Výsledky cvičení

4.1.6

1. a) ano, b) ne, c) ano, d) ano, e) ne, f) ano, g) ano. **2.** a) např. $H = \{\sigma_0 = (1,2,3,4), \sigma_1 = (1,2,4,3)\}$ není normální podgrupou (v označení permutací vypisujeme pouze druhý řádek), b) např. podmnožina H všech sudých čísel je normální podgrupou, $\mathbf{Z}/H$ je grupa zbytkových tříd modulo 2, c) např. podmnožina všech diagonálních regulárních matic není normální podgrupou, d) např. $H = \{Z_0, Z_4\}$ je normální podgrupou, příslušná faktorová grupa je izomorfní s grupou zbytkových tříd modulo 4. **5.** $\sigma \circ \nu = (2,6,3,4,5,1)$, $\nu \circ \sigma = (3,2,5,4,1,6)$, $\sigma^{-1} = (5,1,2,4,6,3)$, $\sigma^5 = (1,2,3,4,5,6)$ (v označení permutací vypisujeme pouze druhý řádek). **6.** Označíme-li $\sigma_0 = (1,2,3)$, $\sigma_1 = (2,1,3)$, $\sigma_2 = (1,3,2)$, $\sigma_3 = (3,2,1)$, $\sigma_4 = (2,3,1)$ a $\sigma_5 = (3,1,2)$,

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_1	σ_1	σ_0	σ_4	σ_5	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	σ_5	σ_0	σ_4	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	σ_4	σ_5	σ_0	σ_1	σ_2
σ_4	σ_4	σ_3	σ_1	σ_2	σ_5	σ_0
σ_5	σ_5	σ_2	σ_3	σ_1	σ_0	σ_4

7. a) ani okruh, ani těleso, b) okruh ano, těleso ne, c) okruh ano, těleso ne, d) $\mathbf{N}$ ani okruh, ani těleso, $\mathbf{Z}$ okruh ano, těleso ne, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ jsou okruhem i tělesem. **8.** Např. okruh všech sudých celých čísel (podokruh v množině $\mathbf{Z}$). **9.** a) ne, b) ne, c) ano — báze např. $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$, $\dim V = n + 1$, d) ne, e) ne, f) ano — báze např. $\mathcal{B} = \{(2,1)\}$, $\dim V = 1$, g) ano — báze např. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim V = 2$. **10.** a) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, b) $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -3$, c) $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\alpha_4 = -\frac{1}{2}$. **11.** a) ano — báze např. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\dim P = 3$, doplňující vektor např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) ano — báze např. $\mathcal{B} = \{(1,-1)\}$, dim$P = 1$, doplňující vektor např. $(1,0)$, c) ne, d) ne, e) ano — báze např. $\mathcal{B} = \{1, x^2, x^4\}$, dim$P = 3$, doplňující vektory např. $\{x, x^3\}$, f) ano — báze např. $\mathcal{B} = \{(x+1)(x-1), (x+1)(x-1)x, (x+1)(x-1)x^2\}$, dim$P = 3$, doplňující vektory např. $\{1, x\}$. **12.** a) dim$L_1 = 3$, bází jsou jakékoli tři lineárně nezávislé vektory, doplněk $L_1' = \{0_{V_n}\}$, dim$L_2 = 2$, báze např. $\mathcal{B} = \{(0,2,1),(1,4,0)\}$, doplněk např. $L_2' = [|(1,0,0)|]$, $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^3 = L_1$, $L_1 \cap L_2 = L_2$, b) dim$L_1 = 2$, bází mohou být např. kterékoli dva z vektorů v zadání, doplněk např. $L_1' = [|(0,0,1,0),(1,0,0,0)|]$, dim$L_2 = 2$, bází mohou být např. kterékoli dva z vektorů v zadání, doplněk např. $L_2' = [|(1,0,0,0),(0,1,0,0)|]$, $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^4$, $L_1 \cap L_2 = 0_{V_n}$, c) dim$L_1 = 2$, bází mohou být např. kterékoli dva z vektorů v zadání, doplněk např. $L_1' = [|1, x^3, x^4, x^5, x^6|]$, dim$L_2 = 3$, zadané vektory jsou bází L_2, doplněk např. $L_2' = [|x^2, x^4, x^5, x^6|]$, $\dim(L_1 + L_2) = 4$, $L_1 + L_2 = [|x+1, x^2+1, 1, x^3|]$, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, $L_1 \cap L_2 = [|x^2 + x + 2|]$, d) dim$L_1 = 3$, báze a doplněk viz výsledek úlohy 11 a), dim$L_2 = 2$, báze např. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, doplněk např. $L_2' = \left[\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right|\right]$, $L_1 + L_2$ je celý prostor matic řádu 2, $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, báze např. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$. S výjimkou triviálních případů $L = \{0_{V_n}\}$, resp. $L = V$ (kdy je doplněk určen jednoznačně $L' = V$, resp. $L' = \{0_{V_n}\}$), existuje k podprostoru L nekonečně mnoho doplňků. **13.** dim$V = 1$, báze např. $\mathcal{B} = \{2\}$, izomorfismus např. $V \ni u \to \ln u \in \mathbf{R}$.

