou být matici A podobné.

6. Uveďte příklad dvou matic se stejným charakteristickým polynomem, které nejsou podobné.
Návod: Zadejte různé Jordanovy matice se stejnými diagonálními prvky.
Výsledek: Například matice z úlohy 7.

7. Operátor má $\varphi\in L(V_4,V_4)$ má čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda_1=5$. Zapište všechny možnosti Jordanovy matice (různá pořadí bloků neuvažujte) a ke každé určete hodnost h matice $J-5E$ a dimenzi podprostoru L_1 generovaného vlastními vektory příslušnými λ_1. Kolik různých Jordanových matic může mít operátor v pětirozměrném prostoru s jedinou (pětinásobnou) vlastní hodnotou?
Výsledek:

$$J_1=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix},\ J_2=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix},\ J_3=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&1\\0&0&0&5\end{pmatrix},$$

$$J_4=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\0&5&1&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{pmatrix},\ J_5=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\0&5&1&0\\0&0&5&1\\0&0&0&5\end{pmatrix},$$

J	h	$\dim L_1$
J_1	0	4
J_2	1	3
J_3	2	2
J_4	2	2
J_5	3	1

Pro pětinásobnou vlastní hodnotu v pětirozměrném prostoru existuje 7 Jordanových matic (pokud nerozlišujeme matice lišící se pořadím bloků).

8. Ukažte, že „symetričnost“ matice není *podobnostním invariantem*, tj. nalezněte podobné matice, z nichž jedna bude symetrická a druhá ne.

9. V prostoru polynomů stupně nejvýše 3 uveďte příklad lineárního operátoru, který má jedinou čtyřnásobnou vlastní hodnotu λ_1 a podprostor generovaný vlastními vektory je $L_1 = [|x+1, 2x^2-1|]$.
Návod: Doplňte například generující vektory na bázi celého prostoru, která bude hrát roli Jordanovy báze. Jaké budou obrazy těchto bázových vektorů? Využijte Jordanovy matice — kolik má bloků? Známe-li obrazy (jakékoli) báze, můžeme již určit předpis pro zobrazení.

10. Nechť $L_1, L_2 \subset V_n$ jsou invariantní podprostory vzhledem k operátoru $\varphi \in L(V_n, V_n)$, tj. $\varphi(L_1) \subset L_1$, resp. $\varphi(L_2) \subset L_2$. Ukažte, že také jejich součet $L_1 + L_2$ a průnik $L_1 \cap L_2$ jsou invariantní vzhledem k φ.

11. Ukažte, že podprostor $L \subset V_n$, který je invariantní vzhledem ke každému operátoru $\varphi \in L(V_n, V_n)$, je triviální (tj. $L = \{0_{V_n}\}$, nebo $L = V_n$).

12. Nechť $\varphi \in L(V_n, V_n)$ je operátor ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{R}$, který nemá žádnou reálnou vlastní hodnotu (uveďte příklad takového operátoru). Ukažte, že každý podprostor, který je invariantní vzhledem k φ, musí mít sudou dimenzi.

13. Rozhodněte zda součet, resp. složení dvou nilpotentních operátorů je nilpotentní.
Výsledek: Součet nilpotentních operátorů, které komutují, je nilpotentní. Složení nilpotentních operátorů, které komutují, je nilpotentní. Obecně však tvrzení neplatí (uveďte příklad).

14. Je snadné najít nekomutující nilpotentní operátory, jejichž součet ani složení není nilpotentní (například v $\mathbf{R}^2$: $\varphi(x,y) = (0,x)$, $\psi(x,y) = (y,0)$. Rozhodněte, zda existují nilpotentní operátory φ a ψ, které nekomutují, ale

a) jejich součet je přesto nilpotentní,

b) jejich složení je přesto nilpotentní,

c) jejich součet je nilpotentní a složení nikoli,

d) jejich složení je nilpotentní a součet nikoli.

15. Nechť $L \subset V_n$ je invariantní podprostor vzhledem k operátorům $\varphi, \psi \in L(V_n, V_n)$. Ukažte, že L je invariantní vzhledem k libovolné lineární kombinaci $\alpha\varphi + \beta\psi$ těchto operátorů.

16.2 Polynomické matice a maticové polynomy

V předcházejícím odstavci jsme se zabývali Jordanovým normálním tvarem lineárních operátorů ve vektorových prostorech z geometrického hlediska. Podstatou problému bylo nalézt ve vektorovém prostoru V_n podprostory různého typu, které jsou vzhledem k uvažovanému operátoru invariantní, což znamená, že se při působení operátoru zachovávají, „nepomíchají se“ navzájem. Báze, v níž má operátor Jordanův tvar, pak vznikla „spojením“ bází těchto podprostorů.

Na problém Jordanovy reprezentace se také můžeme dívat z pohledu matic, tj. pro zadanou matici A hledat podobnostní transformaci, která ji převede na Jordanův normální tvar. Samozřejmě, zůstaneme-li na úrovni teorie matic a nebudeme propojovat matice s operátory, musíme dokázat existenci Jordanovy matice podobné obecné matici A v rámci této teorie. Bude také třeba odvodit kritéria podobnosti matic, umožňující poznat, zda dvě zadané číselné matice jsou podobné či nikoliv.

16.2.1 Ekvivalence polynomických matic

Abychom dospěli ke kritériím podobnosti matic, potřebujeme poněkud obecnější základ, spočívající v rozšíření úvah na matice, jejichž prvky nejsou pouze čísla, ale polynomy. Čísla považujeme za polynomy stupně nula.

Polynomickou maticí řádu n, nebo též *λ-maticí* tohoto řádu nazveme matici osazenou polynomy jedné proměnné λ, $a_i^j(\lambda)$, $1 \leq i, j \leq n$,

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a_1^1(\lambda) & a_1^2(\lambda) & \dots & a_1^n(\lambda) \\ a_2^1(\lambda) & a_2^2(\lambda) & \dots & a_2^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1(\lambda) & a_n^2(\lambda) & \dots & a_n^n(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{16.16}$$

Podobně jako pro číselné matice zavádíme i pro matice polynomické elementární (nebo též ekvivalentní) úpravy.

Ekvivalentní, terminologicky též *elementární* úpravou polynomické matice $A(\lambda)$ rozumíme kteroukoli ze čtyř úprav:

- typ 1: vynásobení i-tého řádku matice A libovolným *nenulovým* číslem κ (komplexním, nebo reálným, podle číselného pole, nad nímž množinu matic uvažujeme),
- typ 2: přičtení $p(\lambda)$-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $p(\lambda)$ je polynom proměnné λ,
- typ 3: vynásobení i-tého sloupce matice A libovolným *nenulovým* číslem κ,
- typ 4: přičtení $p(\lambda)$-násobku j-tého sloupce k i-tému sloupci, kde $p(\lambda)$ je polynom proměnné λ.

Matice $A(\lambda)$ a $\bar{A}(\lambda)$ prohlásíme za ekvivalentní ve smyslu elementárních úprav a značíme $A(\lambda) \sim \bar{A}(\lambda)$, lze-li jednu v druhou převést konečným počtem elementárních úprav.

Vztah $A(\lambda) \sim \bar{A}(\lambda)$ je relací ekvivalence na množině polynomických matic řádu n. Snadno sami prověříte, že je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Každou z elementárních úprav lze realizovat vynásobením matice A vhodnou (polynomickou) *elementární maticí* takto:

- typ 1: násobení matice A zleva maticí $I_i^{(n)}(\kappa)$, $\kappa \neq 0$,
- typ 2: násobení matice A zleva maticí $I_{ij}^{(n)}\big(p(\lambda)\big)$,
- typ 3: násobení matice A zprava maticí $I_i^{(n)}(\kappa)$, $\kappa \neq 0$,
- typ 4: násobení matice A zprava maticí transponovanou k matici $I_{ij}^{(n)}\big(p(\lambda)\big)$,

přičemž

$$I_i^{(n)}(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \kappa & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{ij}^{(n)}\big(p(\lambda)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & p(\lambda) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{16.17}$$

V matici $I_{ij}^{(n)}\big(p(\lambda)\big)$ leží polynom $p(\lambda)$ v i-tém řádku a j-tém sloupci. Každá elementární polynomická matice má nenulový číselný determinant, matice k ní adjungovaná je rovněž polynomická. Inverzní matice, kterou vypočteme tak, že adjungovanou matici dělíme determinantem, je polynomickou elementární maticí a realizuje „zpětnou“ elementární úpravu.

Věta 16.8 (Kritérium ekvivalence polynomických matic): *Matice $A(\lambda)$ a $\bar{A}(\lambda)$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když existují matice $U(\lambda)$ a $V(\lambda)$, které jsou konečnými součiny elementárních matic, takové, že platí $\bar{A}(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$.*

Toto tvrzení je velice důležité, ale není na něm co dokazovat, je zcela zřejmé. Matice $U(\lambda)$ vzniká postupným prováděním řádkových elementárních úprav prostřednictvím násobení elementárními maticemi postupně zleva, matice $V(\lambda)$ zase jako součin elementárních úprav sloupcových, realizovaných násobením elementárními maticemi postupně zprava,

$$\bar{A}(\lambda) = U_k(\lambda)U_{k-1}(\lambda)\ldots U_1(\lambda)A(\lambda)V_1(\lambda)\ldots V_{l-1}(\lambda)V_l(\lambda)\,,$$

symboly $U_r(\lambda)$, $1 \le r \le k$, a $V_s(\lambda)$, $1 \le s \le l$, představují zjednodušené označení elementárních matic. Elementární matice a jejich konečné součiny jsou tzv. *unimodulární* matice. Význam tohoto názvu ozřejmíme v dalším odstavci.

V praktických výpočtech budeme někdy potřebovat nejen provést pomocí elementárních úprav převod $A(\lambda) \to \bar{A}(\lambda)$, ale také získat matice $U(\lambda)$ a $V(\lambda)$. Není třeba se obávat, že budeme muset každou elementární matici zvlášť vypisovat a potom je všechny mezi sebou násobit. Použijeme jednoduchou identitu, která nám pomohla při výpočtu inverzní matice k číselné matici (příklad 4.44 v druhém dílu). Označme $I(\lambda)$, resp. $\bar{I}(\lambda)$ kteroukoli z elementárních matic realizujících řádkovou, resp. sloupcovou úpravu. Platí

$$I(\lambda) = I(\lambda)\,E, \quad \bar{I}(\lambda) = E\,\bar{I}(\lambda)\,.$$

Pravá strana první rovnosti říká, že jsme s jednotkovou maticí provedli řádkovou elementární úpravu odpovídající elementární matici $I(\lambda)$. Znamená to, že matici $I(\lambda)$ získáme z jednotkové matice, provedeme-li s ní příslušnou řádkovou úpravu. Druhá rovnost zase říká, že k tomu, abychom získali elementární matici $\bar{I}(\lambda)$ realizující určitou sloupcovou úpravu, stačí tuto úpravu jednoduše provést s jednotkovou maticí. V následujícím příkladu si to ukážeme prakticky.

Příklad 16.13: Elementární úpravy prakticky

Budeme provádět elementární úpravy s maticí

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 - 12\lambda + 16 & 2-\lambda & 2\lambda^2 - 12\lambda + 17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 7 & 2-\lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \end{pmatrix}.$$

Nebudeme je však provádět „jen tak“, ale pokusíme se jimi převést matici $A(\lambda)$ na nějaký jednodušší tvar, nejlépe diagonální. K záznamu matic $U(\lambda)$ a $V(\lambda)$ použijeme „pomocných“ jednotkových matic.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2\lambda^2 - 12\lambda + 16 & 2-\lambda & 2\lambda^2 - 12\lambda + 17 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^2 - 6\lambda + 7 & 2-\lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Postupně budeme provádět následující úpravy, popíšeme vždy úpravu a uvedeme výsledek:

- úprava: přičtení (-2)-násobku třetího řádku k prvnímu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 2 & \lambda-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^2 - 6\lambda + 7 & 2-\lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

- úprava: přičtení prvního řádku k třetímu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 2 & \lambda-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda^2-6\lambda+9 & 0 & \lambda^2-6\lambda+9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

- úprava: přičtení (-1)-násobku třetího sloupce k prvnímu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & \lambda-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & (\lambda-3)^2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

- úprava: přičtení $(2-\lambda)$-násobku prvního sloupce k druhému

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & (\lambda-3)^2 & -1 & \lambda-2 & 1 \end{array}\right),$$

- úprava: přičtení (-1)-násobku prvního sloupce k třetímu a vynásobení druhého řádku číslem (-1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda-3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & (\lambda-3)^2 & -1 & \lambda-2 & 2 \end{array}\right).$$

Vynásobením se sami snadno přesvědčíte, že matice $K_A(\lambda)$, která provedenými elementárními úpravami vznikla a je uprostřed posledního výsledku, je součinem $K_A(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$, kde

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice $K_A(\lambda)$ má velmi speciální tvar. Nejenže je diagonální, ale stupeň polynomů v diagonále roste a každý následující polynom je beze zbytku dělitelný tím předcházejícím. Za chvíli (v dalším odstavci) uvidíme, že to není náhoda.

Na závěr odstavce si všimneme jedné zajímavé vlastnosti ekvivalentních polynomických matic, která rovněž bude později užitečná. Uvažujme o matici $A(\lambda)$. Spojíme s ní soubor polynomů $d_1(\lambda), \ldots, d_n(\lambda)$, kde $d_i(\lambda)$ je největším společným dělitelem všech polynomů, které vzniknou jako subdeterminanty i-tého řádu matice $A(\lambda)$ a jeho vedoucí koeficient (koeficient u nejvyšší mocniny proměnné λ) jen roven jedné. Zjišťovat prakticky, jak tento systém vypadá, se může zdát složité. Subdeterminantů i-tého řádu je $\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)^2$ (počet výběrů i-řádků z celkového počtu n je roven počtu kombinací i-té třídy z n prvků, totéž pro sloupce). Už pro $n = 4$ je to 16 subdeterminantů prvního řádu, 36 druhého řádu, 16 třetího řádu a jeden řádu čtvrtého. Kdo by se s tím počítal? Uvidíme, že v případech, kdy to budeme potřebovat, to zas tak obtížné a pracné nebude. V tuto chvíli se zajímejme o to, co se stane s tímto systémem dělitelů, provedeme-li s maticí elementární úpravu. Asi tušíte, že nic, protože jinak by takové úvahy neměly příliš velký smysl. (Než se pustíme do dalších úvah, připomeňte si vlastnosti determinantů z prvního dílu: vynásobením i-tého řádku matice číslem κ se tímto číslem vynásobí její determinant, pričtením násobku j-tého řádku k i-tému se determinant matice nemění. Také si vzpomeňte na větu o rozvoji determinantu podle řádku.)

Proveďme s maticí $A(\lambda)$ řádkovou úpravu typu 1, tj. vynásobení jejího i-tého řádku nenulovým číslem κ. Dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_1^1(\lambda) & a_1^2(\lambda) & \dots & a_1^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^1(\lambda) & a_i^2(\lambda) & \dots & a_i^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1(\lambda) & a_n^2(\lambda) & \dots & a_n^n(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_1^1(\lambda) & a_1^2(\lambda) & \dots & a_1^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa a_i^1(\lambda) & \kappa a_i^2(\lambda) & \dots & \kappa a_i^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1(\lambda) & a_n^2(\lambda) & \dots & a_n^n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Jak se změní subdeterminanty matice po této úpravě? Subdeterminant, který neobsahuje i-tý řádek, se nezmění, subdeterminant, který i-tý řádek obsahuje se vynásobí číslem κ. Do systému největších společných dělitelů minorů jednotlivých řádů ovšem vybíráme vždy ten, který má vedoucí koeficent 1. To znamená, že elementární úprava nezmění systém $(d_1(\lambda), \dots, d_n(\lambda))$.

S elemenární úpravou typu 2 to bude o něco složitější. Do hry vstupují dva řádky: přičítáme $p(\lambda)$-násobek j-tého řádku k i-tému řádku,

$$\begin{pmatrix} a_1^1(\lambda) & a_1^2(\lambda) & \dots & a_1^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^1(\lambda) & a_i^2(\lambda) & \dots & a_i^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_j^1(\lambda) & a_j^2(\lambda) & \dots & a_j^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1(\lambda) & a_n^2(\lambda) & \dots & a_n^n(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1(\lambda) & a_1^2(\lambda) & \dots & a_1^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^1(\lambda) + p(\lambda)a_j^1(\lambda) & a_i^2(\lambda) + p(\lambda)a_j^2(\lambda) & \dots & a_i^n(\lambda) + p(\lambda)a_j^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_j^1(\lambda) & a_j^2(\lambda) & \dots & a_j^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1(\lambda) & a_n^2(\lambda) & \dots & a_n^n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Zase uvažujme, jak tato úprava ovlivní subdeterminanty. Jsou tyto možnosti:

- subdeterminant neobsahuje ani i-tý, ani j-tý řádek, nemění se,
- subdeterminant obsahuje i-tý řádek i j-tý řádek, nemění se,
- subdeterminant neobsahuje i-tý řádek a obsahuje j-tý řádek, nemění se, neboť j-tý řádek se nezměnil,
- subdeterminant obsahuje i-tý řádek a neobsahuje j-tý řádek, tuto situaci musíme promyslet podrobněji.

Věnujme se poslední situaci. Předpokládejme, že subdeterminant je k-tého řádu,

$$\det\begin{pmatrix} a_{i_1}^{j_1}(\lambda) & a_{i_1}^{j_2}(\lambda) & \dots & a_{i_1}^{j_k}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^{j_1}(\lambda)+p(\lambda)a_j^{j_1}(\lambda) & a_i^{j_2}(\lambda)+p(\lambda)a_j^{j_2}(\lambda) & \dots & a_i^{j_k}(\lambda)+p(\lambda)a_j^{j_k}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k}^{j_1}(\lambda) & a_{i_k}^{j_2}(\lambda) & \dots & a_{i_k}^{j_k}(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{i_1}^{j_1}(\lambda) & a_{i_1}^{j_2}(\lambda) & \dots & a_{i_1}^{j_k}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_i^{j_1}(\lambda) & a_i^{j_2}(\lambda) & \dots & a_i^{j_k}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k}^{j_1}(\lambda) & a_{i_k}^{j_2}(\lambda) & \dots & a_{i_k}^{j_k}(\lambda) \end{pmatrix} + p(\lambda)\det\begin{pmatrix} a_{i_1}^{j_1}(\lambda) & a_{i_1}^{j_2}(\lambda) & \dots & a_{i_1}^{j_k}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_j^{j_1}(\lambda) & a_j^{j_2}(\lambda) & \dots & a_j^{j_k}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k}^{j_1}(\lambda) & a_{i_k}^{j_2}(\lambda) & \dots & a_{i_k}^{j_k}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Subdeterminant odpovídající čtvrté možnosti jsme vyjádřili ve tvaru $M(\lambda)+p(\lambda)M'(\lambda)$, kde $M(\lambda)$ a $M'(\lambda)$ jsou subdeterminanty původní matice, proto jsou oba dělitelné polynomem $d_k(\lambda)$. Subdeterminant $M(\lambda)+p(\lambda)M'(\lambda)$ je tedy polynomem $d_k(\lambda)$ rovněž dělitelný. Označíme-li $(\bar{d}_1(\lambda),\dots,\bar{d}_n(\lambda))$ soubor dělitelů příslušný matici $\bar{A}(\lambda)$, která vznikla z matice $A(\lambda)$ elementární úpravou typu 2, můžeme konstatovat, že polynom $\bar{d}_k(\lambda)$ je dělitelný polynomem $d_k(\lambda)$ pro všechna k, $1\le k\le n$. Od matice $\bar{A}(\lambda)$ však můžeme přejít k matici $A(\lambda)$ zpětnými úpravami, takže naopak polynom $d_k(\lambda)$ je dělitelný polynomem $\bar{d}_k(\lambda)$, $1\le k\le n$. Oba však mají vedoucí koeficient rovný jedné, proto $\bar{d}_k(\lambda)=d_k(\lambda)$. Odvodili jsme další důležité tvrzení, jehož podstatou je fakt, že elementární úpravy nemění systém dělitelů $d_1(\lambda),\dots,d_n(\lambda)$.

Věta 16.9: *Nechť $d_k(\lambda)$, resp. $\bar{d}_k(\lambda)$, $1\le k\le n$, je největší společný dělitel s vedoucím koeficientem rovným jedné subdeterminantů k-tého řádu polynomické matice $A(\lambda)$, resp. s ní ekvivalentní matice $\bar{A}(\lambda)$. Pak $d_k(\lambda)=\bar{d}_k(\lambda)$.*

16.2.2 Kanonický tvar polynomické matice

Vraťme se teď k zajímavosti, které jsme si všimli v příkladu 16.13. Podařilo se nám zadanou polynomickou matici upravit nejen na diagonální tvar, ale dokonce takový, že každý polynom na diagonále byl dělitelný polynomem na předchozí pozici. Ukážeme, že na takový *kanonický tvar* lze elementárními úpravami převést každou polynomickou matici.

Polynomická matice $K(\lambda)$ řádu n se nazývá *kanonická*, je-li tvaru

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e_h(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \le h \le n\,, \tag{16.18}$$

tj. $\operatorname{diag} K(\lambda) = \big(e_1(\lambda), \dots, e_h(\lambda), 0, \dots, 0\big)$, přičemž polynomy $e_1(\lambda)$ až $e_h(\lambda)$ mají vedoucí koeficient rovný jedné a polynom $e_{i+1}(\lambda)$ je dělitelný polynomem $e_i(\lambda)$ pro $1 \le i \le h-1$. Nulová matice se rovněž považuje za kanonickou.

Věta 16.10: *Každá třída navzájem ekvivalentních polynomických matic (řádu n) obsahuje právě jednu kanonickou matici.*

Tvrzení zní velice jednoduše, ale dokázat je dá trochu práce. Nejprve ukážeme, že každá třída skutečně nějakou kanonickou matici obsahuje. Nulová matice je ve své třídě opět sama, jako tomu bylo u číselných matic, současně byla definitoricky prohlášena za matici kanonickou. Uvažujme o obecné nenulové matici $A(\lambda)$ n-tého řádu. Vyberme libovolnou z těch matic třídy $[A(\lambda)]$, která obsahuje na některé pozici nenulový polynom nejnižšího možného stupně z celé třídy s vedoucím koeficientem 1. (Taková matice určitě existuje. Představme si následující proceduru: v třídě $[A(\lambda)]$ hledáme matici, která obsahuje nenulový polynom $e_1(\lambda)$ stupně nula (číslo). Když taková matice ve třídě nebude, budeme pátrat po matici obsahující polynom prvního stupně. Když ani ta ve třídě nebude, hledáme matici s polynomem druhého stupně, atd. Vedoucí koeficient 1 vyrobíme snadno vynásobením příslušného řádku potřebným faktorem.) V nalezené matici proveďme výměnu řádků a sloupců tak, aby se polynom $e_1(\lambda)$ ocitl na první řádkové a první sloupcové pozici, takže budeme dále pracovat s maticí

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & b_1^2(\lambda) & \dots & b_1^n(\lambda) \\ b_2^1(\lambda) & b_2^2(\lambda) & \dots & b_2^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n^1(\lambda) & b_n^2(\lambda) & \dots & b_n^n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Zajímavé je, že ať byla vybrána kterákoli z matic splňujících požadovanou podmínku (obsahovat polynom nejnižšího stupně z celé třídy), jsou všechny polynomy v prvním řádku i v prvním sloupci dělitelné $e_1(\lambda)$. Vezměme třeba polynom $b_1^2(\lambda)$. Můžeme jej zapsat ve tvaru $b_1^2(\lambda) = q(\lambda)e_1(\lambda) + r(\lambda)$, $q(\lambda)$ je částečný podíl a $r(\lambda)$ zbytek po dělení polynomu $b_1^2(\lambda)$ polynomem $e_1(\lambda)$. Zbytek $r(\lambda)$ má nižší stupeň než dělitel $e_1(\lambda)$. Provedeme-li nyní elementární úpravu matice $B(\lambda)$ spočívající v přičtení $-q(\lambda)$-násobku prvního sloupce k druhému sloupci dostaneme na první řádkové a druhé sloupcové pozici polynom $b_1^2(\lambda) - q(\lambda)e_1(\lambda) = r(\lambda)$. Pokud by bylo $r(\lambda) \neq 0$, dostali bychom se do sporu s výběrem výchozí matice, neboť matice, kterou jsme dostali uvedenou úpravou, by obsahovala nenulový polynom nižšího stupně než $e_1(\lambda)$. Proto je $r(\lambda) = 0$. Analogickou úvahu můžeme provést pro všechny další prvky v prvním řádku i v prvním sloupci. Matici $B(\lambda)$ lze tedy elementárními úpravami převést na tvar

$$B(\lambda) \longrightarrow \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^2(\lambda) & \dots & c_2^n(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_n^2(\lambda) & \dots & c_n^n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

V další fázi si představíme, že elementární úpravy už nebudeme provádět s prvním řádkem ani prvním sloupcem, abychom je zachovali. Stejnou proceduru jakou jsme upravili matici $B(\lambda)$ použijeme pro čtvercovou matici řádu $n-1$, $C(\lambda) = \left(c_i^j(\lambda)\right)$, $2 \leq i, j \leq n$. Postupně tak matici převedeme na diagonální tvar, přičemž v diagonále budou polynomy $e_1(\lambda), e_2(\lambda), \dots, e_h(\lambda)$ s vedoucími koeficienty 1 a na pozicích $h+1 \leq i, j \leq n$ bude nulová matice (pro $h = n$ tato situace nenastane). Ukážeme, že polynom $e_2(\lambda)$ je dělitelný polynomem $e_1(\lambda)$. Platí $e_2(\lambda) = Q(\lambda)e_1(\lambda) + R(\lambda)$, stupeň polynomu $R(\lambda)$ (zbytku) je ostře menší než stupeň polynomu $e_1(\lambda)$. Přičteme-li $-Q(\lambda)$-násobek prvního sloupce k druhému a potom přičteme první řádek k druhému, dostaneme na druhé řádkové a druhé sloupcové pozici polynom $e_2(\lambda) - Q(\lambda)e_1(\lambda) = R(\lambda)$. Je zřejmé, že platí $R(\lambda) = 0$, jinak bychom dospěli ke sporu s volbou výchozí matice. Tuto úvahu můžeme rozšířit na další prvky na diagonále. Dokázali jsme, že každá třída polynomických matic obsahuje kanonickou matici.

Zbývá dokázat, že kanonická matice je v každé třídě jen jedna. Postupovat budeme sporem. Předpokládejme, že v dané třídě existují kanonické matice

$$K_1(\lambda) = \begin{pmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & e_h(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & f_k(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice $K_1(\lambda)$ a $K_2(\lambda)$ náležejí do téže třídy, jsou ekvivalentní (z hlediska elementárních úprav). Vzhledem k větě 16.9 mají shodný systém největších společných dělitelů minorů všech řádů (s vedoucími koeficienty 1). Vyjádříme tento systém pomocí prvků obou matic. Dostaneme

$$\begin{aligned} K_1(\lambda):\ \big(d_1(\lambda),\dots,d_n(\lambda)\big) &= \big(e_1(\lambda), e_1(\lambda)e_2(\lambda),\dots,e_1(\lambda)\dots e_h(\lambda),0,\dots,0\big),\\ K_2(\lambda):\ \big(\bar d_1(\lambda),\dots,\bar d_n(\lambda)\big) &= \big(f_1(\lambda), f_1(\lambda)f_2(\lambda),\dots,f_1(\lambda)\dots f_k(\lambda),0,\dots,0\big), \end{aligned}$$

a porovnáním obou systémů pak rovnost $h = k$. Dosazováním postupně získaných rovností pak

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) &= \bar d_1(\lambda) \implies e_1(\lambda) = f_1(\lambda),\\ d_2(\lambda) &= \bar d_2(\lambda) \implies e_1(\lambda)e_2(\lambda) = e_1(\lambda)f_2(\lambda) \implies e_2(\lambda) = f_2(\lambda),\\ \dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ d_h(\lambda) &= \bar d_h(\lambda) \implies e_1(\lambda)\dots e_{h-1}(\lambda)e_h(\lambda) = e_1(\lambda)\dots e_{h-1}(\lambda)f_h(\lambda) \implies e_h(\lambda) = f_h(\lambda). \end{aligned}$$

Důkaz jednoznačnosti kanonické matice v každé třídě je zároveň návodem alternativního postupu, jak ji získat. Stačí vypočíst subdeterminanty všech řádů kterékoli matice v dané třídě, určit systém $\big(d_1(\lambda),\dots,d_n(\lambda)\big)$ a z něj prvky kanonické matice $e_1(\lambda) = d_1(\lambda)$, $e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{e_1(\lambda)}$, …, $e_h(\lambda) = \frac{d_h(\lambda)}{d_{h-1}(\lambda)}$. I když je tato metoda poměrně pracná, je naprosto rutinní, na rozdíl od převodu výchozí matice na kanonický tvar elementárními úpravami, který vyžaduje přece jen jistou nápaditost. Samozřejmě je možné, a také dost praktické, obě metody kombinovat: pomocí elementárních úprav dospějeme k matici, která obsahuje co nejvíce nul, a v určité fázi přejdeme k metodě dělitelů. Ať je postup nalezení kanonické matice jakýkoli, vede vždy k jedinému výsledku.

Prvky na diagonále kanonické matice proto nazýváme *invariantní faktory* dané třídy polynomických matic.

Příklad 16.14: A co jednotková matice?

V příkladu 16.1 jsme posuzovali jinou relaci ekvivalence čtvercových matic n-tého řádu, a to jejich podobnost. Role jednotkové matice v rámci této relace byla velmi jednoduchá. Třída obsahující jednotkovou matici obsahovala právě jen ji. V případě relace ekvivalence matic z hlediska elementárních úprav je situace jiná. Posuzujeme-li tuto relaci pouze na množině číselných matic $\mathcal{M}(n/n)$, víme, že třída obsahující jednotkovou matici obsahuje také všechny regulární matice řádu n. Rozšíříme-li úvahy na matice polynomické, je jednotková matice maticí kanonickou (přesvědčte se, že vyhovuje definici). Zjistíme možná překvapivou věc: matice, do kterých bychom to vůbec neřekli, jsou ekvivalentní s jednotkovou maticí. Zkuste určit kanonický tvar například pro matici

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \mathrm{i}\lambda & -\mathrm{i}\lambda^3 + (1+2\mathrm{i})\lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ 1 & -\mathrm{i}\lambda + 2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Nejjednodušeji to půjde pomocí dělitelů — stačí spočítat $\det A(\lambda)$.

Polynomické matice, které jsou ekvivalentní (z hlediska elementárních úprav) s jednotkovou maticí, se nazývají *unimodulární.*

Typickým příkladem unimodulárních matic jsou matice elementární (dokažte). Snadno si také sami dokážete vlastnosti unimodulárních matic:

- Matice $U(\lambda)$ je unimodulární právě tehdy, je-li její determinant nenulové číslo.
- Libovolná regulární číselná matice je unimodulární.
- Součin unimodulárních matic je unimodulární matice.
- Matice $U(\lambda)$ je unimodulární právě tehdy, když existuje polynomická matice $V(\lambda)$ taková, že platí $U(\lambda)V(\lambda) = E$. Matice $V(\lambda)$ je pak rovněž unimodulární a nazýváme ji *inverzní* matice k matici $U(\lambda)$, $V(\lambda) = U^{-1}(\lambda)$.
- Matice $U(\lambda)$ je unimodulární právě tehdy, je-li konečným součinem elementárních matic.

Na základě poslední vlastnosti můžeme přeformulovat kritérium ekvivalence polynomických matic (věta 16.8):

Polynomické matice $A(\lambda)$ a $\overline{A}(\lambda)$ (řádu n) jsou ekvivalentní právě když existují unimodulární matice $U(\lambda)$ a $V(\lambda)$ tak, že platí $\overline{A}(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda)$.

16.2.3 Chvilka s maticovými polynomy

Maticový polynom, nebo polynomická matice — není to jedno? Ve výsledku ano. Interpretace polynomických matic jako *maticových polynomů*, tj. polynomů, jejichž koeficienty jsou číselné matice, bude hned v následujícím odstavci velice užitečná.

Příklad 16.15: Maticové polynomy

Převést polynomickou matici na maticový polynom, nebo opačně, je jednoduché. Ukážeme to na matici z příkladu 16.13.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 - 12\lambda + 16 & 2-\lambda & 2\lambda^2 - 12\lambda + 17 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2 - 6\lambda + 7 & 2-\lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -12 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & -6 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 16 & 2 & 17 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Maticovým polynomem stupně k a řádu n v proměnné λ rozumíme výraz

$$A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0\,, \tag{16.19}$$

kde $A_j \in \mathcal{M}(n/n)$, $0 \leq j \leq k$, jsou číselné matice (nad $\mathbf{C}$, resp. $\mathbf{R}$, podle kontextu), přičemž matice A_k je nenulová.

Pro maticové polynomy můžeme definovat stejné operace jako pro polynomy „obyčejné“, s tím rozdílem, že koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné λ jsou číselné matice, jejichž řád je shodný s řádem polynomu (obyčejný polynom s číselnými koeficienty je z pohledu maticových polynomů polynomem prvního řádu). Pro matice máme ovšem definovány operace sčítání, násobení skalárem i násobení, takže maticové polynomy můžeme sčítat, násobit skalárem i násobit mezi sebou. V případě násobení musíme dávat pozor na nekomutativnost maticového násobení, takže ani násobení maticových polynomů nebude obecně komutativní. Maticový polynom můžeme vyčíslit nejen pro jakoukoli číselnou hodnotu proměnné λ, ale dokonce můžeme za λ dosadit matici (téhož řádu, jako je řád polynomu).

Nechť $A(\lambda)$ je maticový polynom řádu n daný vztahem (16.19) a C nechť je číselná matice řádu n. *Levou*, resp. *pravou hodnotou* maticového polynomu $A(\lambda)$ v maticovém argumentu C rozumíme matici

$$A_L(C) = C^kA_k + C^{k-1}A_{k-1} + \cdots + C^2A_2 + CA_1 + A_0\,, \tag{16.20}$$

resp.

$$A_P(C) = A_kC^k + A_{k-1}C^{k-1} + \cdots + A_2C^2 + A_1C + A_0\,. \tag{16.21}$$

„Obyčejné“ polynomy můžeme mezi sebou také dělit. Pro dělení polynomu $a(\lambda)$ stupně k polynomem $b(\lambda)$ stupně m platí (to víte už ze střední školy), že existují jednoznačně polynomy $q(\lambda)$ (částečný podíl) a $r(\lambda)$ (zbytek) tak, že $a(\lambda) = q(\lambda)b(\lambda) + r(\lambda)$, přičemž stupeň polynomu $r(\lambda)$ je menší než stupeň dělitele, $\operatorname{st} r(\lambda) < m$. Podobně můžeme uvažovat i o dělení maticových polynomů, musíme však respektovat nekomutativnost maticového násobení. Dostaneme tak dva vztahy pro částečný podíl a zbytek, levý a pravý. Proveďme tuto úvahu pořádně. Uvažujme o maticovém polynomu $A(\lambda)$ stupně k (dělenec) a maticovém polynomu $B(\lambda)$ stupně m (dělitel). Jde o to, jaké řešení mají rovnosti

$$A(\lambda) = Q_P(\lambda)B(\lambda) + R_P(\lambda), \quad A(\lambda) = B(\lambda)Q_L(\lambda) + R_L(\lambda)\,, \tag{16.22}$$

vzhledem k polynomům $Q_P(\lambda)$ a $R_P(\lambda)$, resp. $Q_L(\lambda)$ a $R_L(\lambda)$. Zdá se, že věc bude docela jednoduchá. Polynomy $Q_P(\lambda)$ a $R_P(\lambda)$, resp. $Q_L(\lambda)$ a $R_L(\lambda)$ rozepíšeme pomocí neznámých maticových koeficientů, provedeme násobení naznačené v rovnicích (16.22), porovnáme maticové koeficienty na levé a pravé straně a řešením získaných rovnic dostaneme maticové koeficienty neznámých polynomů. Pro ilustraci to provedeme pro případ, že polynom $B(\lambda)$ je pouze prvního stupně. V dalších úvahách ani víc potřebovat nebudeme.

Příklad 16.16: Dělení maticových polynomů pro dělitele prvního stupně

Uvažujme o polynomech n-tého řádu. Rozepišme dělence (maticový polynom $A(\lambda)$ stupně k) a dělitele (maticový polynom $B(\lambda)$ stupně 1) pomocí maticových koeficientů

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0, \quad B(\lambda) = B_1\lambda + B_0$$

a zabývejme se třeba hledáním polynomů $Q_P(\lambda)$ a $R_P(\lambda)$. Triviální případ $k = 0$ není třeba rozebírat, neboť polynomy $Q_P(\lambda)$, $R_P(\lambda)$, $Q_L(\lambda)$ a $R_L(\lambda)$ dostaneme okamžitě (zapište je). Přepokládejme tedy, že platí $k \geq 1$. Je zřejmé, že polynom $Q_P(\lambda)$ je stupně $(k-1)$. Polynom $R_P(\lambda)$ musí být stupně 0 (stupeň dělitele je 1), takže je pouze číselnou maticí, $R_P(\lambda) = R_P$. Rovnici (16.22) pro $Q_P(\lambda)$ a $R_P(\lambda)$ zapíšeme ve tvaru

$$\begin{gathered} A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_2\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = \\ = (Q_{k-1}\lambda^{k-1} + Q_{k-2}\lambda^{k-2} + \cdots + Q_2\lambda^2 + Q_1\lambda + Q_0)(B_1\lambda + B_0) + R_P\,, \end{gathered}$$

pravou stranu roznásobíme (pozor na nekomutativitu násobení matic) a porovnáme maticové koeficienty u stejných mocnin. Dostaneme sadu rovnic

$$\begin{aligned} A_k &= Q_{k-1}B_1, \\ A_{k-1} &= Q_{k-2}B_1 + Q_{k-1}B_0, \\ A_{k-2} &= Q_{k-3}B_1 + Q_{k-2}B_0, \\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{k-j} &= Q_{k-j-1}B_1 + Q_{k-j}B_0, \qquad (16.23) \\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_2 &= Q_1B_1 + Q_2B_0, \\ A_1 &= Q_0B_1 + Q_1B_0, \\ A_0 &= Q_0B_0 + R_P\,. \qquad (16.24) \end{aligned}$$

K pozdějším úvahám budeme potřebovat pouze zbytek R_P. Ten je obsažen až v poslední rovnici, z níž jej lze jednoduše vyjádřit, $R_P = A_0 - Q_0B_0$. Neznáme však matici Q_0, která je obsažena v předposlední rovnici, v ní však zase neznáme Q_1, atd. Proto bude lepší postupovat od první rovnice k poslední. Z první rovnice můžeme přímo získat matici Q_{k-1}, ale pozor, pouze za předpokladu, že matice B_1 je regulární. To je omezující podmínka. bez jejíhož splnění nelze dělení provést. Předpokládejme proto, že platí, a postupně pišme řešení jednotlivých rovnic (opět pozor na nekomutativnost násobení matic). Z první rovnice vypočteme Q_{k-1}, dosadíme do druhé, vypočteme Q_{k-2}, dosadíme do třetí, vypočteme Q_{k-3}, atd., až dospějeme na konec řetězce rovnic (16.23) a vyjádříme R_P. Trochu pracné, ale myšlenkově nenáročné. Dostaneme (všechny kroky propočtěte)

$$\begin{aligned} Q_{k-1} &= A_kB_1^{-1}, \\ Q_{k-2} &= (A_{k-1} - Q_{k-1}B_0)B_1^{-1} \;=\; (A_{k-1} - A_kB_1^{-1}B_0)B_1^{-1} \;=\; \left[A_{k-1} + A_k(-B_1^{-1}B_0)\right]B_1^{-1}, \\ Q_{k-3} &= (A_{k-2} - Q_{k-2}B_0)B_1^{-1} = (A_{k-2} - (A_{k-1} - Q_{k-1}B_0)B_1^{-1}B_0)B_1^{-1} \;= \\ &= \left[A_{k-2} + A_{k-1}(-B_1^{-1}B_0) + A_k(-B_1^{-1}B_0)^2\right]B_1^{-1}, \\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_{k-j} &= \left[A_{k-j+1} + A_{k-j+2}(-B_1^{-1}B_0) + \cdots + A_k(-B_1^{-1}B_0)^{j-1}\right]B_1^{-1}, \\ \ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left[A_2 + A_3(-B_1^{-1}B_0) + A_4(-B_1^{-1}B_0)^2 + \cdots + A_k(B_1^{-1}B_0)^{k-2}\right] B_1^{-1},\\
Q_0 &= \left[A_1 + A_2(-B_1^{-1}B_0) + A_3(-B_1^{-1}B_0)^2 + \cdots + A_k(B_1^{-1}B_0)^{k-1}\right] B_1^{-1},\\
R_P &= A_0 + A_1(-B_1^{-1}B_0) + A_2(-B_1^{-1}B_0)^2 + \cdots + A_{k-1}(-B_1^{-1}B_0)^{k-1} + A_k(-B_1^{-1}B_0)^k.
\end{aligned}$$

Z poslední rovnice vidíme, že zbytek R_P je pravou hodnotou maticového polynomu $A(\lambda)$ v maticovém argumentu $(-B_1^{-1}B_0)$. Podobně bychom získali zbytek R_L, který je levou hodnotou maticového polynomu $A(\lambda)$ v maticovém argumentu $(-B_0B_1^{-1})$. Postup, který jsme použili, také dokazuje, že částečné podíly i zbytky jsou určeny jednoznačně. Stejně bychom postupovali i kdyby byl stupeň dělitele obecný.