4.2.6

1. a) ne, b) ano, c) ano, d) ne, e) ano. **2.** b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Ker$\varphi = [|(1,-1,-1)|]$, Im$\varphi = [|(1,0,1),(1,-1,0)|]$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Ker$\varphi = \{0_{V_3}\}$, Im$\varphi = [|(1,1,1),(-1,1,0)|]$, e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, Ker$\varphi = [|(1,1,0),(3,0,-1)|]$, Im$\varphi = \mathbf{R}$. **4.** a) např. $\varphi(x,y,z) = (x - y + z, x - y + z, x - y + z)$, b) např. $\varphi(x,y,z) = (x+y, x+2y, 0)$, c) např. identita je izomorfismem, resp. nulové zobrazení není izomorfismem d) např. $\varphi(x,y) = (x-y, x-y)$. **5.** $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -9 & 5 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$, Ker$\varphi = \{0_{V_3}\}$, Im$\varphi = [|(-1,2,0),(0,-3,5)|]$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **6.**

a) ano, $\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) ne. **7.** b) Ker$\varphi = P[0]$, Im$\varphi = P[n-1]$, $d = 1$, $h = n$, c) ne, d)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Neutrálním prvkem je nulové zobrazení, opačným prvkem k φ je zobrazení $-\varphi$, pro které $(-\varphi)(a) = -(\varphi(a))$ pro všechna $a \in V_n$.

4.3.3

1. a) nemá reálné vlastní hodnoty pro $a \neq 0$, pro $a = 0$ jde o nulový operátor, všechny nenulové vektory jsou vlastní a přísluší hodnotě $\lambda = 0$, b) $\lambda_1 = 1$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(0,0,1)|]$, c) $\lambda_1 = 0$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(-2,-1,1)|]$, d) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(1,2,0),(1,0,1)|]$, e) $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$, $L_1 = [|(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)|]$, $\lambda_2 = -2$, $k_2 = 1$, $L_2 = [|(1,-1,-1,-1)|]$. Diagonální reprezentaci má pouze operátor e) a pro $a = 0$ také operátor a). **4.** a,b) např. otočení o úhel $\alpha \neq k\pi$ v $\mathbf{R}^2$ nebo zobrazení z cvičení 1a) pro $a \neq 0$, c) např. zobrazení z cvičení 1b), 1c), 1d), d) např. derivace polynomů (vlastními vektory jsou polynomy stupně nula), e,f) skalární násobek identického zobrazení.