Věta 16.11 (Dělení maticových polynomů): *Nechť $A(\lambda)$ a $B(\lambda)$ jsou maticové polynomy n-tého řádu a vedoucí koeficient polynomu $B(\lambda)$ je regulární matice.*

- *Pak existují jednoznačně maticové polynomy (n-tého řádu) $Q_P(\lambda)$ a $R_P(\lambda)$, resp. $Q_L(\lambda)$ a $R_L(\lambda)$, zvané pravý, resp. levý částečný podíl a zbytek po dělení polynomu $A(\lambda)$ polynomem $B(\lambda)$, takové, že platí*

$$A(\lambda) = Q_P(\lambda)B(\lambda) + R_P(\lambda), \quad A(\lambda) = B(\lambda)Q_L(\lambda) + R_L(\lambda),$$

  přičemž $\operatorname{st} R_P(\lambda) < \operatorname{st} B(\lambda)$ *a* $\operatorname{st} R_L(\lambda) < \operatorname{st} B(\lambda)$.
- *Je-li $B(\lambda) = B_1\lambda + B_0$, kde B_1 je regulární matice, pak*

$$R_P = A_P(-B_1^{-1}B_0), \quad R_L = A_L(-B_0B_1^{-1}), \tag{16.25}$$

- *Speciálně pro $B(\lambda) = B - \lambda E$, kde B je číselná matice, je*

$$R_P = A_P(B), \quad R_L = A_L(B), \tag{16.26}$$

  neboť $B_1 = -E$, $B_0 = B$, tj. $-B_1^{-1}B_0 = -B_0B_1^{-1} = B$.

K čemu bude dělení maticových polynomů a tyto speciální výsledky dobré, hned uvidíme.

16.2.4 Jak poznat podobné matice a najít podobnostní transformaci

Nezapomínejme, proč jsme se do problematiky polynomických matic a maticových polynomů pustili. Byla to přípravná fáze potřebná pro nalezení kritérií podobnosti číselných matic. Zjistit, zda dvě číselné matice A a B jsou podobné, „přímou“ cestou, založenou na hledání prvků matice realizující podobnostní transformaci $B = TAT^{-1}$, není dobře možné ani pro matice nízkých řádů. Co třeba matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}? \tag{16.27}$$

Jsou podobné, nebo ne? Existuje regulární matice $T = (\tau_i^j)$, $S = T^{-1} = (\sigma_i^j)$, $1 \leq i, j \leq 2$, tak, že platí

$$\begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 \\ \tau_2^1 & \tau_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}?$$

Na první pohled o podobnosti matic nezjistíme nic, hledat prvky matice T srovnáním maticových prvků levé a pravé strany je neschůdné. Se znalostmi z odstavce 16.1 však můžeme otázku podobnosti zodpovědět snadno. Zkrátka najdeme Jordanovy matice odpovídající maticím A a B. Budou-li shodné, jsou matice A a B podobné. Problematiku Jordanovy reprezentace jsme v odstavci 16.1 řešili geometricky, pomocí vlastností lineárních operátorů ve vektorových prostorech. Nyní se pohybujeme v teorii matic a k Jordanově normálnímu tvaru matice v rámci této teorie teprve směřujeme. Potřebujeme formulovat kritérium podobnosti přímo pro matice. Toto kritérium je překvapivě jednoduché a umožňuje rychle rozhodnout o podobnosti matic v praktických situacích.

Věta 16.12 (Základní věta o podobnosti matic): *Číselné matice A a B řádu n jsou podobné právě když jsou jejich charakteristické matice $(A - \lambda E)$ a $(B - \lambda E)$ ekvivalentní (z hlediska elementárních úprav).*

Vynikající věta! Umožňuje problém, který se jeví jako obtížný, převést na problém v podstatě triviální — zjištění kanonického tvaru polynomických matic prvního stupně. Doposud se nám mohlo zdát, že podobnost číselných matic je mnohem silnější vlastnost než ekvivalence polynomických matic založená na pojmu elementárních úprav. Příčinou tohoto nesprávného odhadu je zřejmě jednoduchost procedury převodu polynomické matice na kanonický tvar. Dokázat směr tvrzení vycházející z předpokladu podobnosti matic je snadné. Platí-li $B = TAT^{-1}$ pro jistou regulární matici T, pak

$$B - \lambda E = TAT^{-1} - \lambda E = T(A - \lambda E)T^{-1}\,.$$

Matice T a T^{-1} jsou číselné regulární matice. Jako takové jsou konečnými součiny elementárních matic (jinými slovy — jsou unimodulární). Podle kritéria ekvivalence polynomických matic (věta 16.8) jsou matice $(A - \lambda E)$ a $(B - \lambda E)$ ekvivalentní.

A teď obráceně. Předpokládejme, že matice $(A - \lambda E)$ a $(B - \lambda E)$ jsou ekvivalentní. Podle věty 16.8 existují unimodulární matice $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ tak, že platí

$$B - \lambda E = U(\lambda)(A - \lambda E)V(\lambda)\,. \tag{16.28}$$

A v tuto chvíli využijeme poznatky o dělení maticových polynomů. Matice $U(\lambda)$ a $V(\lambda)$ rozepíšeme do tvaru

$$U(\lambda) = (B - \lambda E)Q_1(\lambda) + R_1, \quad V(\lambda) = Q_2(\lambda)(B - \lambda E) + R_2, \quad \operatorname{st} R_1 = \operatorname{st} R_2 = 0\,,$$

a vyjádříme zbytky R_1 a R_2, jimiž jsou číselné matice:

$$R_1 = U(\lambda) - (B - \lambda E)Q_1(\lambda), \quad R_2 = V(\lambda) - Q_2(\lambda)(B - \lambda E)\,.$$

Budeme zkoumat součin $R_1(A - \lambda E)R_2$ — za chvíli uvidíme, proč. Využijeme při tom vztah (16.28) a vztahy z něj vyplývající

$$U(\lambda)(A - \lambda E) = (B - \lambda E)V^{-1}(\lambda), \quad (A - \lambda E)V(\lambda) = U^{-1}(\lambda)(B - \lambda E)\,,$$

a trochu si započítáme:

$$R_1(A - \lambda E)R_2 = \Big[U(\lambda) - (B - \lambda E)Q_1(\lambda)\Big](A - \lambda E)[V(\lambda) - Q_2(\lambda)(B - \lambda E)] =$$

$$= U(\lambda)(A - \lambda E)V(\lambda) - (B - \lambda E)Q_1(\lambda)(A - \lambda E)V(\lambda) - U(\lambda)(A - \lambda E)Q_2(\lambda)(B - \lambda E) +$$

$$+ (B - \lambda E)Q_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_2(\lambda)(B - \lambda E) =$$

$$= (B - \lambda E) - (B - \lambda E)Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda)(B - \lambda E) - (B - \lambda E)V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda)(B - \lambda E) +$$

$$+ (B - \lambda E)Q_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_2(\lambda)(B - \lambda E) =$$

$$= (B - \lambda E)\Big[E - \Big(Q_1(\lambda)U^{-1}(\lambda) + V^{-1}(\lambda)Q_2(\lambda) - Q_1(\lambda)(A - \lambda E)Q_2(\lambda)\Big)(B - \lambda E)\Big]\,.$$

Po tomto, možná trochu pracném výpočtu přijde elegantní úvaha. Na levé straně je maticový polynom prvního stupně. Maticový polynom na pravé straně proto musí také být prvního stupně. Jenže pravá strana má tvar $(B - \lambda E)\Big[E - (\ldots)(B - \lambda E)\Big]$. Je tedy jasné, že polynom vyznačený v kulaté závorce tečkami je nulový. Dostáváme

$$R_1(A - \lambda E)R_2 = B - \lambda E \implies R_1R_2 = E,\;\; R_1AR_2 = B\,.$$

Matice R_1 a R_2 vycházejí jako navzájem inverzní, takže při označení $R_1 = T$ hned vidíme, že $B = TAT^{-1}$. Matice A a B jsou podobné. Současně získáváme i matici T, která realizuje podobnostní transformaci,

$$T = R_1 = U_L(B), \quad T^{-1} = R_2 = V_P(B)\,. \tag{16.29}$$

V následujícím příkladu ukážeme, jak prakticky rozhodnout o podobnosti matic a v kladném případě najít podobnostní transformaci.

Příklad 16.17: Jak najít podobnostní transformaci

Proceduru, na níž jsme založili důkaz základní věty o podobnosti matic, nyní použijeme pro matice A a B zadané vztahy (16.27). Jejich charakteristické matice jsou

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{pmatrix},\quad B-\lambda E=\begin{pmatrix}-10-\lambda & -4\\ 26 & 11-\lambda\end{pmatrix}.$$

V rychlosti můžeme zjistit jejich kanonické tvary pomocí systému dělitelů. Kdyby totiž matice nebyly podobné, nemuseli bychom se namáhat s hledáním podobnostní transformace. Největší společný dělitel subdeterminantů prvního řádu s vedoucím koeficientem 1 je roven jedné v případě obou matic (obsahují totiž číselné nenulové subdeterminanty prvního řádu). Stačí tedy spočítat determinanty

$$\det(A-\lambda E)=(\lambda-3)(\lambda+2),\quad \det(B-\lambda E)=(-10-\lambda)(11-\lambda)+104=(\lambda-3)(\lambda+2)\,.$$

Kanonický tvar obou charakteristických matic je stejný, matice jsou podobné. Konkrétně je

$$K_{A-\lambda E}=K_{B-\lambda E}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (\lambda-3)(\lambda+2)\end{pmatrix}.$$

Abychom našli podobnostní transformaci metodou popsanou v tomto odstavci, musíme bohužel najít matice $U(\lambda)$ a $V(\lambda)$ vystupující ve vztahu (16.28). Po vzoru příkladu 16.13 nejprve zaznamenáme elementární úpravy, které převádějí charakteristické matice na kanonický tvar. I když je kanonický tvar jednoznačný, elementární úpravy, které k němu vedou, jednoznačné nejsou. Každý čtenář může postupovat jinak a vůbec nemusí sledovat příklad postupu, který uvádíme.

$$(E\,|\,A-\lambda E\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & -2-\lambda & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3-\lambda & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & (3-\lambda)(\lambda+2) & 3-\lambda & 2+\lambda & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ \lambda-3 & 1 & -\lambda^2+\lambda+6 & 0 & 2+\lambda & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ \lambda-3 & 1 & 0 & \lambda^2-\lambda-6 & 1 & -\lambda-2\end{array}\right),$$

$$(E\,|\,B-\lambda E\,|\,E)=\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & -10-\lambda & -4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 26 & 11-\lambda & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & -10-\lambda & -4 & 1 & 0\\ -\frac14(\lambda-11) & 1 & \frac14(\lambda^2-\lambda-6) & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & -40-4\lambda & -4 & 4 & 0\\ -\frac14(\lambda-11) & 1 & \lambda^2-\lambda-6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0\\ -\frac14(\lambda-11) & 1 & \lambda^2-\lambda-6 & 0 & -10-\lambda & 1\end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ -\frac{1}{4}(\lambda-11) & 1 & 0 & \lambda^2-\lambda-6 & 1 & -10-\lambda \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -\frac{1}{4}(\lambda-11) & 1 & 0 & \lambda^2-\lambda-6 & -\frac{1}{4} & -\lambda-10 \end{array}\right).$$

Získali jsme matice realizující převod charakteristických matic na jejich společný kanonický tvar

$$K_{A-\lambda E}(\lambda) = K_{B-\lambda E}(\lambda) = K(\lambda)\,,$$

$$K_{A-\lambda E}(\lambda) = U_A(\lambda)(A-\lambda E)V_A(\lambda),\;\; U_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda-3 & 1 \end{pmatrix}\;\; V_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda-2 \end{pmatrix},$$

$$K_{B-\lambda E}(\lambda) = U_B(\lambda)(B-\lambda E)V_B(\lambda),\;\; U_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{4}(\lambda-11) & 1 \end{pmatrix},\;\; V_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -\lambda-10 \end{pmatrix}.$$

Ještě u konce nejsme. Je třeba vypočítat matice $U(\lambda)$ a $V(\lambda)$ realizující vztah (16.28), tj.

$$B-\lambda E = U_B^{-1}(\lambda)K(\lambda)V_B^{-1}(\lambda) = U_B^{-1}(\lambda)U_A(\lambda)(A-\lambda E)V_A(\lambda)V_B^{-1}(\lambda)\,.$$

Platí (proveďte podrobně všechny výpočty: určete nejprve $U_B^{-1}(\lambda)$, $V_B^{-1}(\lambda)$ a potom potřebné součiny)

$$U(\lambda) = U_B^{-1}(\lambda)U_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4}(5\lambda-23) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{23}{4} & 1 \end{pmatrix},$$

$$V(\lambda) = V_A(\lambda)V_B^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4}(5\lambda+42) & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{21}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Zbývá vypočítat levou hodnotu maticového polynomu $U(\lambda)$ v maticovém argumentu B a pravou hodnotu maticového polynomu $V(\lambda)$ v tomtéž argumentu. Dostaneme (proveďte podrobně)

$$T = U_L(B) = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{23}{4} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = V_P(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{21}{2} & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proveďte kontrolu $TT^{-1} = T^{-1}T = E$. Dostali jsme jednu z možných podobnostních transformací $B = TAT^{-1}$. Přesvědčte se, že třeba také $B = QAQ^{-1}$, kde

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Není to žádné překvapující zjištění. O nejednoznačnosti podobnostní transformace víme.

Podobnou úlohu jsme řešili v příkladu 16.12 pomocí „geometrického“ přístupu. Vyzkoušejte „geometrický“ způsob také pro matice A, B z tohoto příkladu.

16.2.5 Jordanův normální tvar matice

Konečně přistupme k nalezení Jordanova tvaru J dané číselné matice A. Definici Jordanovy matice k dispozici máme. Díky základní větě o podobnosti matic víme, že matice A je podobná nějaké Jordanově matici J právě tehdy, mají-li jejich charakteristické matice stejný kanonický tvar. Zaměřme se proto na úvahy o tom, jak bude vypadat kanonický tvar matice $(J-\lambda E)$, je-li matice J charakterizována tabulkou v odstavci 16.1.1. Nejprve zjistíme kanonický tvar matice $(J^{(s)}(\lambda_0) - \lambda E)$, kde $J^{(s)}(\lambda_0)$ je Jordanova submatice řádu s příslušná hodnotě λ_0,

$$J^{(s)}(\lambda_0) - \lambda E = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0-\lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0-\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_0-\lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_0-\lambda \end{pmatrix}}_{\text{řád matice}=s}.$$

Určení jejího kanonického tvaru je snadné. Její determinant je roven součinu prvků v hlavní diagonále, $\det(J^{(s)}(\lambda_0)-\lambda E) = (-1)^s(\lambda-\lambda_0)^s$, takže $d_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^s$. A teď subdeterminanty $(s-1)$-tého řádu. Vypustíme-li z matice poslední řádek a první sloupec, dostaneme submatici $(s-1)$-tého řádu, která je dolní trojúhelníková a má v diagonále samé jedničky. Její determinant je jednotkový, a proto $d_{n-1}(\lambda) = 1$. Zbylým členům systému dělitelů tak nezbývá, než být také jednotkové. Kanonický tvar matice $(J^{(s)}(\lambda_0) - \lambda E)$ je

$$J^{(s)}(\lambda_0) - \lambda E \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & (\lambda-\lambda_0)^s \end{pmatrix}}_{\text{řád matice}=s}.$$

Elementárními úpravami prováděnými vždy pouze s příslušnými řádky a sloupci lze převést charakteristickou matici $(J-\lambda E)$ Jordanovy matice J na tvar, v němž jsou charakteristické matice všech Jordanových submatic v kanonickém tvaru. Jenže tento tvar matice $(J-\lambda E)$ stále není tvarem kanonickým. Je sice diagonální a všechny polynomy v diagonále mají vedoucí koeficient roven jedné, ale v případě různých hodnot, například $\lambda_1 \neq \lambda_2$, jsou polynomy $(\lambda - \lambda_1)^{s_1}$, $s_1 \in \{k_{11}, \dots, k_{1q_1}\}$, a $(\lambda-\lambda_2)^{s_2}$, $s_2 \in \{k_{21}, \dots, k_{1q_2}\}$, nesoudělné. Diagonála takto upravené matice $(J - \lambda E)$ vypadá následovně:

$$\operatorname{diag}(J-\lambda E) = \Big[\underbrace{1,\dots,1,(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}}_{k_{11}},\dots,\underbrace{1,\dots,1,(\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_1}}}_{k_{1q_1}},\underbrace{1,\dots,1,(\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}}_{k_{21}},$$

$$\dots,\underbrace{1,\dots,1,(\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_2}}}_{k_{2q_2}},\dots,\underbrace{1,\dots,1,(\lambda-\lambda_r)^{k_{r1}}}_{k_{r1}},\dots,\underbrace{1,\dots,1,(\lambda-\lambda_r)^{k_{rq_r}}}_{k_{rq_r}}\Big].$$

K tomu, abychom úpravu na kanonický tvar dokončili, nám pomůže následující jednoduchý příklad.

Příklad 16.18: Co s nesoudělnými polynomy?

Dejme tomu, že polynomická matice $A(\lambda)$ je řádu $n = 2$ a má tvar

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & 0 \\ 0 & q(\lambda) \end{pmatrix},$$

kde $p(\lambda)$ a $q(\lambda)$ jsou nesoudělné polynomy s jednotkovými vedoucími koeficienty. Proto je $d_1(\lambda) = 1$ a $d_2(\lambda) = = p(\lambda)q(\lambda)$, takže kanonický tvar matice $A(\lambda)$ je

$$K_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p(\lambda)q(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Kanonický tvar matice $(J - \lambda E)$ teď můžeme napsat okamžitě pomocí tabulky z odstavce 16.1.1 a následujícího schématu: Schéma je doplněno jedničkami, jsou-li vyčerpány všechny

λ_1	q_1	$(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}$	$(\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}$	$\dots(\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_r}}$	$\dots\dots$	$(\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_j}}$	$\dots(\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_2}}$	$\dots\dots$	$(\lambda-\lambda_1)^{k_{1q_1}}$
λ_2	q_2	$(\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}$	$(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}$	$\dots(\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_r}}$	$\dots\dots$	$(\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_j}}$	$\dots(\lambda-\lambda_2)^{k_{2q_2}}$	$1 \quad \dots$	1
λ_j	q_j	$(\lambda-\lambda_j)^{k_{j1}}$	$(\lambda-\lambda_j)^{k_{j2}}$	$\dots(\lambda-\lambda_j)^{k_{jq_r}}$	$1 \quad \dots$	1	$\dots \quad 1$	$\dots\dots\dots$	1
λ_r	q_r	$(\lambda-\lambda_j)^{k_{r1}}$	$(\lambda-\lambda_j)^{k_{r2}}$	$\dots(\lambda-\lambda_j)^{k_{rq_r}}$	$1 \quad \dots$	1	$\dots \quad 1$	$\dots\dots\dots$	1
		$\downarrow$	$\downarrow$			$\downarrow$			$\downarrow$
		$e_n(\lambda)$	$e_{n-1}(\lambda)$	$\dots\dots$		$e_{n-q_j+1}(\lambda)$	$\dots\dots\dots$		$e_{n-q_1+1}(\lambda)$

Obrázek 16.6 Schéma pro vytvoření kanonického tvaru matice $J - \lambda E$.

polynomy pro dané λ_j, $1 \le j \le r$. Poslední invariantní faktor kanonického tvaru je součinem nesoudělných polynomů s nejvyššími mocninami, další pak součinem nesoudělných polynomů s nižšími (popřípadě stejnými) mocninami, atd.,

$$\begin{aligned} e_n(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{21}}\dots(\lambda-\lambda_r)^{k_{r1}}, \\ e_{n-1}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{12}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\dots(\lambda-\lambda_r)^{k_{r2}}, \\ \dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ e_{n-\alpha+1}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{1\alpha}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2\alpha}}\dots(\lambda-\lambda_r)^{k_{r\alpha}}, \\ \dots &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{16.30}$$

Obecně je

$$e_{n-\alpha+1}(\lambda) = \Pi_{j=1}^{r}(\lambda-\lambda_j)^{k_{j\alpha}}, \quad 1 \le \alpha \le n,$$

přičemž klademe $k_{j\alpha} = 0$, je-li $\alpha > q_j$. Mocniny $(\lambda-\lambda_1)^{k_{1\alpha}}$, $(\lambda-\lambda_2)^{k_{2\alpha}}$, ..., $(\lambda-\lambda_r)^{k_{r\alpha}}$ se nazývají *elementární dělitelé* polynomu $e_{n-\alpha+1}(\lambda)$.

Příklad 16.19: Kanonický tvar matice $(J-\lambda E)$ prakticky

Najdeme kanonický tvar matice $(J-\lambda E)$, kde J je Jordanova matice z příkladu 16.2. Sestavíme pro ni schéma z obrázku 16.6,

hodnota	počet sestupně	elementární dělitelé		
$\lambda_1 = 3$	$q_1 = 3$	$(\lambda-3)^3$	$(\lambda-3)^2$	$(\lambda-3)^2$
$\lambda_2 = 5$	$q_2 = 2$	$(\lambda-5)^4$	$(\lambda-5)^1$	1

a vypočteme invariantní faktory,

$$\begin{aligned} e_{12}(\lambda) &= (\lambda-3)^3(\lambda-5)^4, \\ e_{11}(\lambda) &= (\lambda-3)^2(\lambda-5)^1, \\ e_{10}(\lambda) &= (\lambda-3)^2, \\ e_9(\lambda) &= e_8(\lambda) = \dots = e_1(\lambda) = 1\,. \end{aligned} \tag{16.31}$$

Příklad 16.20: Jordanův normální tvar matice

Jordanův normální tvar číselné matice A zjistíme snadno. Najdeme kanonický tvar matice $(A-\lambda E)$ a z něj Jordanovu matici přímo „přečteme“:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -7 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -6-\lambda & 9 & -7 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3-\lambda & -1 \\ 5 & -6 & 5 & -\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{pmatrix},$$

(převod na kanonický tvar podrobně proveďte). Z kanonického tvaru matice $(A - \lambda E)$ vidíme, že Jordanovy submatice Jordanova normálního tvaru matice A budou příslušet hodnotám $\lambda_1 = 1$ ($q_1 = 2$, řády $k_{11} = 2$, $k_{12} = 1$) a $\lambda_2 = -2$ ($q_2 = 1$, řád $k_{21} = 1$). Jordanova matice příslušná matici A je

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Jak jsme viděli, můžeme z kanonického tvaru matice $(A - \lambda E)$ hned přečíst, jak vypadá Jordanův normální tvar matice A. A také hned poznáme, zda matici A lze diagonalizovat, tj. zda lineární operátor reprezentovaný v nějaké bázi maticí A má diagonální reprezentaci. Nutnou a postačující podmínkou pro to je, aby poslední invariantní faktor $e_n(\lambda)$ kanonického tvaru matice $(A - \lambda E)$ měl pouze jednonásobné kořeny. Pak budou všechny bloky Jordanovy matice prvního řádu (Jordanova matice bude diagonální).

Matici $A \in \mathcal{M}(n/n)$ nad $\mathbf{C}$ lze převést podobnostní transformací na diagonální tvar právě tehdy, má-li poslední invariantní faktor $e_n(\lambda)$ kanonického tvaru její charakteristické matice pouze jednonásobné kořeny.

Pozn: Pozor! To, že má polynom $e_n(\lambda)$ pouze jednonásobné kořeny, neznamená, že operátor reprezentovaný maticí A má jednoduché spektrum. (Jednoduché spektrum má operátor tehdy, má-li jeho charakteristický polynom pouze jednonásobné kořeny.)

K tomu, abychom právě vysloveného kritéria existence diagonální reprezentace operátoru mohli využít, musíme najít kanonický tvar matice $(A - \lambda E)$. Není to sice příliš mnoho práce, ale mohli bychom si ji ušetřit, pokud bychom dokázali poznat existenci diagonální reprezentace přímo ze samotné matice A. Umožní nám to například následující tvrzení, dokázané už v druhém dílu, věta 4.5:

Matici $A \in \mathcal{M}(n/n)$ nad $\mathbf{C}$ lze převést podobnostní transformací na diagonální tvar právě tehdy, platí-li pro každou z vlastních hodnot $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$:

$$h(A - \lambda_i E) = n - k_i\,.$$

Na závěr odstavce se ještě na chvíli vraťme k unitárním prostorům (tj. vektorovým prostorům nad $\mathbf{C}$ opatřeným skalárním součinem). Této problematice se sice budeme podrobněji věnovat v odstavci 16.3.3, ale jedno velmi užitečné tvrzení uvedeme již nyní pro čtenáře, kteří se rozhodnou studium odstavce 16.3 odložit na později nebo vynechat úplně.

V unitárních prostorech jsme používali ortonormální báze (tvořené ortogonálními a normovanými vektory). Matice přechodu mezi ortonormálními bázemi je vždy *unitární*, tj.

$$T^{-1} = T^{T*} \,.$$

Položme si nyní otázku, kdy lze nějakou (obecnou) matici A převést podobnostní transformací na diagonální tvar tak, že podobnost realizuje unitární matice T. Ve druhém dílu (věta 6.1 a 6.2 a jejich důsledky) jsme dokázali, že pro matice unitární ($A^{-1} = A^{T*}$), resp. samoadjungované ($A = A^{T*}$) je takový převod vždy možný. Nyní formulujeme obecnější tvrzení (nutnou a dostatečnou podmínku pro matici A k tomu, aby existovala unitární matice T převádějící A podobnostní transformací na diagonální tvar). Potřebujeme ještě jeden nový pojem.

Matice $A \in \mathcal{M}(n/n)$ se nazývá *normální*, komutuje-li se svou maticí transponovanou a komplexně sdruženou, tj. platí-li $AA^{T*} = A^{T*}A$.

Věta 16.13 (Spektrální věta pro normální matice): *Matici $A \in \mathcal{M}(n/n)$ lze převést na diagonální tvar podobnostní transformací TAT^{-1}, kde T je unitární matice, právě tehdy, je-li matice A normální.*

Především se zaměřme na zjištění, zda v případě, že matice A je normální, je normální také matice $B = TAT^{-1} = TAT^{T*}$ získaná podobnostní transformací s unitární maticí T. Dostáváme (připomeňte si vlastnosti matic a maticového násobení a odůvodněte jednotlivé kroky výpočtu)

$$BB^{T*} - B^{T*}B = (TAT^{-1})(TAT^{-1})^{T*} - (TAT^{-1})^{T*}(TAT^{-1}) =$$

$$= TAT^{-1}(T^{-1})^{T*}A^{T*}T^{T*} - (T^{-1})^{T*}A^{T*}T^{T*}TAT^{-1} = T(AA^{T*} - A^{T*}A)T^{-1} \,.$$

Je vidět, že platí-li $AA^{T*} = A^{T*}A$, platí i $BB^{T*} = B^{T*}B$, a samozřejmě také naopak. Protože každá diagonální matice je normální (ověřte), máme jeden směr ekvivalence v tvrzení 16.13 dokázán: lze-li matici A převést podobnostní transformací s unitární maticí na diagonální tvar, musí být matice A normální. Opačný směr důkazu využívá vlastností *normálních* operátorů v prostorech se skalárním součinem, o nichž si něco řekneme v odstavci 16.3.3 a pomocí jejich vlastností důkaz věty 16.13 dokončíme.

16.2.6 Cvičení

1. Dokažte vlastnosti unimodulárních matic uvedené v příkladu 16.14.

2. Najděte kanonický tvar následujících matic. V případě, že některé z nich jsou unimodulární, určete také inverzní matici.

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}, \\
\text{(b)}\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 3\lambda^3-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}, \\
\text{c)}\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}, \\
\text{d)}\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} -6-\lambda & 9 & -7 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3-\lambda & -1 \\ 5 & -6 & 5 & -\lambda \end{pmatrix}, \\
\text{e)}\ A(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3+5 \\ \lambda^2-\lambda-4 & \lambda^4-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Výsledky:

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\ K_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{pmatrix}, \\
\text{(b)}\ K_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\text{c)}\ K_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^4 \end{pmatrix}, \\
\text{d)}\ K_A(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+2) \end{pmatrix}, \\
\text{e)}\ K_A(\lambda) &= E, \\
A^{-1}(\lambda) &= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} \lambda^4-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-5 & -\lambda^3-5 \\ -\lambda^2+\lambda+4 & \lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{16.32}
$$

3. Zapište jako maticový polynom polynomickou matici

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 8\mathrm{i}\lambda^3 + 3\lambda & -2\lambda^2 + 2\lambda - \mathrm{i} & 0 \\ 3 & -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 12 & 4 \\ \lambda & -\mathrm{i}\lambda^2 - 4\lambda & \lambda^3 + \lambda^2 + \mathrm{i}\lambda \end{pmatrix}.$$

Výsledek:

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 8\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 + \\ + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 3 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Dokažte obecnou verzi věty 16.11, tj. pro obecný stupeň dělitele. Proveďte přímý výpočet podle vzoru z příkladu 16.16.

5. Určete kanonický tvar matice

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & 0 \\ 0 & q(\lambda) \end{pmatrix},$$

kde $p(\lambda)$ a $q(\lambda)$ jsou polynomy s vedoucím koeficientem rovným jedné, jejichž největším společným dělitelem je polynom $d(\lambda)$ rovněž s vedoucím koeficientem rovným jedné.
Výsledek:

$$K_A(\lambda) = \begin{pmatrix} d(\lambda) & 0 \\ 0 & d(\lambda)\varphi(\lambda)\psi(\lambda) \end{pmatrix},$$

kde $p(\lambda) = d(\lambda)\varphi(\lambda)$, $q(\lambda) = d(\lambda)\psi(\lambda)$, polynomy $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ jsou nesoudělné.

6. Nechť A je číselná matice nad $\mathbf{C}$ řádu n. Rozhodněte a zdůvodněte, zda v diagonále matice kanonického tvaru její charakteristické matice $(A - \lambda E)$ může být nulový polynom.
Výsledek: Odpověď je záporná. Kanonický tvar matice $(A - \lambda E)$ je shodný s kanonickým tvarem matice $(J - \lambda E)$, kde J je Jordanova matice podobná matici A. V diagonále kanonického tvaru jakékoli matice $(J - \lambda E)$ není obsažen nulový polynom.

7. Pomocí kanonického tvaru matice $(A - \lambda E)$ najděte Jordanův normální tvar matic zadaných v odstavci 16.1.6 v úloze 1.

8. Vraťte se k příkladu 16.12 a nalezněte podobnostní transformaci $B = TAT^{-1}$ pomocí úprav charakteristických matic na kanonický tvar (jako v příkladu 16.17).

9. Vraťte se k příkladu 16.17 a nalezněte podobnostní transformaci $B = TAT^{-1}$ pomocí geometrického přístupu (jako v příkladu 16.12).

10. Pro matici z příkladu 16.20 proveďte podrobně úpravu na kanonický tvar a nalezněte podobnostní transformaci $J = TAT^{-1}$.

11. Určete Jordanovy matice odpovídající následujícím kanonickým tvarům charakteristických matic $K_{J-\lambda E}$:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\lambda)^3 \end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)(1+\lambda^2) \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix},\qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)(1+\lambda^2)^2 \end{pmatrix},\qquad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \end{pmatrix},$$

$$\text{g)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}.$$

Výsledky:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

g) matice neodpovídá charakteristické matici žádné číselné matice (stupeň jejího determinantu je vyšší než řád).

12. Určete kanonické tvary charakteristických matic $K_{J-\lambda E}$ k zadaným Jordanovým maticím:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{g)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{h)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Výsledky:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda - a)^3(\lambda^2 - 1) \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda - \mathrm{i})^2(\lambda - 1)^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda - a)^2(\lambda + 1)^2 \end{pmatrix}, \qquad \text{d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^3 \end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&\lambda^4\end{pmatrix},\quad \text{f)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\end{pmatrix},\quad \text{g)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda^2&0\\0&0&0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\text{h)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&(\lambda-1)(\lambda-3)\end{pmatrix}.$$

13. Určete kanonické tvary charakteristických matic $K_{J-\lambda E}$ k Jordanovým maticím z úlohy 7 cvičení 16.1.6.
Výsledky:

$$K_{J_1-\lambda E}=\begin{pmatrix}\lambda-5&0&0&0\\0&\lambda-5&0&0\\0&0&\lambda-5&0\\0&0&0&\lambda-5\end{pmatrix},\ K_{J_2-\lambda E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda-5&0&0\\0&0&\lambda-5&0\\0&0&0&(\lambda-5)^2\end{pmatrix},$$

$$K_{J_3-\lambda E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&(\lambda-5)^2&0\\0&0&0&(\lambda-5)^2\end{pmatrix},\ K_{J_4-\lambda E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\lambda-5&0\\0&0&0&(\lambda-5)^3\end{pmatrix},$$

$$K_{J_5-\lambda E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&(\lambda-5)^4\end{pmatrix}.$$

16.3 Několik aplikací

Na základě toho, co o maticích a operátorech už víme, teď uvidíme, co všechno se s nimi ještě dá dělat. Jedná se o „nadstavbový“ odstavec, neboť jde o záležitosti v rámci lineární algebry již poněkud speciální. Výklad je proto spíše „orientačně-informativní“, než aby jej bylo možné považovat za nějakou důkladnou teorii. A tak čtenář, který je už maticemi a algebrou přesycen, se bez něj může dobře obejít.

16.3.1 Exponenciála matice

Exponenciální funkci jsme důkladně probrali v prvním dílu. V druhém dílu se objevovala při řešení *lineárních* diferenciálních rovnic a jejich soustav. V tomto, třetím dílu, jsme se jí opět nevyhnuli, zejména v kapitole 13 o funkcích komplexní proměnné. Je to zkrátka tím, že je v matematice a jejích fyzikálních a technických aplikacích nepostradatelná. A také jsme zjistili, že řada fyzikálních zákonitostí v diferenciálním tvaru je lineárních, takže jejich integrace vede k exponenciále — vzpomeňte na rovnici pro rozpad jader či rovnici pro úbytek intenzity rentgenového záření při průchodu materiálem a jejich řešení

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda\, N(t), \quad N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\lambda t}, \;\; N_0 = N(t)|_{t=0}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = -\mu\, I(x), \quad I(x) = I_0\, \mathrm{e}^{-\mu x}, \;\; I_0 = I(x)|_{x=0}\,,$$

jimiž jsme se zabývali hned zkraje prvního dílu, v příkladech 1.5. a 1.6. V úvahách, do nichž vstupovaly exponenciální funkce, byl jejich základ obecný (nejčastěji e), ale exponentem bylo vždy číslo, ať již reálné, nebo komplexní, nebo proměnná, která nabývala číselných hodnot. Jak by ale mohla v exponentu figurovat matice si v tuto chvíli asi těžko dovedeme představit. Ukážeme, že to je možné, užitečné a v některých příkladech dokonce nutné. V odstavci 7.7.2 jsme řešili soustavy n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty, pro n neznámých funkcí $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$, které můžeme pokládat za složky vektoru $\vec{x}(t)$. (Na značení vektorů šipkou v případě soustav diferenciálních rovnic jsme se dohodli již v druhém dílu, abychom si nepletli vektor $\vec{x}(t)$ se skalární funkcí $x(t)$, složky však budeme nyní opět číslovat horními indexy, jak je zvykem v lineární algebře.) Soustava rovnic má tvar

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + \cdots + a^1_n x^n,\\
\dot{x}^2 &= a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + \cdots + a^2_n x^n,\\
\ldots &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dot{x}^n &= a^n_1 x^1 + a^n_2 x^2 + \cdots + a^n_n x^n,
\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 & \dot{x}^2 & \ldots & \dot{x}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \ldots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \ldots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \ldots & a^n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^1_n & a^2_n & \ldots & a^n_n \end{pmatrix}, \tag{16.33}$$

zkráceně

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t) A\,,$$

kde $A \in \mathcal{M}(n/n)$ je matice konstantních koeficientů soustavy. Vektorová počáteční podmínka sloužící k výběru partikulárního řešení z třídy vektorových funkcí tvořících řešení obecné má tvar $\vec{x}(0) = \vec{K}$, kde $\vec{K} = (K^1, \ldots, K^n)$ je vektor integračních konstant.

Pozn.: Obecně chápeme $\mathcal{M}(n/n)$ jako vektorový prostor matic řádu n nad polem *komplexních čísel*, i v případě, že matice soustavy rovnic je tvořena čísly reálnými a hledáme-li pouze reálná řešení soustavy rovnic. Požadavek reálnosti řešení se projeví v omezujících podmínkách kladených na integrační konstanty stejně jako tomu bylo v kapitole 7.

Soustava (16.33) se formálně podobá skalární rovnici $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $A \in \mathbf{C}$, resp. $A \in \mathbf{R}$, jejíž řešení je $x(t) = K\,\mathrm{e}^{At}$. Jistě by se nám líbilo, kdyby bylo možné zapsat i řešení soustavy ve tvaru

$$\vec{x}(t) = \vec{K}\,\mathrm{e}^{At}\,,$$

s maticí At v exponentu. Zatím nevíme jak, ale i takový zápis je možný. Za chvíli to ukážeme.

Další situace, kdy je potřebné umět zapsat exponenciální funkci s maticovým exponentem, nastoluje kvantová mechanika. Pohybové rovnice v kvantové mechanice totiž přímo obsahují lineární operátory. Tak třeba Schrödingerova rovnice (základní pohybová rovnice kvantové mechaniky, popisující časový vývoj kvantověmechanické soustavy) má tvar

$$-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi\,,$$

kde stav soustavy je určen vektorem ψ (prvkem tzv. *Hilbertova prostoru* — obecně nekonečněrozměrného vektorového prostoru se skalárním součinem, úplného vzhledem k metrice, která je tímto skalárním součinem indukovaná), a $\hat{H}$ je lineární operátor působící v tomto prostoru (samoadjungovaný operátor s fyzikálním významem energie). Nekonečná dimenze situaci komplikuje, kvantová mechanika však řeší i důležité problémy, kde vystačíme s dimenzí konečnou.

Máme dost důvodů k tomu, abychom se pokusili nějak definovat exponenciálu matice. Ale jak? Vzpomenete si na způsob, jakým jsme korektně rozšířili definici exponenciální funkce reálné proměnné do komplexního oboru? Přece pomocí řady

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\cdots\,,\qquad x \in \mathbf{R}\,,$$

v níž jsme provedli záměnu $x \to z$, $z \in \mathbf{C}$. Pomocí vlastností funkcí komplexní proměnné jsme dokázali, že řada konverguje stejnoměrně v Gaussově rovině $\mathbf{C}$, má stejné vlastnosti při výpočtech jako reálná exponenciála ($\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$, $(\mathrm{e}^z)^\xi = \mathrm{e}^{z\xi}$), představuje holomorfní funkci (derivování člen po členu) a žádná další holomorfní funkce, která by pro $z = x \in \mathbf{R}$ nabývala stejných hodnot jako exponenciální funkce reálné proměnné, už neexistuje (věta o jednoznačnosti). Pokus zavést exponenciálu matice také pomocí řady se může vyplatit. V řadě vyjadřující e^x, resp. e^z proveďme záměnu $x \to A$, resp. $z \to A$ a zkoumejme vlastnosti vzniklé řady matic

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k = 1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots\,,\qquad A \in \mathcal{M}(n/n)\,. \tag{16.34}$$

Libovolně velký konečný počet jejích členů jistě dokážeme vypočítat, neboť $A^k = \underbrace{A\cdots A}_{k\text{-krát}}$ a násobit matice umíme. Nehleďme teď na to, že takový výpočet by byl při větším počtu členů protivný. Za chvíli uvidíme, jak se dá jednoduše vyjádřit součet celé řady.