5.2.6

1. a) $\varrho_P = 5$, $\varphi_P = \arccos\frac{4}{5}$, $\varphi_P \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\vec{f}_{\varrho,P} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $\vec{f}_{\varphi,P} = (-3,4)$, $\Delta S_P = 5\Delta\varrho\Delta\varphi$, b) $\varrho_P = 13$, $\varphi_P = 2\pi - \arccos\frac{5}{13}$, $\varphi_P \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, $\vec{f}_{\varrho,P} = (\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$, $\vec{f}_{\varphi,P} = (12,5)$, $\Delta S_P = 13\Delta\varrho\Delta\varphi$. **2.** a) $x_P = -4\sqrt{3}$, $y_P = -4$. b) $x_P = \frac{13}{2}$, $y_P = -13\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 1a) $\mathcal{C}_{\varphi,P} : x^2 + y^2 = 25$, $\mathcal{C}_{\varrho,P} : y = \frac{3}{4}x$, $x \geq 0$, 1b) $\mathcal{C}_{\varphi,P} : x^2 + y^2 = 169$, $\mathcal{C}_{\varrho,P} : y = -\frac{12}{5}x$, $x \geq 0$, 2a) $\mathcal{C}_{\varphi,P} : x^2 + y^2 = 64$, $\mathcal{C}_{\varrho,P} : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $x \leq 0$, 2b) $\mathcal{C}_{\varphi,P} : x^2 + y^2 = 169$, $\mathcal{C}_{\varrho,P} : y = -\sqrt{3}x$, $x \geq 0$. **4.** $x_P = -2$, $y_P = 0$, $z_P = -1$, $\mathcal{S}_{\varrho,P} : x^2 + y^2 = 4$, $\mathcal{S}_{\varphi,P} : y = 0, x \leq 0$, $\mathcal{S}_{z,P} : z = -1$, $\mathcal{C}_{\varrho,P} : y = 0, z = -1, x \leq 0$, $\mathcal{C}_{\varphi,P} : x^2 + y^2 = 4, z = -1$, $\mathcal{C}_{z,P} : x = -2, y = 0$. **5.** $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{9}{5\varrho} = 1 + 0{,}8\cos\varphi$. **6.** a) parabola: $\frac{p}{\varrho} = 1 + \cos\varphi$, $y^2 = p^2 - 2px$, resp. $\frac{p}{\varrho} = 1 - \cos\varphi$, $y^2 = p^2 + 2px$, b) hyperbola: $\varrho^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **7.** Ve všech případech $x^2 + y^2 \neq 0$:

$$\text{polární: } D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{\sin\varphi}{\varrho} \\ \sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{\varrho} \end{pmatrix},$$

$$\text{válcové: } D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\frac{\sin\varphi}{\varrho} & 0 \\ \sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{\varrho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{kulové: } D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{zy}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r} & -\frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta} \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta} \\ \cos\vartheta & -\frac{\sin\vartheta}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. $\alpha^{-1} : \varrho = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$, $\varphi = \arccos\frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$ pro $y \geq 0$, $\varphi = 2\pi - \arccos\frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$ pro $y < 0$, $\mathcal{C}_\varphi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \varrho^2$, $\mathcal{C}_\varrho : \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\mathrm{tg}\varphi$ (opět pouze polopřímky v příslušném kvadrantu jako u polárních souřadnic),

$$D\alpha = \begin{pmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -a\varrho\sin\varphi & b\varrho\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad D\alpha^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{pmatrix} \frac{bx}{a\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}} & -\frac{aby}{b^2x^2+a^2y^2} \\ \frac{ay}{b\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}} & \frac{abx}{b^2x^2+a^2y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\cos\varphi & -\frac{\sin\varphi}{a\varrho} \\ \frac{1}{b}\sin\varphi & \frac{\cos\varphi}{b\varrho} \end{pmatrix},$$

$|D\alpha| = ab\varrho$, $|D\alpha^{-1}| = \frac{1}{ab\varrho}$. **9.** $\alpha^{-1} : r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$, $\varphi = \arccos\frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$ pro $y \geq 0$, $\varphi = 2\pi - \arccos\frac{x}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}$ pro $y < 0$, $\vartheta = \arccos\frac{z}{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$, $\mathcal{S}_r : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$, $\mathcal{S}_\varphi : \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\mathrm{tg}\varphi$ (opět pouze příslušná polorovina), $\mathcal{S}_\vartheta : \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \frac{z}{c}\mathrm{tg}\vartheta$, souřadnicové křivky jsou průnikem odpovídajících souřadnicových ploch,

$$D\alpha = \begin{pmatrix} a\sin\vartheta\cos\varphi & b\sin\vartheta\sin\varphi & c\cos\vartheta \\ ar\cos\vartheta\cos\varphi & br\cos\vartheta\sin\varphi & -cr\sin\vartheta \\ -ar\sin\vartheta\sin\varphi & br\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha| = abcr^2\sin\vartheta,$$

$$D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\sin\vartheta\cos\varphi & \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{ar} & -\frac{\sin\varphi}{ar\sin\vartheta} \\ \frac{1}{b}\sin\vartheta\sin\varphi & \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{br} & \frac{\cos\varphi}{br\sin\vartheta} \\ \frac{1}{c}\cos\vartheta & -\frac{\sin\vartheta}{cr} & 0 \end{pmatrix}, \quad |\det D\alpha^{-1}| = \frac{1}{abcr^2\sin\vartheta}.$$