A „na stole“ je otázka konvergence řady. Potřebujeme něco jako „velikost“ matice. Tu už však k dispozici máme z kapitoly 11. Připomeňme *normu* a z ní indukovanou *metriku* definovanou na množině $\mathcal{M}(n/n)$ v příkladu 11.21:

$$\|A\| = \{\sup \|Ax\|\,, x \in V_n \text{ nad } \mathbf{C},\ \ \|x\| < 1\},\ \ \|x\| = \sqrt{|x^1|^2 + \cdots + |x^n|^2}\,. \tag{16.35}$$

Platí

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|\,, \qquad \left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k\,.$$

Ukážeme (viz také úlohu 6 ve Cvičení 16.3.4), že posloupnost členů tvořících řadu (16.34) je Cauchyovská, a tedy konvergentní, dokonce absolutně. Počítejme normu rozdílu $(m+l)$-tého a l-tého částečného součtu řady (16.34). Dostaneme

$$\left\|\sum_{k=l+1}^{m+l} \frac{1}{k!} A^k\right\| \leq \sum_{k=l+1}^{m+l} \frac{1}{k!} \|A\|^k \longrightarrow 0 \text{ pro } l \longrightarrow \infty\,,$$

viz poznámku k poloměru konvergence v odstavci 16.3.2. Budeme-li se snažit součet řady určit, nebude to marná práce. Můžeme definovat *exponenciálu matice* A přímo vztahem (16.34):

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = 1 + A + \frac{1}{2} A^2 + \cdots + \frac{1}{k!} A^k + \cdots\,, \qquad A \in \mathcal{M}(n/n)\,.$$

Samozřejmě, budeme-li počítat druhou, třetí a další mocniny zcela obecné matice $A \in \mathcal{M}(n/n)$, nepovede se nám získat obecné vyjádření a pak všechny mocniny sečíst. Naštěstí víme, že každá (čtvercová) matice A je podobná nějaké Jordanově matici, takže platí

$$J = TAT^{-1} \Longrightarrow A = T^{-1}JT \Longrightarrow A^k = \underbrace{(T^{-1}JT)\cdots(T^{-1}JT)}_{k\text{-krát}} = T^{-1}J^kT\,.$$

A Jordanova matice je již podstatně sympatičtějším adeptem na výpočet k-té mocniny pro libovolné $k \in \mathbf{N}$. Je-li Jordanova matice tvořena Jordanovými submaticemi, které pro jednoduchost označíme třeba $J_1, \ldots, J_m$ (součet jejich řádů je roven n), platí

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2^k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & J_m^k \end{pmatrix},$$

kde nuly znamenají bloky nul příslušné velikosti. k-tá mocnina Jordanovy matice je tvořena bloky $J_1^k, \ldots, J_m^k$ rozloženými podél hlavní diagonály. Stačí tedy, abychom uměli vypočítat k-tou mocninu Jordanovy submatice.

Příklad 16.21: Mocniny Jordanovy submatice

Jordanovu submatici s-tého řádu příslušnou hodnotě λ_0 zapíšeme ve tvaru $J^{(s)}(\lambda_0) = \lambda_0 \, E + N^{(s)}$, kde $N^{(s)}$ je nilpotentní Jordanova submatice s-tého řádu. k-tou mocninu Jordanovy submatice pak vypočítáme celkem snadno, s využitím skutečnosti, že jednotková matice komutuje s jakoukoli maticí stejného řádu, a tedy i s maticí $N^{(s)}$. Platí

$$\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right]^k = (\lambda_0 \, E + N^{(s)})^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_0^{k-l} E^{k-l} [N^{(s)}]^l = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{(k-l)!l!} \lambda_0^{k-l} [N^{(s)}]^l \, .$$

Víme však, že pro $l \geq s$ je $[N^{(s)}]^l = 0$. Jestliže je $k < s$, pak $\left[J(s)(\lambda_0)\right]^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_0^{k-l} [N(s)]^l$. Pro $k \geq s$ je $\left[J(s)(\lambda_0)\right]^k = \sum_{l=0}^{s-1} \binom{k}{l} \lambda_0^{k-l} [N(s)]^l$ (horní mez sumy je pouze $s-1$). Jako konkrétní ukázku počítejme mocniny matice $N^{(5)}$:

$$N^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [N^{(5)}]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[N^{(5)}]^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, [N^{(5)}]^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[N^{(5)}]^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zkusme výpočet mocnin nilpotentní matice $N^{(s)}$ trochu zobecnit. Obecným prvkem nilpotentní matice je $\nu_i^j = \delta_i^{j-1}$ (Kroneckerovo delta). Při výpočtu obecného prvku druhé mocniny nilpotentní matice pro přehlednost nepoužijeme Einsteinovu symboliku, ale vypíšeme znak sumace:

$$\left[(N^{(s)})^2\right]_i^j = \sum_{l=1}^{s} \nu_i^l \nu_l^j = \sum_{l=1}^{s} \delta_i^{l-1} \delta_l^{j-1} = \delta_i^{j-2} \;\; \text{pro} \;\; 2 < j \leq s, \quad \left[(N^{(s)})^2\right]_i^j = 0 \;\; \text{pro} \;\; j \leq 2 \, .$$

Zatímco v matici $N^{(s)}$ samotné stojí jednička, která se nachází v i-tém řádku, na $(i+1)$-té sloupcové pozici, v matici $[N^{(s)}]^2$ stojí na $(i+2)$-té sloupcové pozici, tj. posunula se o jednu sloupcovou pozici vpravo. Jednička na $(s-1)$-tém řádku se nemá kam posunout, celý řádek je nulový, s-tý řádek je rovněž nulový. Označme prvek na i-té řádkové a j-té sloupcové pozici matice $[N^{(s)}]^2$ jako μ_i^j, tj. $\mu_i^j = \delta_i^{j-2}$. Pro třetí mocninu platí

$$\left[(N^{(s)})^3\right]_i^j = \sum_{l=1}^{s} \mu_i^l \nu_l^j = \sum_{l=1}^{s} \delta_i^{l-2} \delta_l^{j-1} = \delta_i^{j-3} \;\; \text{pro} \;\; 3 < j \leq s, \quad \left[(N^{(s)})^3\right]_i^j = 0 \;\; \text{pro} \;\; j \leq 3 \, .$$

Každá jednička se opět posouvá o jednu sloupcovou pozici doprava. Každé další umocnění „vytlačuje“ diagonálu s jedničkami o jedno místo směrem k pravému hornímu rohu. Jednička, která se „už nemá kam posunout“, vypadne. Další postup je analogický. Pro obecnou k-tou mocninu nilpotentní matice s-tého řádu tak dostáváme

$$\left[(N^{(s)})^k\right]^j_i = \delta_i^{j-k} \text{ pro } k < j \leq s, \quad \left[(N^{(s)})^k\right]^j_i = 0 \text{ pro } j \leq k\,.$$

Z příkladu 16.21 je vidět, jak bude vypadat obecná k-tá mocnina Jordanovy submatice. Je třeba rozlišit případy $k < s$ a $k \geq s$. Pro první z nich ($k < s$) dostaneme

$$\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right]^k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0^k & \binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_0^{k-2} & \dots & \binom{k}{k-1}\lambda_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0^k & \binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} & \dots & \binom{k}{k-2}\lambda_0^2 & \binom{k}{k-1}\lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0^k & \dots & \dots & \binom{k}{k-2}\lambda_0^2 & \binom{k}{k-1}\lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_0^k & \binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_0^k \end{pmatrix}}_{\text{řád matice}=s},$$

pro $k \geq s$ pak

$$\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right]^k = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0^k & \binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_0^{k-2} & \dots & \binom{k}{s-1}\lambda_0^{k-s+1} \\ 0 & \lambda_0^k & \binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} & \dots & \binom{k}{s-2}\lambda_0^{k-s+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_0^k \end{pmatrix}}_{\text{řád matice}=s}. \tag{16.36}$$

Vyjádření k-té mocniny Jordanovy submatice platné pro $k \geq s$ můžeme dokonce použít i pro případ $k < s$, jestliže místo prvků, kde vychází záporný exponent hodnoty λ_0, dosadíme nuly.

A teď ještě potřebujeme udělat exponenciálu Jordanovy submatice, tj. $\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)}$ a budeme skoro hotovi. Víme už, že exponenciála je dána řadou

$$\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right]^k.$$

k-tou mocninu matice $J^{(s)}(\lambda)$ udělat umíme (dokážeme zapsat obecný prvek této mocniny), řada představuje součet matic, ten se provádí prvek po prvku.

Příklad 16.22: Obecný prvek exponenciály Jordanovy submatice

Pro obecný prvek matice $\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)}$ na i-té řádkové a j-té sloupcové pozici platí

$$\left[\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)}\right]_i^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\left(J^{(s)}(\lambda_0)\right)^k\right]_i^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_0^{k-l}\left[\left(N^{(s)}(\lambda_0)\right)^l\right]_i^j =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda_0^{k-l} \delta_i^{j-l} = \sum_{k=j-i}^{\infty} \frac{1}{k!} \binom{k}{j-i} \lambda_0^{k-j+i}, \text{ pro } k \geq j-i \geq 0\,.$$

(Připomeňme, že pro $j \leq l$ dosazujeme za δ_i^{j-l} nulu.) Jak jsme dospěli k poslední úpravě? Jednoduše: ve vnitřním součtu je totiž jediný nenulový člen, a to ten, pro který je $j-l=i$. Poslední výraz dále upravujeme a v druhém kroku provedeme záměnu označení sčítacího indexu $k-j+i \to k$:

$$\left[\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)}\right]_i^j = \sum_{k=j-i}^{\infty} \frac{1}{(j-i)!(k-j+i)!} \lambda_0^{k-j+i} = \frac{1}{(j-i)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_0^k\,,$$

$$\left[\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)}\right]_i^j = \frac{1}{(j-i)!}\mathrm{e}^{\lambda_0} \quad \text{pro} \quad i \leq j\,. \tag{16.37}$$

Pro $j < i$ je příslušný maticový prvek nulový (matice je horní trojúhelníková).

Výsledný tvar exponenciály Jordanovy submatice $J^{(s)}(\lambda_0)$ je

$$\exp\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_0} & \frac{1}{1!}\mathrm{e}^{\lambda_0} & \frac{1}{2!}\mathrm{e}^{\lambda_0} & \dots & \dots & \frac{1}{(s-2)!}\mathrm{e}^{\lambda_0} & \frac{1}{(s-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_0} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0} & \frac{1}{1!}\mathrm{e}^{\lambda_0} & \dots & \dots & \frac{1}{(s-3)!}\mathrm{e}^{\lambda_0} & \frac{1}{(s-2)!}\mathrm{e}^{\lambda_0} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0} & \dots & \dots & \frac{1}{(s-4)!}\mathrm{e}^{\lambda_0} & \frac{1}{(s-3)!}\mathrm{e}^{\lambda_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_0} & \frac{1}{1!}\mathrm{e}^{\lambda_0} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0} \end{pmatrix}. \tag{16.38}$$

Exponenciálu libovolné matice $A \in \mathcal{M}(n/n)$ už dostaneme velice snadno. Platí

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^{-1} J^k T = T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k\right) T = T^{-1}\mathrm{e}^J T\,, \tag{16.39}$$

kde $J = TAT^{-1}$ je Jordanův normální tvar matice A a T je *jakákoli* regulární matice realizující podobnostní transformaci mezi maticemi A a J (víme, že není určena jednoznačně, matice J představující Jordanův normální tvar matice A však jednoznačná je, až na pořadí bloků).

Příklad 16.23: Exponenciála matice z příkladu 16.9 ...

Hned vyzkoušíme, jak zafungují získané obecné výsledky na příkladu konkrétní číselné matice. Vezměme třeba tu, jejíž Jordanův normální tvar jsme zjišťovali v příkladu 16.9. Také jsme našli obecný tvar podobnostní transformace a uvedli několik konkrétních příkladů. Vraťme se tedy k příkladu 16.9 a zapišme třeba druhou podobnostní transformaci, která převede Jordanův normální tvar matice A zpátky na matici A, tj. $A = T^{-1}JT$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jordanův normální tvar matice A je tvořen dvěma Jordanovými submaticemi druhého řádu, příslušnými hodnotě $\lambda_0 = 1$, tj. maticemi $J^{(2)}(1)$. Pro exponenciálu matice $J^{(2)}(1)$ dostáváme

$$\exp\left[J^{(2)}(1)\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}, \quad \text{takže} \quad \mathrm{e}^J = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\mathrm{e} & \mathrm{e} & 0 & 0 \\ -4\mathrm{e} & -\mathrm{e} & 0 & 0 \\ 7\mathrm{e} & \mathrm{e} & 2\mathrm{e} & \mathrm{e} \\ -17\mathrm{e} & -6\mathrm{e} & -\mathrm{e} & 0 \end{pmatrix}.$$

Skutečnost, že exponenciálou matice A je její e-násobek, je dána speciálním tvarem odpovídající Jordanovy matice.

Příklad 16.24: ... a ještě jedna

Najdeme exponenciálu matice z úlohy 1c) ve cvičení 16.1.6. Matice A a její Jordanův normální tvar jsou

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

podobnostní transformaci lze uskutečnit například pomocí matic

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jordanova matice je tvořena jedním blokem druhého řádu příslušným hodnotě $\lambda_0 = 8$ a dvěma bloky prvního řádu příslušnými téže hodnotě. Jejich exponenciály jsou

$$\exp\left[J^{(2)}(8)\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^8 & \mathrm{e}^8 \\ 0 & \mathrm{e}^8 \end{pmatrix}, \quad \exp\left[J^{(1)}(8)\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^8 \end{pmatrix},$$

exponenciála Jordanovy matice podobné matici A je

$$\mathrm{e}^J = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^8 & \mathrm{e}^8 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^8 \end{pmatrix}$$

a exponenciála matice A pak

$$\mathrm{e}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^8 & \mathrm{e}^8 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^8 & -\mathrm{e}^8 & \mathrm{e}^8 \\ -\mathrm{e}^8 & 2\mathrm{e}^8 & -\mathrm{e}^8 & \mathrm{e}^8 \\ \mathrm{e}^8 & -\mathrm{e}^8 & 2\mathrm{e}^8 & -\mathrm{e}^8 \\ \mathrm{e}^8 & -\mathrm{e}^8 & \mathrm{e}^8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Výpočty exponenciály matice si nejlépe osvojíte v rámci praktických cvičení (odstavec 16.3.4, úloha 8).

16.3.2 Matice a soustavy diferenciálních rovnic

Vraťme se k motivačnímu příkladu z úvodní části této kapitoly. Otázkou je, zda můžeme řešení soustavy rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty $\dot{\vec{x}} = \vec{x}A$, $A \in \mathcal{M}(n/n)$, kde vektor $\vec{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ představuje n-tici neznámých funkcí proměnné $t \in \mathbf{R}$, zapsat pomocí exponenciály matice At v analogii s řešením jedné skalární rovnice $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbf{R}$, resp. $A \in \mathbf{C}$.

Uvažujme o exponenciále matice At, kde $A \in \mathcal{M}(n/n)$ a t je reálná proměnná. Exponenciála je dána řadou (16.34), kde na místo matice A dosadíme matici At. Jak je tomu s konvergencí takové řady ve smyslu maticové normy (16.35) z odstavce 16.3.1? Pro hodnoty proměnné t z určitého intervalu, například $t \in [-t_0, t_0]$, $t_0 > 0$, a libovolná přirozená čísla l, m je rozdíl $(m + l)$-tého a l-tého částečného součtu řady roven

$$\left\| \sum_{k=l+1}^{l+m} \frac{1}{k!}(At)^k \right\| \leq \sum_{k=l+1}^{l+m} \frac{1}{k!}|t|^k \, \|A\|^k \leq \sum_{k=l+1}^{l+m} \frac{1}{k!} t_0^k \, \|A\|^k \longrightarrow 0 \text{ pro } l \to \infty,$$

takže je splněn požadavek Cauchyova-Bolzanova kritéria pro (lokálně) stejnoměrnou konvergenci. Řada

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(At)^k = \mathrm{e}^{At} \tag{16.40}$$

stejnoměrně konverguje v $\mathbf{R}$.

Můžeme maticovou funkci $F(t)$ zderivovat? Zkusme to. Nejprve zjistíme, jak vypadají derivace jednotlivých jejích členů. Je-li matice $B = B(t) = \big(\beta_i^j(t)\big)$, $1 \le i, j \le n$, závislá na proměnné t, rozumíme její derivací matici tvořenou derivacemi funkcí $\beta_i^j(t)$, tj. $\dot{B}(t) = \big(\dot{\beta}_i^j(t)\big)$. Označme $B(t) = (At)^k = A^k t^k$. Pak $\dot{B}(t) = k\, t^{k-1} A^k$. Abychom zjistili, zda řadu definující funkci $F(t)$ můžeme derivovat člen po členu, je třeba, abychom prověřili stejnoměrnou konvergenci řady utvořené právě z těchto derivací (postačující podmínka — kapitola 8 v druhém dílu). Opět vyjádříme rozdíl $(m+l)$-tého a l-tého částečného součtu řady a dostaneme

$$\left\| \sum_{k=l+1}^{m+l} \frac{1}{k!} k\, t^{k-1} A^k \right\| \le \sum_{k=l+1}^{m+l} \frac{1}{(k-1)!} |t|^{k-1} \|A\|^k \le \sum_{k=l+1}^{m+l} \frac{1}{(k-1)!} t_0^{k-1} \|A\|^k \longrightarrow 0 \text{ pro } l \to \infty\,.$$

Posloupnost částečných součtů řady vzniklé z řady (16.34) pro matici At derivováním člen po členu je také cauchyovská, řada konverguje stejnoměrně v $\mathbf{R}$.

Pozn.: Poloměr konvergence jak v případě řady funkce $F(t) = \mathrm{e}^{At}$, tak řady derivované $G(t) = \dot{F}(t)$ zjistíme snadno například pomocí limity

$$R_F^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!} \|A\|^{k+1}}{\frac{1}{(k!)} \|A\|^k} = 0 \Longrightarrow R_F = \infty\,,$$

$$R_G^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k!} \|A\|^{k+1}}{\frac{1}{(k-1)!} \|A\|^k} = 0 \Longrightarrow R_G = \infty\,.$$

Pro derivaci maticové funkce $F(t)$ tak dostáváme

$$\dot{F}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(At)^k = A\,\mathrm{e}^{At} = AF(t)\,.$$

Je-li $\vec{K}$ libovolný konstantní vektor $\vec{K} = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$, pak

$$\vec{K}\dot{F}(t) = \vec{K}\, AF(t)\,,$$

a vektor

$$\vec{x}(t) = \vec{K}F(t) = \vec{K}\,\mathrm{e}^{At} \tag{16.41}$$

je řešením soustavy rovnic $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t)A$ s (vektorovou) počáteční podmínkou $\vec{x}(0) = \vec{K}$, pokud ovšem je $F(0) = E$ (jednotková matice). Je, nebo není? Za chvíli uvidíme. Pro matice At a Jt platí $At = T^{-1}(Jt)T$, kde T je libovolná z matic realizujících podobnostní transformaci $A = T^{-1}JT$. Potřebujeme tedy ještě sestavit exponenciálu matice Jt. Opět stačí zjistit, jak bude vypadat exponenciála Jordanovy submatice $J^{(s)}(\lambda_0)t$, neboť matice e^{Jt} vznikne už jen naskládáním příslušných bloků podél hlavní diagonály.