10. a) $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_{xx} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, b) $f_x = (y^2+1)^x \cdot \ln(y^2+1)$, $f_y = 2xy(y^2+1)^{x-1}$, $f_{xx} = (y^2+1)^x \cdot \ln^2(y^2+1)$, $f_{yy} = (y^2 + 1)^{x-2}\,(4x^2y^2 - 2xy^2 + 2x)$, $f_{xy} = 2y(y^2+1)^{x-1}\,[x\ln(y^2+1)+1]$, c) $f_x = \frac{-\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x+y)}$, $f_y = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(x+y)}$, $f_{xx} = \sqrt{\frac{y}{x}}\frac{3+\frac{y}{x}}{4(x+y)^2}$, $f_{yy} = \sqrt{\frac{x}{y}}\frac{-3-\frac{x}{y}}{4(x+y)^2}$, $f_{xy} = \frac{\sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{\frac{x}{y}}}{4(x+y)^2}$, d) $f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$,

$f_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$, e) $f_x = \sin y + y\cos x$, $f_y = \sin x + x\cos y$, $f_{xx} = -y\sin x$, $f_{yy} = -x\sin y$, $f_{xy} = \cos y + \cos x$, f) $f_x = -\frac{1}{2x\sqrt{xy}}$, $f_y = -\frac{1}{2y\sqrt{xy}}$, $f_{xx} = \frac{3}{4x^2\sqrt{xy}}$, $f_{yy} = \frac{3}{4y^2\sqrt{xy}}$, $f_{xy} = \frac{1}{4}(xy)^{-\frac{3}{2}}$. **11.** a) $R = -8z_{ts}$, b) $R = z_{tt} + \frac{1}{t^2}z_{ss} + \frac{1}{t}z_t$, c) $R = z_{ts} - \frac{sz_t - tz_s}{s^2-t^2}$, d) $R = (s^2t^2 - 4st)z_{ts} + 2sz_s$. **12.** $f_x = F_\varrho \cos\varphi + F_\varphi \frac{-\sin\varphi}{\varrho}$, $f_y = F_\varrho \sin\varphi + F_\varphi \frac{\cos\varphi}{\varrho}$, $f_{xx} = F_{\varrho\varrho}\cos^2\varphi + 2F_{\varrho\varphi}\cos\varphi\frac{-\sin\varphi}{\varrho} + F_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\varrho^2} + F_\varrho\frac{\sin^2\varphi}{\varrho} + F_\varphi\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2}$, $f_{xy} = F_{\varrho\varrho}\cos\varphi\sin\varphi + F_{\varrho\varphi}\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\varrho} + F_{\varphi\varphi}\frac{-\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2} + F_\varrho\frac{-\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho} + F_\varphi\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\varrho^2}$, $f_{yy} = F_{\varrho\varrho}\sin^2\varphi + 2F_{\varrho\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho} + F_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{\varrho^2} + F_\varrho\frac{\cos^2\varphi}{\varrho} + F_\varphi\frac{-2\sin\varphi\cos\varphi}{\varrho^2}$. **13.** $\Delta = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

5.3.4

1. $\alpha : x = \frac{v^2}{u^2}, y = \frac{v^2}{u}$, $\alpha^{-1} : u = \frac{y}{x}, v = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $u \in [\frac{1}{3}, 1], v \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\mathcal{C}_v : y = u\sqrt{x}$, $\mathcal{C}_u : y = ux$, tečným vektorům odpovídají řádky Jacobiho matice

$$D\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{2v^2}{u^3} & -\frac{v^2}{u^2} \\ \frac{2v}{u^2} & \frac{2v}{u} \end{pmatrix}, \quad D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & -\frac{y}{2x^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{u^3}{v^2} & -\frac{u^2}{2v} \\ \frac{u^2}{v^2} & \frac{u}{v} \end{pmatrix},$$