Příklad 16.25: Exponenciála submatice $J^{(s)}(\lambda_0)t$

K tomu, abychom sestavili exponenciálu t-násobku Jordanovy submatice $J^{(s)}(\lambda_0)$ s výhodou využijeme výsledků příkladu 16.22. V příkladu 16.22 hrály důležitou roli mocniny matice $J^{(s)}(\lambda_0)$, z nichž byla utvořena řada představující exponenciálu, zde je stačí nahradit mocninami matice $J^{(s)}(\lambda_0)t$. Každý prvek k-té mocniny matice $J^{(s)}(\lambda_0)t$ získáme vynásobením odpovídajícího prvku (na stejné řádkové a sloupcové pozici) faktorem t^k. Dostáváme (porovnávejte si s odpovídajícím výpočtem v příkladu 16.22)

$$\left[\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)t}\right]^j_i = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}t^k\lambda_0^{k-l}\delta_i^{j-l} = \sum_{k=j-i}^{\infty}\frac{1}{k!}\binom{k}{j-i}t^k\lambda_0^{k-j+i}, \quad \text{pro } k \geq j-i \geq 0\,.$$

(Pro $j < l$ opět dosazujeme za δ_i^{j-l} nulu.) Při další úpravě výrazu provedeme v druhém kroku záměnu označení sčítacího indexu $k - j + i \to k$:

$$\left[\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)t}\right]^j_i = \sum_{k=j-i}^{\infty}\frac{t^k}{(j-i)!(k-j+i)!}\lambda_0^{k-j+i} = \frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(t\lambda_0)^k = \frac{t^{j-i}}{(j-i)!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

pro $j \geq i$. Pro $j < i$ je příslušný maticový prvek nulový (matice je zase horní trojúhelníková, jako v příkladu 16.22).

Vypíšeme alespoň některé prvky matice $\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)t}$:

$$\exp\left[J^{(s)}(\lambda_0)t\right] = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \frac{t}{1!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \frac{t^2}{2!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \dots & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \frac{t}{1!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \dots & \dots & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \dots & \dots & \frac{t^{s-4}}{(s-4)!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \frac{t^{s-3}}{(s-3)!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_0 t} & \frac{t}{1!}\mathrm{e}^{\lambda_0 t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}. \qquad (16.42)$$

Pro $t = 0$ dostáváme $\mathrm{e}^{J^{(s)}(\lambda_0)t}|_{t=0} = E$ (jednotková matice) pro *libovolnou* hodnotu λ_0! Odtud $\mathrm{e}^{Jt}|_{t=0} = E$ a $\mathrm{e}^{At}|_{t=0} = T^{-1}\mathrm{e}^{Jt}|_{t=0}T = E$.

Vztah (16.41) je skutečně partikulárním řešením soustavy $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t)A$ při počátečních podmínkách $\vec{x}(0) = \vec{K}$. Hned to vyzkoušíme na příkladech.

Příklad 16.26: Soustava z příkladů 7.55 a 7.56 v druhém dílu

V příkladech 7.55 a 7.56 v druhém dílu jsme řešili soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^1 - x^2, \\ \dot{x}^2 &= x^1 + 3x^2 \end{aligned}$$

tak, že jsme nalezli fundamentální systém řešení (fundamentální matici) a pomocí ní sestavili obecné řešení soustavy. Získání partikulárního řešení je pak již jen otázkou dosazení počátečních podmínek a určení integračních konstant.

Pomocí exponenciály matice získáme partikulární řešení přímo a možná i jednodušeji. Matice soustavy, její Jordanův normální tvar, a možné matice T a T^{-1} realizující podobnostní transformaci $A = T^{-1}JT$ jsou (propočtěte)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exponenciála matice At je $\mathrm{e}^{At} = T^{-1}\mathrm{e}^{Jt}T$, tj.

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ -t\mathrm{e}^{2t} & (1+t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Je-li $\vec{x}(0) = (x_0^1, x_0^2)$ dostáváme řešení soustavy

$$\begin{aligned} x^1(t) &= \left[x_0^1(1-t) - x_0^2 t\right] \mathrm{e}^{2t}, \\ x^2(t) &= \left[x_0^1 t + x_0^2(1+t)\right] \mathrm{e}^{2t}. \end{aligned}$$

Matice e^{At} současně hraje roli fundamentální matice soustavy. Že v příkladu 7.56 je jako fundamentální uvedena jiná matice, konkrétně

$$X(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} \\ t\mathrm{e}^{2t} & -(1+t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}?$$

Protože fundamentální systém soustavy, a tedy ani fundamentální matice, nejsou určeny jednoznačně (fundamentální systém může být utvořen z libovolných nezávislých řešení soustavy), můžeme řešení lineárně kombinovat. To znamená, že můžeme matici $X(t)$ upravovat pomocí řádkových elementárních úprav (násobit ji zleva libovolnou regulární číselnou maticí) a získat tak matici z hlediska řešení soustavy ekvivalentní. Jestliže matici e^{At}, kterou jsme získali řešením soustavy pomocí exponenciály, upravíme tak, že druhý řádek nejprve odečteme od prvního a pak jej vynásobíme (-1), dostaneme přesně matici $X(t)$ z příkladu 7.56. Skutečně,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-t)\mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ -t\mathrm{e}^{2t} & (1+t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & -\mathrm{e}^{2t} \\ t\mathrm{e}^{2t} & -(1+t)\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Pozor! Sloupcové úpravy provádět nelze, to bychom míchali složky vektoru $\vec{x}$.

Příklad 16.27: Ještě jedna soustava na procvičení

Budeme řešit soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty pro neznámé funkce $x^1(t)$, $x^2(t)$ a $x^3(t)$, tj. neznámý vektor $\vec{x}(t) = \big(x^1(t), x^2(t), x^3(t)\big)$,

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -2x^1 + 8x^2 + 6x^3, \\ \dot{x}^2 &= -4x^1 + 10x^2 + 6x^3, \\ \dot{x}^3 &= 4x^1 - 8x^2 - 4x^3. \end{aligned}$$

Na tomto příkladu si kromě jiného zopakujeme také způsob nalezení Jordanova normálního tvaru matice A pomocí (společného) kanonického tvaru jejich charakteristických matic:

- Matice soustavy a její charakteristická matice jsou

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 8 & 10 & -8 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 & 4 \\ 8 & 10-\lambda & -8 \\ 6 & 6 & -4-\lambda \end{pmatrix}.$$

- Charakteristický polynom matice A je $\det(A - \lambda E) = -\lambda(\lambda - 2)^2$.
- Její charakteristické kořeny jsou $\lambda_1 = 2$ (dvojnásobný kořen) a $\lambda_2 = 0$ (jednonásobný kořen).
- Pro systém největších společných dělitelů subdeterminantů matice $(A-\lambda E)$ platí $d_1(\lambda) = 1$, $d_2(\lambda) = \lambda-2$, $d_3(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2$.
- Kanonický tvar matice $(A-\lambda E)$ (shodný s kanonickým tvarem odpovídající matice $(J-\lambda E)$) a Jordanova matice mají tvar

$$K_{A-\lambda E} = K_{J-\lambda E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Exponenciála matice Jt je

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Už nyní vidíme, že fundamentální systém řešení soustavy bude tvořen funkcemi 1 a e^{2t}. Ještě potřebujeme alespoň jednu podobnostní transformaci T převádějící matici A na její Jordanovu matici J. Tu zjistíme snadno. Jordanův normální tvar matice A je diagonální, takže je zřejmé, že existuje báze trojrozměrného vektorového prostoru V_3 tvořená vlastními vektory lineárního operátoru, který je ve výchozí bázi (e_1, e_2, e_3) reprezentován maticí A. Vlastní vektory najdeme:

$$(A - \lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ -4 & 8 & 6 \\ 4 & -8 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vektorový podprostor L_1 generovaný vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě $\lambda_1 = 2$ je dvojrozměrný ,

$$L_1 = \left[\left|(2,1,0),(3,0,2)\right|\right],$$

$$(A - \lambda_2 E)^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vektorový prostor L_2 příslušný vlastní hodnotě $\lambda_2 = 0$ je jednorozměrný,

$$L_1 = \left[\left|(1,1,-1)\right|\right].$$

Podobnostní transformaci $J = TAT^{-1}$ od matice A k její Jordanově matici lze tedy uskutečnit například maticí T, kde

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exponenciálu matice At, která je zároveň fundamentální maticí dané soustavy rovnic, získáme podobnostní transformací $\mathrm{e}^{At} = T^{-1}\mathrm{e}^{Jt}T$,

$$X(t) = \mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{e}^{2t} & 2-2\mathrm{e}^{2t} & -2+2\mathrm{e}^{2t} \\ -4+4\mathrm{e}^{2t} & -4+5\mathrm{e}^{2t} & 4-4\mathrm{e}^{2t} \\ -3+3\mathrm{e}^{2t} & -3+3\mathrm{e}^{2t} & 3-2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy rovnic při počáteční podmínce $\vec{x}(0) = \big(x^1(0), x^2(0), x^3(0)\big)$ pak dostaneme ve tvaru $\vec{x}(t) = \vec{x}(0)\, X(t)$.

16.3.3 Ještě něco navíc

To „něco navíc“ o maticích a operátorech by mohlo být ještě hodně obsáhlé i rozsáhlé a čtenář může najít hodně informací v literatuře, kterou na konci knihy uvádíme. (Četné aplikace v kvantové mechanice uvádějí například L. Motl a M. Zahradník v knize *Pěstujeme lineární algebru.* Karolinum, Praha 1999.). V tomto odstavci uvedeme z onoho „něčeho navíc“ opravdu jen „něco málo“. Nepůjde již o ucelený výklad, ale stane se tak formou několika (možná trochu nesystematicky řazených) doplňků a příkladů.

Nejprve ještě trocha obecně užitečné terminologie, ať již připomenuté z dřívějška, nebo nové, která se bude týkat také vektorových prostorů se skalárním součinem.

Nechť $\varphi \in L(V_n, V_n)$ je lineární operátor ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{C}$, resp. nad $\mathbf{R}$. Soubor $\operatorname{Sp}\varphi$ jeho vlastních hodnot se nazývá jeho *spektrum*. Číslo $\varrho(\varphi) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Sp}\varphi\}$ se nazývá *spektrální poloměr* operátoru φ.

Nechť $\varphi \in L(U_n, U_n)$ je lineární operátor v unitárním vektorovém prostoru (nad $\mathbf{C}$), resp. $\varphi \in L(E_n, E_n)$ je lineární operátor v euklidovském vektorovém prostoru (nad $\mathbf{R}$). Operátor φ^* se nazývá *sdružený k operátoru* φ, jestliže pro každé dva vektory $a, b \in U_n$, resp. $a, b \in E_n$, platí

$$\big(\varphi(a), b\big) = \big(a, \varphi^*(b)\big). \tag{16.43}$$

Operátor φ se nazývá

- *antihermiteovský*, resp. *antisymetrický*, jestliže je $\varphi^* = -\varphi$,
- *normální*, jestliže je $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi$.

Pojem antihermiteovského či antisymetrického operátoru a pojem normálního operátoru doplňují terminologii, kterou jsme zavedli pro lineární operátory v prostorech se skalárním součinem již v kapitole 6 druhého dílu. Tam jsme definovali unitární a samoadjungovaný (nazývaný zejména fyziky též *hermiteovský*) operátor, aniž jsme potřebovali pojem sdruženého operátoru. V situaci, kdy jsme pojem sdruženého operátoru definovali, je zřejmé, že definičním vztahem pro samoadjungovaný operátor je rovnost $\varphi^* = \varphi$ a definičním vztahem pro unitární operátor pak rovnost $\varphi^* = \varphi^{-1}$.

Přeskočte teď k úloze 12 Cvičení 16.3.4 a zjistěte, jakou maticí je reprezentován normální operátor v ortonormálních bázích unitárního (nad $\mathbf{R}$ euklidovského) prostoru. V odstavci 16.2.5 jsme s odkazem na normální operátory slíbili druhý směr důkazu spektrální věty pro normální matice (věta 16.13), reprezentující v ortonormálních bázích právě normální operátory. Vlastnosti normálních operátorů, které jsou pro důkaz podstatné, se samozřejmě týkají vlastních hodnot a vlastních vektorů (jak jinak — potřebujeme přece dokázat, že soubor vlastních vektorů normálního operátoru generuje celý vektorový prostor U_n a zajistí tak existenci diagonální reprezentace operátoru) a dokazují se docela jednoduše:

- Nejprve uvažujme o lineárním operátoru φ v U_n a operátoru sdruženém φ^*, aniž předpokládáme cokoli dalšího. Označme $\mathcal{L}$ invariantní podprostor operátoru φ a $\mathcal{L}_\perp$ jeho ortogonální doplněk. Zvolme libovolný vektor $a \in \mathcal{L}$. Pak $\varphi(a) \in \mathcal{L}$. Pro libovolný vektor $b \in \mathcal{L}_\perp$ platí
$$\Big(\varphi^*(b), a\Big) = \Big(b, \varphi(a)\Big) = 0 \implies \varphi^*(b) \in \mathcal{L}_\perp\,,$$
takže $\mathcal{L}_\perp$ je invariantním podprostorem operátoru φ^*.

- Položme si otázku, zda vlastní hodnoty a vlastní vektory normálního operátoru nějak souvisejí s vlastními hodnotami operátoru s ním sdruženého. Z toho, co víme o speciálních případech normálních operátorů, operátorech unitárních a samoadjungovaných, očekáváme, že zde nějaká souvislost bude. Označme a vlastní vektor operátoru φ příslušný vlastní hodnotě λ. Pak
$$\varphi(a) - \lambda a = 0_{U_n} \implies$$
$$\Big(a, (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(a)\Big) = \Big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(a), (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(a)\Big) = 0\,.$$
S využitím předpokladu, že operátor φ je normální, a skutečnosti, že operátorem sdruženým k α-násobku operátoru φ je α^*-násobek operátoru φ^* (dokažte), dostaneme
$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n}) = \varphi^*\varphi - \lambda\varphi^* - \lambda^*\varphi + |\lambda|^2\,\mathrm{id}_{U_n} =$$
$$= \varphi\varphi^* - \lambda\varphi^* - \lambda^*\varphi + |\lambda|^2\,\mathrm{id}_{U_n} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*\,,$$
a odtud
$$\Big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(a), (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(a)\Big) = \Big(a, (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_{U_n})^*(a)\Big) = 0_{U_n} \implies$$

$$\implies \varphi^*(a) - \lambda^* a = 0_{U_n}\,.$$

Vektor a je tedy také vlastním vektorem operátoru φ^*, přísluší však vlastní hodnotě λ^*. Operátory φ a φ^* mají stejný soubor vlastních vektorů.

- Předchozí vlastnost má jednoduchý, ale důležitý důsledek: Nechť $\mathcal{L} = [|a_1, \ldots, a_k|]$, $1 \leq$ $\leq k \leq n$ je vektorový podprostor v U_n generovaný vlastními vektory operátoru φ. Tento podprostor je invariantním podprostorem jak operátoru φ, tak operátoru φ^*. Díky první vlastnosti, týkající se navzájem sdružených operátorů obecně, je také ortogonální doplněk $\mathcal{L}_\perp$ invariantním podprostorem obou operátorů.

- A co myslíte, že bude platit o dvou vlastních vektorech a a b normálního operátoru, příslušných různým vlastním hodnotám λ_a a λ_b? Pro speciální typy normálních operátorů, jimiž jsme se zabývali v kapitole 6, jsme ukázali, že takové vlastní vektory jsou ortogonální (věty 6.1 a 6.2). Vyzkoušíme, zda to platí pro normální operátory obecně. Pro

$$\varphi(a) = \lambda_a a, \quad \varphi(b) = \lambda_b b, \quad \lambda_a \neq \lambda_b\,,$$

dostaneme (s využitím předchozí vlastnosti)

$$0 = \big(\varphi(a), b\big) - (a, \varphi^*(b)) = (\lambda_a a, b) - (a, \lambda_b^* b) = (\lambda_a - \lambda_b)(a, b) \implies (a, b) = 0\,.$$

Nyní už snadno dokončíme důkaz spektrální věty 16.13, kterou pro normální operátory můžeme přeformulovat takto:

Věta 16.14 (O spektrálním rozkladu normálního operátoru): *Nechť $\varphi \in$ $\in L(U_n, U_n)$ je normální operátor. Pak existuje ortonormální báze prostoru U_n, v níž je operátor reprezentován diagonální maticí. Označme $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ navzájem různé vlastní hodnoty a L_i vektorový podprostor prostoru U_n generovaný vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě λ_i, $1 \leq i \leq r$. Pak platí*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i, \quad \pi_i \circ \pi_j = \pi_i \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{r} \pi_i = \mathrm{id}_{U_n}\,, \tag{16.44}$$

kde π_i je ortogonální projekce na podprostor L_i.

Klíčem k důkazu existence diagonální reprezentace je právě skutečnost, že podprostor $\mathcal{L}_\perp$, který je ortogonálním doplňkem libovolného podprostoru $\mathcal{L}$ generovaného vlastními vektory operátoru φ, je *invariatní* vzhledem k operátoru φ. Označme $\mathcal{L}_\perp = (L_1)_\perp \cap \ldots \cap (L_r)_\perp =$ $= (L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_r)_\perp$ ortogonální doplňek invariantního podprostoru $\mathcal{L} = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_r$. Zúžíme-li operátor φ na podprostor $\mathcal{L}_\perp$, můžeme najít jeho vlastní vektor v tomto prostoru — to je však spor s předpokladem, že každý z podprostorů L_i, $1 \leq i \leq r$ obsahuje *všechny* vlastní vektory příslušné λ_i a žádnou další vlastní hodnotu operátor φ nemá. Podprostor $\mathcal{L}_\perp$ musí být proto triviální, tj. $\mathcal{L}_\perp = 0_{U_n}$, a $\mathcal{L} = L_1 \dot{+} \ldots \dot{+} L_r = U_n$ (podrobně jsme tyto skutečnosti rozebrali na straně 170 druhého dílu v analogickém důkazu pro unitární operátor).

V každém prostoru L_i můžeme pomocí ortogonalizačního procesu a normování najít ortonormální bázi. Dostaneme tím nakonec ortonormální bázi v celém prostoru U_n tvořenou společnými vlastními vektory operátorů φ a φ^*.

Vztah (16.44) je již zřejmým důsledkem předchozího důkazu. Připomeňme ještě, že pro projekce π_i, $1 \leq i \leq r$, platí stejné vztahy jako (6.9) v odstavci 6.1.3, $\pi_1 + \cdots + \pi_r = \mathrm{id}_{U_n}$, $\quad \pi_i \circ \pi_j = = \pi_j \circ \pi_i = \pi_i \delta_{ij}$.

Vztah (16.44) se nazývá *spektrální reprezentace*, neboli *spektrální rozklad* normálního operátoru pomocí projekcí.

Pozn.: O spektrální reprezentaci jsme už podrobně mluvili v odstavci 6.2.2 druhého dílu, vztah (6.16), týkala se však samoadjungovaných operátorů. Nyní jsme ji rozšířili na větší třídu operátorů, operátory normální, s tím, že další rozšíření již není možné, neboť věta 16.13 představuje podmínku nutnou a postačující. (Samoadjungovaný operátor je totiž speciálním případem normálního operátoru, neboť z jeho definičního vztahu $\varphi^* = \varphi$ plyne okamžitě $\varphi \circ \varphi^* = \varphi^2 = \varphi^* \circ \varphi$. Každý samoadjungovaný operátor je tedy normální, ale obecně ne naopak.)

Co myslíte, platí věta 16.14 i v případě, že máme co do činění s lineárním operátorem $\varphi \in L(E_n, E_n)$? Nebo musíme dodat nějaký další předpoklad? (Na tuto otázku snadno odpovíte, uvědomíte-li si, jaká je nutná a postačující podmínka kladená na charakteristické kořeny operátoru $\varphi \in L(E_n, E_n)$, aby vůbec mohl být v nějaké vhodné bázi prostoru E_n nad $\mathbf{R}$ reprezentován Jordanovou maticí.)

V předchozích odstavcích jsme viděli, že pomocí matic lze také „vyrábět“ některé maticové funkce. Zatím jsme podrobně hovořili o maticových polynomech a maticové exponenciále. Než sortiment funkcí rozšíříme, uvedeme si formou příkladu ještě jedno důležité tvrzení týkající se maticových polynomů.