$|\det D\alpha| = \frac{2v^3}{u^4}$, $|\det D\alpha^{-1}| = \frac{u^4}{2v^3}$, $S = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{2v^3}{u^4}\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{65}{16}$. **2.** $\alpha : x = u^{-\frac{1}{5}}v^{\frac{1}{5}}$, $y = u^{\frac{2}{5}}v^{\frac{3}{5}}$, $\alpha^{-1} : u = \frac{y}{x^3}, v = x^2y$, $u \in [4, 8]$, $v \in [1, 6]$, $|\det D\alpha| = \frac{1}{5}u^{-\frac{4}{5}}v^{-\frac{1}{5}}$, $m = k\ln 2$. **3.** a) funkce F je parametrizací jednotkové sféry, řádky Jacobiho matice vyčíslené v bodě P jsou tečné vektory $\vec{f}_{u,P}$, $\vec{f}_{v,P}$ (první je tečný k rovnoběžkám, druhý k poledníkům), funkce G je parametrizací rotačního paraboloidu, křivky konstantních parametrů jsou kružnice a paraboly — řádky Jacobiho matice opět odpovídají tečným vektorům,

$$DF = \begin{pmatrix} -\sin u\sin v & \cos u\sin v & 0 \\ \cos u\cos v & \sin u\cos v & -\sin v \end{pmatrix}, \quad DG = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix},$$

b) $F : x = u\cos v, y = u\sin v, z = \frac{h}{R}u$, $u \in [0, R], v \in [0, 2\pi)$,

$$DF = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & \frac{h}{R} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix},$$

c) $F : x = R\cos u, y = R\sin u, z = ku$, $D\alpha = (-R\sin u \quad R\cos u \quad k)$, $u \in \mathbf{R}$, d) $F : x = a\cos u, y = b\sin u$, $DF = (-a\sin u \quad b\cos u)$, $u \in [0, 2\pi)$. **4.** a) $M : u \in \mathbf{R}\setminus\{0\}, v \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,

$\alpha^{-1}: u = \sqrt{xy}, v = \sqrt{\frac{x}{y}}$, $\mathcal{C}_u : y = \frac{x}{v^2}$, $\mathcal{C}_v : y = \frac{u^2}{x}$ — přímky a hyperboly v prvním a třetím kvadrantu $(xy > 0)$,

$$D\alpha = \begin{pmatrix} v & \frac{1}{v} \\ u & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix}, \quad D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac{1}{2\sqrt{xy}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} & -\frac{1}{2y}\sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2v} & \frac{1}{2u} \\ \frac{v}{2} & -\frac{v^2}{2u} \end{pmatrix},$$

$|\det D\alpha| = 2\frac{u}{v}$, $|\det D\alpha^{-1}| = \frac{v}{2u}$, $(\mathrm{d}l)^2 = (v^2 + \frac{1}{v^2})(\mathrm{d}u)^2 + 2(uv - \frac{u}{v^3})\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (u^2 + \frac{u^2}{v^4})(\mathrm{d}v)^2$, b) $M = \mathrm{R}^2$, $\alpha^{-1}: u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}$, $\mathcal{C}_u : y = x - 2v$, $\mathcal{C}_v : y = 2u - x$ — přímky rovnoběžné s osou 1. a 3. kvadrantu a přímky rovnoběžné s osou 2. a 4. kvadrantu,

$$D\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$|\det D\alpha| = 2$, $|\det D\alpha^{-1}| = \frac{1}{2}$, $(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2$, c) $M : u \in (0, \infty), v \in [0, 4\pi)$, $\alpha^{-1}: u = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, $v = \arccos\frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ pro $x \geq 0$ a $v = 2\pi - \arccos\frac{y-1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$ pro $x < 0$,

$$D\alpha = \begin{pmatrix} \sin\frac{v}{2} & \cos\frac{v}{2} \\ \frac{u}{2}\cos\frac{v}{2} & -\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} \end{pmatrix}, \quad D\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\frac{v}{2} & \frac{2}{u}\cos\frac{v}{2} \\ \cos\frac{v}{2} & -\frac{2}{u}\sin\frac{v}{2} \end{pmatrix},$$

$|\det D\alpha| = \frac{u}{2}$, $|\det D\alpha^{-1}| = \frac{2}{u}$, $(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}u)^2 + \frac{u^2}{4}(\mathrm{d}v)^2$.

6.1.4

1. a) ne, b) ano, c) ne, d) ne, e) ne, f) ne, g) ano. **2.** a) ano, b) ne, c) ano, d) ano, e) ne. **4.** V unitárním prostoru obecně neplatí b), c), h) a i). V části b) je protipříkladem každá situace, kdy $(a,b)^2$ není reálné, například ve $U = \mathbf{C}$ pro $a = 1$, $b = 1 + i$. V unitárním prostoru má Cauchyova–Buňakovského nerovnost tvar $|(a,b)|^2 \leq (a,a)(b,b)$. V částech c) a h) může být protipříkladem $U = \mathbf{C}$ s libovolně zvoleným skalárním součinem, $a = 1$, $b = \mathrm{i}$, v části i) třeba $U = \mathbf{C}$ s libovolně zvoleným skalárním součinem, $a = 2$, $b = \sqrt{2}(1 + \mathrm{i})$. **5.** a) 5, $4\sqrt{2}$, $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, 28, $\frac{7\sqrt{2}}{10}$, b) $\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\sqrt{7}x^3$, $\sqrt{\frac{3}{7}}(x-2)$, $-\frac{3}{10}$, $-\frac{3\sqrt{3}}{10}$, c) $\sqrt{7}$, $\sqrt{6}$, $\frac{1}{\sqrt{7}}u$, $\frac{1}{\sqrt{6}}v$, 1, $\frac{1}{\sqrt{42}}$. **6.** Ano, ortonormálních bází je nekonečně mnoho, například $\mathcal{B} = \left((\frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}})\right)$ vznikne ortogonalizací a normováním standardní báze. **7.** $\frac{3+\mathrm{i}}{4}(1, -\mathrm{i}, \mathrm{i}, 1)$. **8.** Obecně $G = {} = \begin{pmatrix} \alpha & -\mathrm{i}\alpha \\ \mathrm{i}\alpha & \beta \end{pmatrix}$, kde $\beta > \alpha > 0$, například $G = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$. **9.** Například a) $c_1 = x$, $c_2 = 1 - (\frac{3}{2})x$, vektor c_3 vyjde nulový. b) $c_1 = (1, 2, 0, 0)$, $c_2 = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0, -1)$, $c_3 = (-{} -1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, c) $c_1 = (1, 0, 0)$, $c_2 = (0, 0, 1)$, $c_3 = (-1, 1, \frac{1}{3})$, volíme-li $a_1 = u$, $a_2 = w$, $a_3 = v$,

10. a) $L_\perp = [|(1,-1,0),(0,0,1)|]$, b) $L_\perp = [|(1,0,2),(0,1,3)|]$, c) $L_\perp = [|15x^2-16x+3|]$.

11. a) $\begin{pmatrix} \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} \frac12 & -\frac12 & 0 & 0 \\ -\frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **12.** $v_L = x - \frac16$, $v_{L_\perp} = x^2 - x + \frac16$.

6.2.3

2. κ je komplexní jednotka.

4.a)

$$\lambda_1 = 1, k_1 = 2, L_1 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2}, 0, 0), (0, 0, -\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2})\right|\right],$$
$$\lambda_2 = -1, k_2 = 2, L_2 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt2}, -\tfrac{1}{\sqrt2}, 0, 0), (0, 0, \tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2})\right|\right],$$
$$P_1 = \frac12 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \frac12 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix},$$

b)

$$\lambda_1 = 0, k_1 = 2, L_1 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2}, 0, 0), (0, 0, \tfrac{1}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2})\right|\right],$$
$$\lambda_2 = -2, k_2 = 1, L_2 = \left[\left|(0, 0, \tfrac{1}{\sqrt2}, -\tfrac{1}{\sqrt2})\right|\right],$$
$$\lambda_3 = 2, k_3 = 1, L_3 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt2}, -\tfrac{1}{\sqrt2}, 0, 0)\right|\right],$$
$$P_1 = \frac12 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \frac12 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \frac12 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c)

$$\lambda_1 = 1, k_1 = 2, L_1 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2}, 0, 0), (0, 0, \tfrac{1}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2})\right|\right],$$
$$\lambda_2 = -1, k_2 = 2, L_2 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt2}, -\tfrac{1}{\sqrt2}, 0, 0), (0, 0, \tfrac{1}{\sqrt2}, -\tfrac{1}{\sqrt2})\right|\right],$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

d)

$$\lambda_1 = 0, k_1 = 1, L_1 = \left[\left|(-\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\right|\right],$$
$$\lambda_2 = 1, k_2 = 1, L_2 = [|(0,1,0)|],$$
$$\lambda_3 = 2, k_3 = 1, L_3 = \left[\left|(\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\right|\right],$$
$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e)

$$\lambda_1 = -2, k_1 = 1, L_1 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right|\right],$$
$$\lambda_2 = 3, k_2 = 1, L_2 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}})\right|\right],$$
$$\lambda_3 = 6, k_3 = 1, L_3 = \left[\left|(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}})\right|\right],$$
$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ P_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

f)