Příklad 16.28: Ještě jednou maticové polynomy: Hamiltonova-Cayleyova věta

Pomocí číselných matic obecného n-tého řádu můžeme sestavit maticový polynom jedné proměnné λ libovolného stupně (příklad 16.15, vztah (16.19)). Maticovými polynomy jsou například všechny členy řady vyjadřující exponenciálu matice. Přemýšlejme, zda dostaneme něco zajímavého, když matici $A \in \mathcal{M}(n/n)$ dosadíme do jejího charakteristického polynomu $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, tj. vypočteme $D_L(A)$, resp. $D_P(A)$. O jaký polynom se bude jednat? Tak počítejme pořádně:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \,,$$

kde koeficienty $\alpha_n = (-1)^n$, α_{n-1}, …, α_2, α_1, α_0 jsou sestaveny z prvků matice A, jsou to tedy *čísla*, neboli *číselné matice prvního řádu*. Dosadíme-li za proměnnou λ matici A, dostaneme matici n-tého řádu vyjádřenou pomocí mocnin matice A, tj. formálně jako polynom specifického typu:

$$D_L(A) = D_P(A) = D(A) = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_2 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_0 \,.$$

Uvědomte si, proč platí $D_L(M) = D_P(M) = D(M)$ pro libovolný maticový argument $M \in \mathcal{M}(n/n)$. Ale co s tím dál? Jak zjistit, zda polynom $D(M)$ má právě pro $M = A$ nějakou speciální „maticovou hodnotu“, když má nepochybně složité koeficienty, byť jsou to jen čísla? Jednoduše. Provedeme rozklad charakteristického polynomu na kořenové činitele a matici A dosadíme do tohoto vyjádření. Platí

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r} ,$$

kde λ_i, $1 \leq i \leq r$, jsou jako vždy navzájem různé charakteristické kořeny a k_i jejich násobnosti. Hodnota polynomu $D(\lambda)$ v maticovém argumentu A je

$$D(A) = (-1)^n (A - \lambda_1 E)^{k_1} \cdots (A - \lambda_r E)^{k_r} .$$

Nejprve řešme jednodušší a asi i názornější úlohu: Co je výslednou maticí $D(A)$ ve speciálním případě, kdy Jordanův normální tvar matice A (resp. lineárního operátoru $\varphi \in L(V_n, V_n)$, který je touto maticí reprezentován v jisté bázi prostoru V_n) je diagonální? Přistupme k řešení této otázky z geometrického hlediska. V daném speciálním případě je vektorový prostor V_n přímým součtem vektorových podprostorů $L_1, \ldots, L_r$, příslušných navzájem různým vlastním hodnotám. Libovolný vektor $a \in V_n$ má jednoznačný rozklad $a = a_1 + \cdots + a_r$, kde $a_i \in L_i$, $1 \leq i \leq r$. Matici $D(A)$ můžeme interpretovat tak, že v původní bázi, v níž je operátor φ reprezentován maticí A, reprezentuje lineární operátor

$$D(\varphi) = (-1)^n (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_{V_n})^{k_1} \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_{V_n})^{k_r} .$$

Co bude obrazem obecného vektoru $a \in V_n$ při zobrazení operátorem $D(\varphi)$ zjistíme snadno. Pro vektor $a_j \in L_j$ totiž platí

$$(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})(a_j) = \varphi(a_j) - \lambda_i a_j = (\lambda_j - \lambda_i) a_j \implies (\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})^{k_i}(a_j) = (\lambda_j - \lambda_i)^{k_i} a_j .$$

Pro $i = j$ je výsledkem nulový vektor. (Dokonce již první mocnina operátoru $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ zobrazí vektor a_i na nulový vektor.) Odtud je zřejmé, že $D(\varphi)(a_i) = 0_{V_n}$ pro $1 \leq i \leq r$. Libovolné mocniny operátorů $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ a $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})$ totiž komutují. Proto je $D(\varphi)(a) = D(\varphi)(a_1 + \cdots + a_r) = 0_{V_n}$. Operátor $D(\varphi)$ je proto nulový a maticový polynom $D(A)$ rovněž.

Otázkou je, zda polynom $D(A)$ bude nulový i v případě, že Jordanův normální tvar matice A není diagonální, nebo geometricky, když má přímý součet podprostorů $L_1, \ldots, L_r$ tvořených vlastními vektory operátoru φ nižší dimenzi než je dimenze n celého prostoru V_n. Pak vstoupí do hry kořenové prostory $\mathcal{L}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{L}_{\lambda_r}$, jejichž přímým součtem již je celý prostor V_n (odstavec 16.1.3, věty 16.3 a 16.4). Libovolný vektor $a \in V_n$ lze nyní jednoznačně rozložit na součet průmětů právě do kořenových prostorů, $a = a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_r}$. Opět zkoumejme působení operátoru $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ a jeho mocnin na průmět a_{λ_j}. Víme, že operátor $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ s definičním oborem zúženým na kořenový prostor $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ je nilpotentní (poslední vlastnost ve větě 16.4), a také, že stupeň nilpotence tohoto operátoru je roven nejvýše násobnosti hodnoty λ_i jako charakteristického kořene operátoru φ. Dobře si to můžete představit pomocí Jordanovy matice operátoru: stupeň nilpotence Jordanovy submatice je roven jejímu řádu a největší v principu možný blok (Jordanova submatice) příslušný hodnotě λ_i je řádu k_i. Pro vektor $a_{\lambda_i} \in \mathcal{L}_{\lambda_i}$ tak platí

$$(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})^{k_i}(a_{\lambda_i}) = 0_{V_n} .$$

Vzhledem k tomu, že libovolné mocniny operátorů $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_{V_n})$ a $(\varphi - \lambda_j \operatorname{id}_{V_n})$ komutují, jak jsme již konstatovali, platí $D(\varphi)(a_{\lambda_i}) = 0_{V_n}$. Z těchto úvah vyplývá, že

$$D(\varphi)(a) = D(\varphi)(a_{\lambda_1} + \cdots + a_{\lambda_r}) = 0_{V_n}$$

pro libovolný vektor $a \in V_n$. Znamená to, že $D(\varphi)$ je nulový operátor, a proto pro každou z jeho reprezentujících matic je matice $D(A)$ nulová. Dokázali jsme tvrzení známé pod názvem

Věta 16.15 (Hamiltonova-Cayleyova): *Nechť φ je lineární operátor ve vektorovém prostoru V_n a $D(\lambda)$ jeho charakteristický polynom,* $\operatorname{Sp}\varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ *jeho spektrum s násobnostmi charakteristických kořenů $k_1, \dots, k_r$. Pak $D(\varphi) = (-1)^n(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_{V_n})^{k_1} \cdots (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_{V_n})^{k_r}$ je nulový operátor, $0_{L(V_n,V_n)}$. V maticové formulaci: je-li $A \in \mathcal{M}(n/n)$ a $D(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, pak $D(A) = 0_{\mathcal{M}(n/n)}$.*

Příklad 16.29: Funkce nilpotentních operátorů

V případě exponenciály operátoru, nebo, ekvivalentně, jeho matice, jsme využili vyjádření stejnoměrně konvergentní mocninnou řadou, řadou Taylorovou. Jiné typy funkcí $f(\lambda)$ také dovedeme vyjádřit Taylorovou řadou, pokud mají potřebné vlastnosti (derivace všech řádů), a v oboru stejnoměrné konvergence s nimi dokážeme počítat podle pravidel, která jsme dokázali v druhém dílu v kapitole 8. Dejme tomu, že potřebné předpoklady jsou splněny a můžeme psát

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \lambda^k .$$

Dosadíme-li za proměnnou λ číselnou matici $A \in \mathcal{M}(n/n)$ a nekonečnou řadu „nějak“ sečteme, dostaneme matici n-tého řádu. Výraz

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) A^k , \tag{16.45}$$

je nekonečnou řadou, jejíž obecný k-tý člen je násobkem k-té mocniny matice A n-tého řádu. Sčítání řady (16.45) nemusí být v obecném případě schůdné a už vůbec ne příjemné. Zvlášť jednoduché je však v případě nilpotentních matic. Je-li totiž matice A nilpotentní se stupněm nilpotence třeba m, pak je $A^k = 0_{\mathcal{M}(n/n)}$ pro všechny hodnoty $k \geq m$ a vztah (16.45) konečným součtem obsahujícím nejvýše $(m-1)$-tou mocninu matice A. Jak víme, ani tak nemusíme všechny potřebné mocniny matice A počítat a pak je, vynásobené patřičnými koeficienty, sčítat. Stačí když umíme výraz (16.45) vypočítat pro Jordanovu matici $J = TAT^{-1}$ matice A a s výsledkem pak provést zpětnou podobnostní transformaci, $f(A) = T^{-1} f(J) T$. Jordanova matice je tvořena Jordanovými submaticemi, a tak stačí vědět, jak vypočteme maticovou hodnotu výrazu (16.45) pro nilpotentní Jordanovu submatici, dejme tomu řádu s. (Vzpomeňte si, že stupeň nilpotence matice J je shodný se stupněm nilpotence matice A a je roven řádu největší Jordanovy submatice, která se v matici J vyskytuje.) Co se děje s nilpotentní Jordanovou submaticí při jejím umocňování, jsme viděli v příkladu 16.21: výchozí submatice $J^{(s)}(0)$ má všude nuly, s výjimkou první diagonály nad diagonálou hlavní. Ta je obsazena jedničkami. Druhá mocnina této matice má jedničky pouze v druhé diagonále nad diagonálou hlavní (jinde nuly), atd., až nakonec poslední nenulová, $(s-1)$-tá, mocnina matice $J^{(s)}(0)$ obsahuje jediný nenulový prvek, a to jedničku v pravém horním rohu. s-tá mocnina matice $J^{(s)}(0)$ je již nulová. Dostáváme tedy

$$f\left[J^{(s)}(0)\right] = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\, J^{(s)}(0) + \frac{1}{2!} f''(0) \left[J^{(s)}(0)\right]^2 + \cdots + \frac{1}{(s-1)!} f^{(s-1)}(0) \left[J^{(s)}(0)\right]^{s-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(0) & \frac{1}{1!} f'(0) & \frac{1}{2!} f''(0) & \dots & \dots & \frac{1}{(s-1)!} f^{(s-1)}(0) \\ 0 & f(0) & \frac{1}{1!} f'(0) & \dots & \dots & \frac{1}{(s-2)!} f^{(s-2)}(0) \\ 0 & 0 & f(0) & \dots & \dots & \frac{1}{(s-3)!} f^{(s-3)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & f(0) & \frac{1}{1!} f'(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f(0) \end{pmatrix} .$$

Příklad 16.30: Lze matici logaritmovat?

Divná otázka? A přece na ni existuje v některých případech kladná odpověď. „Logaritmovat“ matici znamená hledat řešení rovnice $\mathrm{e}^X = A$, tedy najít takovou matici X, jejíž exponenciála je rovna zadané matici A. V tomto příkladu budeme pro jednoduchost uvažovat pouze o maticích nad $\mathbf{R}$, a to ještě takových, k nimž existuje nad $\mathbf{R}$ Jordanův normální tvar. To znamená, že všechny jejich charakteristické kořeny jsou reálné.

Odpovědět na otázku položenou na začátku příkladu nám opět pomohou znalosti problematiky mocninných řad. S rozvojem logaritmu do mocninné řady jsme se setkali při jiných příležitostech, například v kapitole 13, kde jsme funkci $\ln x$ rozvíjeli do řady s obecným středem $x_0 > 0$. Nyní položme $x_0 = 1$. Platí

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots\,,$$

přičemž řada konverguje (lokálně) stejnoměrně pro $x \in (0,2)$ ($|x-1| < 1$). Vyčíslíme-li tuto řadu (pravou stranu předchozí rovnosti) tak, že za $(x-1)$ dosadíme $(A-E) \in \mathcal{M}(n/n)$ za předpokladu, že $\|A-E\| < 1$, dostaneme čtvercovou matici řádu n, kterou můžeme označit jako $X = \ln A$. Dostáváme

$$X = \ln A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(A-E)^k \implies X = T^{-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(J_{A-E})^k\right] T\,,$$

kde jsme jako J_{A-E} označili Jordanův normální tvar matice $(A-E)$ a T je regulární matice realizující podobnostní transformaci $J_{A-E} = T(A-E)T^{-1}$. K tomu, abychom dokázali vyrobit logaritmus matice, stačí, jak je obvyklé, umět to pro Jordanovu submatici a získané bloky pak už jen naskládat podél hlavní diagonály. Pro logaritmus Jordanovy submatice s-tého řádu příslušné hodnotě λ_0 platí

$$\ln\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right]^k,$$

(samozřejmě tehdy a pouze tehdy, když řada lokálně stejnoměrně konverguje). Pro vyjádření k-té mocniny matice $J^{(s)}(\lambda_0)$ použijeme vztah (16.36), v němž nesmíme zapomenout, že prvky, u nichž vychází exponent základu λ_0 záporný, klademe rovny nule. Pak

$$\ln\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right] = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\lambda_0^k & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} & \dots & \sum_{k=s-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{k}{s-1}\lambda_0^{k-s+1} \\ 0 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\lambda_0^k & \dots & \sum_{k=s-2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{k}{s-2}\lambda_0^{k-s+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} \\ 0 & \dots & \dots & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\lambda_0^k \end{pmatrix}.$$

Všimněme si diagonálních prvků matice $\ln[J^{(s)}(\lambda_0)]$. Všechny jsou samozřejmě shodné a jsou dány řadou

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\lambda_0^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left[(1+\lambda_0)-1\right]^k = \ln\left(1+\lambda_0\right),$$

přičemž pro $1+\lambda_0 \le 0$ logaritmus není definován.

A co ostatní prvky? Posuňme se do první diagonály nad hlavní diagonálou. Tam stojí řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{k}{1}\lambda_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\lambda_0^{k-1}\,,$$

v níž jistě neomylně poznáváte geometrickou řadu s kvocientem $(-\lambda_0)$. Pro $|\lambda_0| < 1$ (λ_0 chápáno jako proměnná) řada konverguje lokálně stejnoměrně a její součet je $\frac{1}{1+\lambda_0}$. Ale to je přece derivace logaritmu vyčíslená v bodě $(1+\lambda_0)$. V další diagonále stojí na všech jejích pozicích řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{2} \lambda_0^{k-2} = \frac{1}{2!} \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1}(k-1)\lambda^{k-2} \bigg|_{\lambda_0} = \frac{1}{2!} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \lambda^{k-1} \right]_{\lambda_0} =$$

$$= \frac{1}{2!} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) \right]_{\lambda_0} = \frac{1}{2!} \left. \frac{\mathrm{d}^2 \ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} \right|_{\lambda_0} .$$

Zkusme ještě další diagonálu, i když už je asi jasné, co se v ní objeví:

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{3} \lambda_0^{k-3} = \frac{1}{3!} \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k-1}(k-1)(k-2)\lambda_0^{k-3} =$$

$$= \frac{1}{3!} \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \lambda^{k-1} \right]_{\lambda_0} = \frac{1}{3!} \left. \frac{\mathrm{d}^3 \ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^3} \right|_{\lambda_0} .$$

Podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady $|\lambda_0| < 1$ se nemění. Konečně pro obecný prvek matice $\ln[J^{(s)}(\lambda_0)]$ nad hlavní diagonálou platí

$$\sum_{k=r-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{r-1} \lambda_0^{k-r+1} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=r-1}^{\infty} (-1)^{k-1}(k-1)(k-2)\cdots(k-r+2)\lambda_0^{k-r+1} =$$

$$= \frac{1}{(r-1)!} \frac{\mathrm{d}^{r-2}}{\mathrm{d}\lambda^{r-2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \lambda^{k-1} \bigg|_{\lambda_0} = \frac{1}{(r-1)!} \left. \frac{\mathrm{d}^{r-1} \ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^{r-1}} \right|_{\lambda_0} .$$

Výsledný tvar logaritmu matice $J^{(s)}(\lambda_0)$ je

$$\ln\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right] = \begin{pmatrix} \ln(1+\lambda) & \frac{\mathrm{d}\ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} & \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} & \dots & \frac{1}{(s-1)!}\frac{\mathrm{d}^{s-1}\ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^{s-1}} \\ 0 & \ln(1+\lambda) & \frac{\mathrm{d}\ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} & \dots & \frac{1}{(s-2)!}\frac{\mathrm{d}^{s-2}\ln(1+\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^{s-2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \ln(1+\lambda) \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_0} . \quad (16.46)$$

Pro $s > 1$ je třeba, aby platilo $|\lambda_0| < 1$, v případě $s = 1$ je podmínka mírnější, $\lambda_0 > -1$.

Pozn. 1: Pozor! Právě získané vyjádření matice $\ln J^{(s)}(\lambda_0)$ je pro $s > 1$ omezeno na hodnoty $\lambda_0 \in (-1, 1)$ (omezení vyplývající z požadavku na konvergenci řad vyjadřujících prvky nad diagonálou). Pro $s = 1$ je podmínka pro λ_0 mírnější, konkrétně $\lambda_0 > -1$. Vyplývá z definičního oboru funkce $\ln(1+\lambda_0)$, která je jediným prvkem matice $\ln J^{(1)}(\lambda_0)$. Logaritmus (reálného) čísla $(1+\lambda_0)$ vystupující v diagonále matice $\ln\left[J^{(s)}(\lambda_0)\right]$ je totiž definován pro všechny hodnoty $\lambda_0 > -1$, avšak geometrická řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\lambda^{k-1}$, z níž jsou odvozeny ostatní prvky matice, konverguje pouze pro $|\lambda_0| < 1$. Tuto podmínku proto musíme při praktických výpočtech kontrolovat .

Pozn. 2: Věnujme ještě trochu pozornosti geometrickým řadám vystupujícím v nediagonálních prvcích matice

$J^{(s)}(\lambda_0)$. Víme, že konvergují pro $|\lambda_0| < 1$. Pro $0 < \lambda < 1$ není s jejich zápisem problém. Co ale když je λ_0 nulové, nebo záporné? Umocnění jakéhokoli čísla, včetně nuly a záporných čísel na přirozený exponent m chápeme jako $\underbrace{\lambda_0 \cdots \lambda_0}_{m\text{-krát}}$. Co s nulou či záporným číslem umocněným na nultou? Je to snadné, uvědomíme-li si, že jsme zápis řad ve tvaru sumy získali tak, že jsme jejich první, absolutní člen, zapsali zjednodušeně pomocí λ_0^0. Problému s umocněním na nultou se vyhneme, vyčleníme-li absolutní člen řady zvlášť,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{1} \lambda_0^{k-1} &= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \lambda_0^{k-1}, \\
\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{2} \lambda_0^{k-2} &= -\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{2} \lambda_0^{k-2}, \\
\ldots\ldots\ldots &= \ldots\ldots\ldots, \\
\sum_{k=s-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{s-1} \lambda_0^{k-s+1} &= \frac{(-1)^{s-2}}{s-1} + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{s-1} \lambda_0^{k-s+1}.
\end{aligned}$$

Příklad 16.31: Logaritmus matice prakticky …

Zkusme vypočítat logaritmus zadaných matic, zatím jenom druhého řádu. (První řád je triviální, jde o jediný prvek, jímž je logaritmus jediného prvku matice A.) Zadáme

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = J^{(2)}\left(\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

a vyjádříme logaritmus obou zadaných matic. Obě matice jsou v Jordanově tvaru. První z nich je tvořena dvěma Jordanovými submaticemi prvního řádu příslušnými hodnotě 3, druhá je přímo Jordanovou submaticí druhého řádu příslušnou hodnotě $\frac{4}{3}$. Ale pozor! Ve vztahu pro logaritmus nevystupují vlastní hodnoty matice A, nýbrž vlastní hodnoty matice $(A - E)$. Musíme tedy při výpočtu logaritmu matice A_1 dosazovat hodnotu $\lambda_0 = 2$ a při výpočtu logaritmu matice A_2 hodnotu $\lambda_0 = \frac{1}{3}$. Hodnota $\lambda_0 = 2 > -1$ splňuje podmínku uvedenou v předchozí poznámce 1, neboť obě Jordanovy submatice v matici A_1 jsou prvního řádu. Matice $A_2 = J^{(2)}\left(\frac{4}{3}\right)$ je druhého řádu, hodnota $\lambda_0 = \frac{1}{3}$ splňuje požadavek konvergence geometrické řady obsažené v matici (16.46). Dostáváme

$$\ln A_1 = \begin{pmatrix} \ln 3 & 0 \\ 0 & \ln 3 \end{pmatrix}, \quad \ln A_2 = \begin{pmatrix} \ln \frac{4}{3} & \frac{3}{4} \\ 0 & \ln \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

A teď zkusme matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

V tomto případě je $\lambda_0 = 3$ (dvojnásobná vlastní hodnota matice $(A-E)$ a samozřejmě současně i matice $J-E$). Zdá se, že je zde problém: Jordanova matice příslušná matici $(A-E)$ je tvořena jedinou submaticí $J^{(2)}(3)$. Vlastní hodnota $\lambda_0 = 3$ nesplňuje podmínku konvergence řad obsažených v logaritmu submatice $J^{(2)}(3)$. Problém však lze odstranit docela šikovným „trikem." V úloze 7 Cvičení 16.3.4 uvidíme, že pro komutující matice A_1 a A_2 platí $\mathrm{e}^{(A_1+A_2)} = \mathrm{e}^{A_1}\mathrm{e}^{A_2}$, tj. $\ln(A_1\, A_2) = \ln A_1 + \ln A_2$. Pro matici A dostaneme

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\ln A = \begin{pmatrix} \ln 3 & 0 \\ 0 & \ln 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ln \frac{4}{3} & \frac{3}{4} \\ 0 & \ln \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 4 & \frac{3}{4} \\ 0 & \ln 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 16.32: ... a ještě jeden, třetího řádu

Vypočteme s provedením všech potřebných kroků logaritmus matice

$$A = \begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnotou matice $(A - E)$ je trojnásobná hodnota $\lambda_0 = e - 1 > 1$. Geometrická řada, z níž (a jejích derivací) jsou utvořeny nediagonální prvky matice (16.46), pro tuto hodnotu λ_0 nekonverguje. Proto využijeme rozkladu matice A na součin dvou matic, podobně jako jsme to udělali v příkladu 16.31,

$$A = \begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e}^{-1} \\ 0 & 1 & 3\mathrm{e}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 A_2 .$$

Matice A_1 a A_2 komutují, proto lze použít vztahu $\ln A = \ln A_1 + \ln A_2$ (úloha 7 ve Cvičení 16.3.4). Budeme potřebovat Jordanův normální tvar všech matic a (kteroukoli) matici podobnostní transformace, která jednotlivé matice na tento tvar převádí.