$$\lambda_1 = 1, k_1 = 1, L_1 = \left[\left|(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3})\right|\right],$$
$$\lambda_2 = -2, k_2 = 1, L_2 = \left[\left|(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})\right|\right],$$
$$\lambda_3 = 4, k_3 = 1, L_3 = \left[\left|(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3})\right|\right],$$
$$P_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ P_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix},\ P_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

g)

$$\lambda_1 = 0, k_1 = 1, L_1 = \left[\left|(-\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\right|\right],$$
$$\lambda_2 = 2, k_2 = 1, L_2 = \left[\left|(\tfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\right|\right],$$
$$P_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Operátor $\varphi \circ \psi$ je samoadjungovaný právě tehdy, když $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Operátor $\varphi + \psi$ je samoadjungovaný. Operátor $k\varphi$ je samoadjungovaný právě tehdy, když $k \in \mathbf{R}$.

6.3.5

1. V soustavě souřadnic $\langle \overline{O}; \vec{f_1}, \vec{f_2} \rangle$, resp. $\langle \overline{O}; \vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3} \rangle$, v níž má kuželosečka, resp. kvadrika normální tvar, jsou souřadnice bodů značeny jako (x, y), resp. (x, y, z), pro okamžitou možnost srovnání se soupisem ve větě 6.4, resp. 6.3.

a) $9x^2 - y^2 - 9 = 0$, hyperbola
$\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$, $\vec{f_2} = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$, $\overline{O} = (-1, 2)$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$,

b) $x^2 + 2\sqrt{2}y = 0$, parabola
$\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f_2} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\overline{O} = (1, 1)$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$,

c) $3x^2 + 6y^2 - 2z^2 - 1 = 0$, jednodílný hyperboloid
$\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\vec{f_2} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{f_3} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\overline{O} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$,

d) $x^2 - y^2 - 2 = 0$, hyperbolický válec
$\vec{f_1} = (\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}})$ $\vec{f_2} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f_3} = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, například $\overline{O} = (\frac{22}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{19}{9})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$,

e) $9x^2 - 3y^2 + 4 = 0$, hyperbola
$\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f_2} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\overline{O} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$,

f) $(5\sqrt{2} - 1)x^2 - (5\sqrt{2} + 1)y^2 = 0$, dvojice různoběžných přímek
$\vec{f_1} = (\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}})$ $\vec{f_2} = (\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}})$, $\overline{O} = (-\frac{8}{7}, \frac{5}{7})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$,

g) $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$, jednodílný hyperboloid
$\overline{O} = (1, -2, 3)$ v $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$, $\vec{f_i} = \vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$

h) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 12 = 0$, elipsoid
$\vec{f_1} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $\vec{f_2} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\vec{f_3} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $\overline{O} = (0, 0, 0)$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$,

i) $15x^2 + 5y^2 - 25z^2 + 4 = 0$, dvojdílný hyperboloid
$\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{f_2} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\vec{f_3} = (0, 0, 1)$, $\overline{O} = (0, 1, -\frac{2}{5})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$,

j) $3x^2 - 3y^2 - 1 = 0$, hyperbolický válec
$\vec{f_1} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f_2} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\vec{f_3} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, například $\overline{O} = (-\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$

k) $6x^3 + 3y^2 - 2z^2 - 1 = 0$, jednodílný hyperboloid
$\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $\vec{f_2} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\vec{f_3} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\overline{O} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$,

l) $2x^2 + 1 = 0$, $\emptyset$ (prázdná množina)
$\vec{f_1} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{f_2} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, například $\overline{O} = (0, 0)$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$,

m) $20x^2 - 9 = 0$, dvojice rovnoběžných přímek
$\vec{f_1} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $\vec{f_2} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, například $\overline{O} = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{10})$ v $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$.

2. Vlastními hodnotami jsou čísla $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = -1$, přísluší jim jednorozměrné vektorové podprostory generované vektory $e_1 = (1, 1)$ a $e_2 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}, -\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)$. Matice přechodu od původní báze, v níž mají vektory vyjadřující dvojici rychlostí částic před srážkou, resp. po srážce, složky (v_1, v_2), resp. $(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ k bázi vlastních vektorů (e_1, e_2) operátoru φ a matice zpětného přechodu jsou