Nejprve pro matici A. Charakteristická matice $(A - \lambda E)$ a její kanonický tvar a Jordanův normální tvar matice A jsou

$$\begin{pmatrix} e-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & e-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & e-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - e)^3 \end{pmatrix}, \quad J_A = \begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Kanonický tvar matice $(A - \lambda E)$ jsme získali snadno pomocí systému dělitelů $(d_1(\lambda), d_2(\lambda), d_3(\lambda))$, $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1$, $d_3(\lambda) = (\lambda - e)^3$. Ještě najdeme nějakou matici podobnostní transformace $J_A = TAT^{-1}$. Použijeme řetízků rovnic, postup provedeme podrobně. Pro vlastní vektory platí

$$(A - eE)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_3 = (0, 0, \gamma), \ \gamma \neq 0 ,$$

dalším článkem řetízku je soustava rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & \gamma \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow f_2 = \left(0, \frac{1}{3}\gamma, c\right),$$

a nakonec

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\gamma \\ 2 & 3 & 0 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}c - \frac{2}{9}\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow f_1 = \left(\frac{1}{3}\gamma, \frac{1}{3}c - \frac{2}{9}\gamma, C\right).$$

Pro podobnostní transformaci může posloužit kterákoli z matic

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\gamma & \frac{1}{3}c - \frac{2}{9}\gamma & C \\ 0 & \frac{1}{3}\gamma & c \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \neq 0\,.$$

Zvolíme třeba $\gamma = 3$, $c = C = 0$, a dostaneme

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že opravdu platí $A = T^{-1} J_A T$ tj.

$$\begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teď se pustíme do matic A_1 a A_2. Matice A_1 je v Jordanově tvaru, který je tvořen třemi Jordanovými submaticemi prvního řádu, vlastní hodnota matice $(A_1 - E)$ je trojnásobná, $\lambda_0 = \mathrm{e} - 1$, tj. $1 + \lambda_0 = \mathrm{e}$, $\ln(1 + \lambda_0) = 1$. Vychází tak $\ln A_1 = E$. Pro charakteristickou matici $(A_2 - \lambda E)$ a Jordanův normální tvar matice A_2 platí

$$(A_2 - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \mathrm{e}^{-1} & 2\mathrm{e}^{-1} \\ 0 & 1-\lambda & 3\mathrm{e}^{-1} \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^3, \end{pmatrix}, \quad J_{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnota matice A_2 je trojnásobná jednička, tj. vlastní hodnota matice $(A_2 - E)$, kterou budeme potřebovat pro výpočet logaritmu matice J_{A_2}, je trojnásobná nula, $\lambda_0 = 0$. Opět budeme nejprve hledat matici podobnostní transformace T_2, pro kterou je $J_{A_2} = T_2 A_2 T_2^{-1}$. Postupně řešíme jednotlivé články řetízku rovnic (prvním článkem je soustava pro vlastní vektory):

$$(A_2 - 1 \cdot E)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-1} & 0 & 0 \\ 2\mathrm{e}^{-1} & 3\mathrm{e}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_3 = (0, 0, \gamma),\ \gamma \neq 0\,,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{e}^{-1} & 3\mathrm{e}^{-1} & 0 & \gamma \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}\mathrm{e}\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow f_2 = \left(0, \frac{1}{3}\mathrm{e}\gamma, c\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{-1} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\mathrm{e}\gamma \\ 2\mathrm{e}^{-1} & 3\mathrm{e}^{-1} & 0 & c \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\mathrm{e}^2\gamma \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}c\mathrm{e} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^2\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow f_1 = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^2\gamma, \frac{1}{3}c\mathrm{e} - \frac{2}{9}\mathrm{e}^2\gamma, C\right),$$

kde čísla c a C jsou zcela libovolná, číslo γ je rovněž libovolné, s výjimkou nuly. Pro jednoduchost zvolíme $\gamma = 3$, $c = C = 0$ a dostaneme

$$T_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & -\frac{2}{3}\mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2} & \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Opět pro pořádek prověřte, že platí $A_2 = T_2^{-1} J_{A_2} T_2$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-1} & 2e^{-1} \\ 0 & 1 & 3e^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2} & \frac{2}{3}e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2} & -\frac{2}{3}e^{2} & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A teď už budeme logaritmovat. Logaritmus matice A_1 už máme, je jím jednotková matice. Pro zjištění logaritmu matice A_2 nejprve zlogaritmujeme její normální tvar $J_{A_2} = J^{(3)}(1)$ (Jordanovou maticí matice A_2 je Jordanova submatice třetího řádu příslušná hodnotě 1). V diagonále jejího logaritmu bude na všech pozicích $\ln 1 = 0$. Na pozicích v první diagonále nad diagonálou hlavní bude hodnota (viz poznámku 2 na konci příkladu 16.30)

$$1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \lambda_0^{k-1} = 1\,,$$

neboť vlastní hodnota matice $(A_2 - E)$ (a taktéž pochopitelně matice $(J_{A_2} - E)$) je $\lambda_0 = 0$. Na jediné pozici na druhé diagonále nad hlavní (v pravém horním rohu) bude hodnota

$$-\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{k}{2} \lambda_0^{k-2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Celkem tedy

$$\ln J_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ln A_2 = T_2^{-1} (\ln J_{A_2})\, T\,,$$

$$\ln A_2 = \begin{pmatrix} e^{-2} & \frac{2}{3}e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2} & -\frac{2}{3}e^{2} & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{-1} & -\frac{3}{2}e^{-2} + 2e^{-1} \\ 0 & 0 & 3e^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sečtením $\ln A_1$ a $\ln A_2$ dostáváme konečný výsledek

$$\ln A = \begin{pmatrix} 1 & e^{-1} & -\frac{3}{2}e^{-2} + 2e^{-1} \\ 0 & 1 & 3e^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dalo to práci, ale zato jsme podrobně provedli všechny potřebné kroky celého postupu.

16.3.4 Cvičení

1. Dokažte, že maticová norma (16.35) skutečně splňuje axiomy normy (11.6). Dokažte, že zobrazení

$$\mu : \mathcal{M}(n/n) \times \mathcal{M}(n/n) \ni [A, B] \longrightarrow \mu(A, B) = \|A - B\|$$

je metrika na množině $\mathcal{M}(n/n)$.

2. Dokažte nerovnosti $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ a $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$ pro maticovou normu (16.35).

3. Dokažte, že pro každou matici $A \in \mathcal{M}(n/n)$, $A = (\alpha_i^j)$, platí $\left\|A^k\right\| \leq n^{k-1} \|A\|^k$.
Návod: Matematickou indukcí: Pro $k = 1$ je důkaz triviální (proveďte), indukční předpoklad: $\left\|A^k\right\| \leq$ $\leq n^{k-1} \|A\|^k$. Označte $B = A^k$, $B = (\beta_i^j)$, $C = A^{k+1} = (\gamma_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, a využijte nerovnost

$$|\gamma_i^j| = |\alpha_i^s \, \beta_s^j| \leq |\alpha_i^s||\beta_s^j| \leq \big(n \|A\|\big) \left(n^{k-1} \|A\|^k\right).$$

4. Dokažte nerovnost

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} A_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$$

pro libovolné matice $A_k \in \mathcal{M}(n/n)$.

5. Dokažte, že platí $\left\|e^A\right\| \leq \frac{1}{n}\, e^{n\|A\|}$.
Návod: Zapište matici $\left\|e^A\right\|$ řadou (16.34) a proveďte odhad normy této řady s využitím výsledků úloh 3. a 4.

6. Dokažte podrobně, že posloupnost $\{\frac{1}{k!} A^k\}_{k \in \mathbf{N}}$ je cauchyovská (vzhledem k maticové normě (16.35)).

7. Dokažte, že v případě, že matice $A, B \in \mathcal{M}(n/n)$ komutují, platí $e^{A+B} = e^A \, e^B = e^B \, e^A$.
Návod: Řada vyjadřující exponenciálu matice stejnoměrně konverguje (vzhledem k maticové normě (16.35)). Proto lze řady pro matici A a B vynásobit takto:

$$e^A \, e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} B^l \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{s!(r-s)!} A^s B^{r-s} = \dots$$

a v závěru úprav využít binomické věty. Tu lze aplikovat právě za předpokladu komutace matic.

8. Vypočtěte exponenciály matic z úlohy 1 cvičení 16.1.6.
Výsledky:

$$\text{a)} \quad e^A = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 & 0 & 0 \\ -e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2e^2 & -e^2 \\ 0 & 0 & e^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad e^A = \begin{pmatrix} e & 2e & 5e & \frac{34}{3}e \\ 0 & e & 2e & 5e \\ 0 & 0 & e & 2e \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

$$\text{c)} \quad e^A = \begin{pmatrix} 0 & e^8 & -e^8 & e^8 \\ -e^8 & 2e^8 & -e^8 & e^8 \\ e^8 & -e^8 & 2e^8 & -e^8 \\ e^8 & -e^8 & e^8 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{d)} \quad e^A = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 1-6e^{-1} & 1-5e^{-1} \\ -5+2e^{-1} & 22-6e^{-1} & 17-5e^{-1} \\ 6-2e^{-1} & -26+6e^{-1} & -20+5e^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{e)} \quad e^A = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}e & 6e & -\frac{5}{2}e \\ -\frac{5}{2}e & -3e & \frac{3}{2}e \\ -\frac{3}{2}e & -2e & \frac{3}{2}e \end{pmatrix}, \qquad \text{f)} \quad e^A = (E_i^j), \ 1 \leq i, j \leq 3,$$

$E_1^1 = 4e - 3\cos 1 - \sin 1$, $E_1^2 = 8e - 8\cos 1 - \sin 1$, $E_1^3 = -2e + 2\cos 1 - \sin 1$, $E_2^1 = -2e + 2\cos 1$, $E_2^2 = -4e + 5\cos 1 - \sin 1$, $E_2^3 = e - \cos 1 + \sin 1$, $E_3^1 = -2e + 2\cos 1 - 2\sin 1$, $E_3^2 = -4e + 4\cos 1 - 6\sin 1$, $E_3^3 = e + 2\cos 1$,

$$\text{g)}\quad e^A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{h)}\quad e^A = \begin{pmatrix} -6e^2 & 2e^2 & 12e^2 \\ -\frac{9}{2}e^2 & 2e^2 & 8e^2 \\ -\frac{7}{2}e^2 & e^2 & 7e^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{i)}\quad e^A = \begin{pmatrix} 7e - 2e^{-3} & 4e - 4e^{-3} & 10e - 2e^{-3} \\ 2e + e^{-3} & -e + 2e^{-3} & -3e + e^{-3} \\ -3e + e^{-3} & -2e + e^{-3} & -4e + e^{-3} \end{pmatrix},$$

$$\text{j)}\quad e^A = \begin{pmatrix} 4 - 6e^{-1} & -12 + 27e^{-1} & -6 + 15e^{-1} \\ 2 - 5e^{-1} & -6 + 22e^{-1} & -3 + 12e^{-1} \\ -2 + 6e^{-1} & 6 - 26e^{-1} & 3 - 14e^{-1} \end{pmatrix}.$$

9. Určete fundamentální matici následujících soustav rovnic jako exponenciálu matice soustavy A. Úlohy h) až j) jsou převzaty z Cvičení 7.7.4 v druhém dílu (úloha 1).

a) $\dot{x}^1 = x^1$, $\dot{x}^2 = x^1 + x^2$,

b) $\dot{x}^1 = 5x^1 + 4x^2$, $\dot{x}^2 = -6x^1 - 5x^2$,

c) $\dot{x}^1 = 3x^1 - x^2$, $\dot{x}^2 = x^1 + x^2$,

d) $\dot{x}^1 = 2x^1 + x^2$, $\dot{x}^2 = 4x^1 - x^2$,

e) $\dot{x}^1 = -2x^1 + 2x^2$, $\dot{x}^2 = 2x^1 + x^2$,

f) $\dot{x}^1 = x^1 - 2x^2 - x^3$, $\dot{x}^2 = -x^1 + 2x^2 - 5x^3$, $\dot{x}^3 = -x^1 + 2x^2 - 3x^3$,

g) $\dot{x}^1 = -2x^1 + x^2 + 2x^3$, $\dot{x}^2 = -x^1 + 2x^3$, $\dot{x}^3 = -2x^1 + 3x^3$,

h) $\dot{x}^1 = x^2$, $\dot{x}^2 = -x^1$,

i) $2\dot{x}^1 = 3x^1 + x^2 - x^3$, $2\dot{x}^2 = -x^1 + 5x^2 + x^3$, $\dot{x}^3 = -x^1 + x^2 + 2x^3$,

j) $2\dot{x}^1 = x^1 + 3x^2$, $2\dot{x}^2 = 3x^1 + x^2$.

Výsledky: Pro zjednodušení označme $x^i(0) = x_0^i$, $1 \le i \le 2$, resp. $1 \le i \le 3$,

$$\text{a)}\quad (x^1 \quad x^2) = (x_0^1 \quad x_0^2)\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad (x^1 \quad x^2) = (x_0^1 \quad x_0^2)\begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{-t} & -3e^t + 3e^{-t} \\ 2e^t - 2e^{-t} & -2e^t + 3e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\ (x^1 \quad x^2) = (x_0^1 \quad x_0^2)\begin{pmatrix} (1+t)e^{2t} & te^{2t} \\ -te^{2t} & (1-t)e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \text{d)}\ (x^1 \quad x^2) = (x_0^1 \quad x_0^2)\begin{pmatrix} \frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} \\ \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} \end{pmatrix},$$

$$\text{e)}\quad \left(x^1 \quad x^2\right) = \left(x_0^1 \quad x_0^2\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-3t} & \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{-3t} \\ \frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}e^{-3t} & \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t} \end{pmatrix},$$

$$\text{f)}\quad \left(x^1 \quad x^2 \quad x^3\right) = \left(x_0^1 \quad x_0^2 \quad x_0^3\right)\begin{pmatrix} 1 + t + 2t^2 & -t + t^2 & -t \\ -2t - 4t^2 & 1 + 2t - 2t^2 & 2t \\ -t + 6t^2 & -5t + 3t^2 & 1 - 3t \end{pmatrix},$$

$$\text{g)}\quad \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -te^t + \mathrm{e}^{-t} & -t\mathrm{e}^t & -t\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ -t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} & -t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t & -t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ 2t\mathrm{e}^t & 2t\mathrm{e}^t & 2t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

$$\text{h)}\quad \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} & \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix},$$

$$\text{i)}\quad \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 & x_0^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix},$$

$$\text{j)}\quad \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 & x_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

10. Pomocí exponenciály matice najděte partikulární řešení následujících soustav rovnic pro dané počáteční podmínky (úloha 3, Cvičení 7.7.4 v druhém dílu):

a) $\dot{x}^1 = x^1 - 2x^3$, $4\dot{x}^2 = -x^1 + 3x^2 - x^3$, $4\dot{x}^3 = x^1 + x^2 - 3x^3$, $x^1(0) = x^3(0) = -1$, $x^2(0) = 2$,

b) $\dot{x}^1 = 3x^1 + 5x^2$, $\dot{x}^2 = -2x^1 - 3x^2$, $x^1(0) = 2$, $x^2(0) = -1$,

c) $\dot{x}^1 = x^1 + x^2 - x^3$, $2\dot{x}^2 = -x^1 + x^2 + x^3$, $2\dot{x}^3 = 3x^1 + x^2 - 3x^3$, $x^1(0) = -1$, $x^2(0) = 1$, $x^3(0) = 0$.

Výsledky:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t & \frac{1}{4}t \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t & \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t & \frac{1}{4}t \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t & -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t & 1 - \frac{3}{4}t \end{pmatrix},$$

$$x^1 = 2t - \mathrm{e}^t, \quad x^2 = 1 + t + \mathrm{e}^t, \quad x^3 = -1 + t\,,$$

$$\text{b)}\quad \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1+3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \\ -\frac{5\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{5\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} & \frac{1+3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1-3\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix},$$

$$x^1 = \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = 2\cos t + \sin t\,,$$

$$x^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = -\cos t - \sin t\,,$$

$$\text{c)}\quad \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + t + 1 & -\frac{1}{2}t & -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t \\ \frac{1}{2}t^2 + t & \frac{1}{2}t + 1 & \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t^2 - t & \frac{1}{2}t & \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1 \end{pmatrix},$$

$$x^1 = t^2 - 1, \quad x^2 = t + 1, \quad x^3 = t^2 - t\,.$$

11. Dokažte, že i-násobek antihermiteovského operátoru je operátor hermiteovský (samoadjungovaný).

12. Z kapitoly 6 víme, že samoadjungovaný lineární operátor je v každé ortonormální bázi (vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu) reprezentován samoadjungovanou maticí (nad **R** jde o symetrický operátor, reprezentovaný v ortonormálních bázích symetrickou maticí), a unitární operátor je v každé ortonormální bázi reprezentován unitární maticí (nad **R** jde o ortogonální operátor, reprezentovaný v ortonormálních bázích ortogonální maticí). Zjistěte vlastnosti matic reprezentujících antihermiteovské (v prostorech nad **R** antisymetrické) operátory a matic reprezentujících normální operátory.
Výsledky: V každé ortonormální bázi je antihermiteovský (nad **R** antisymetrický) operátor reprezentován antihermiteovskou (nad **R** antisymetrickou) maticí $A = -A^{T*}$ ($A = -A^T$). V každé ortonormální bázi je normální operátor reprezentován normální maticí $AA^{T*} = A^{T*}A$.

13. Výpočtem exponenciály matice $\mathrm{e}^{\ln A}$ ověřte správnost výsledků získaných v příkladu 16.31.

14. Vypočtěte druhou odmocninu z matic A_1, A_2 a A z příkladu 16.31 a matice A z příkladu 16.32, užitím rovnosti $\sqrt{A} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln A}$.

15. Výpočtem exponenciály matice $\ln A$ z příkladu 16.32 ověřte správnost výsledku, který jsme v příkladu 16.32 získali.