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{m_2}{m_1+m_2} & \frac{-m_1}{m_1+m_2} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & 1 \\ \frac{m_2}{m_1+m_2} & -1 \end{pmatrix},$$

složky vektoru počátečních, resp. koncových rychlostí částic v bázi vlastních vektorů (e_1, e_2) operátoru φ jsou

$$(v_1', v_2') = \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, v_1 - v_2\right),$$

$$(\overline{v}_1', \overline{v}_2') = \left(\frac{m_1 \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2}{m_1 + m_2}, \overline{v}_1 - \overline{v}_2\right).$$

Uvědomte si, že

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad \text{resp.} \quad \overline{v}_1' = \frac{m_1 \overline{v}_1 + m_2 \overline{v}_2}{m_1 + m_2},$$

je rychlost středu hmotnosti soustavy částic před srážkou, resp. po srážce, $v_2' = v_1 - v_2$, resp. $\overline{v}_2' = \overline{v}_1 - \overline{v}_2$, je rychlost první částice vzhledem k druhé před srážkou, resp. po srážce. Kontrolou správnosti je původní soustava lineárních rovnic pro neznámé rychlosti částic po srážce — platí

$$(\overline{v}_1' \quad \overline{v}_2') = (v_1' \quad v_2') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \overline{v}_1' = v_1', \ \ \overline{v}_2' = -v_2'.$$

Působením operátoru φ se tedy, podle očekávání, nemění rychlost středu hmotnosti, zatímco vzájemné rychlosti částic změní znaménko.

3. a) Do výsledného vztahu pro $T(z_1, z_2)$ v příkladu 6.39 dosaďte $z_1 = z_o$, $z_2 = z_i$ a v obrázku 6.31 se přesvědčte, že $z_o - z_{F_o} = f_o - a$, $z_i - z_{F_i} = b - f_i$. Při úpravách použijte jak definici přímého zvětšení M, tak čočkovou rovnice.

$$T(z_i, z_o) = \begin{pmatrix} M & -\frac{1}{f_i} \\ & \\ 0 & \frac{f_o}{Mf_i} \end{pmatrix}, \quad x_i = Mx_o, \quad x_i' = -\frac{x_o}{f_i} + \frac{f_o}{f_i}\frac{x_o'}{M}.$$

7.2.5

1. a) $(x+2)\mathrm{e}^x = C(t+2)\mathrm{e}^t$, b) $x = C\frac{t+2}{t+1}$, c) $x = C\sqrt{t^2+1}$, d) $x = -3 + \frac{C}{\cos t}$, e) $x = \frac{1}{C-t^2+t}$ a $x = 0$, f) $x = C\mathrm{e}^{(-1/\mathrm{tg}t)} - 1$. **2.** a) $x = \frac{t(1+Ct)}{2(1-Ct)}$, $x = -\frac{t}{2}$, b) $x = t\cosh(\ln Ct)$ a $x = \pm t$, c) $x = Ct^3 - t$, d) $x = \frac{C}{t} - t$, e) $x = \pm t\sqrt{\frac{Ct^2-1}{Ct^2+1}}$ a $x = \pm t$. **3.** a) $x = \frac{C}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{t^3}{3}$, b) $x = \frac{C}{(1-t)^2} + \frac{1}{\sqrt{t}}$, c) $x = C\sqrt{t^2+1} + t^2$, d) $x = Ct^2 - \sqrt{t}$, e) $x = Ct - \frac{1}{t}$. **4.** a) $tx^2 - t^2 + x^2 + C = 0$, b) $\mathrm{arctg}\frac{x}{t} - t + x^2 + C = 0$, c) $t^2x^2 + \mathrm{arctg}t - x^3 + C = 0$, d) $\ln\sqrt{t^2+x^2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + C = 0$, e) $\sqrt{(t^2+x^2)^3} + C = 0$, f) $\sqrt{t^2+x^2} - 2t + \ln|x| + C = 0$. **5.** Označme $\beta = F_g - F_{vz}$ rozdíl tíhové a vztlakové síly (pro těleso s větší hustotou než voda je β kladné) a $F_o = -\alpha\dot{x}$. Rovnice má tvar $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + \beta$, tj. $m\dot{v} = -\alpha v + \beta$. Počáteční podmínky volíme $v(0) = 0$ a $x(0) = 0$. Řešením rovnice je

$$v(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t}\right), \qquad x(t) = \frac{m\beta}{\alpha^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1\right) + \frac{\beta}{\alpha}t.$$

Mezní rychlost je $v_M = (\beta/\alpha)$. **6.** a) $\phi(t) = t^2$, $t^4 + x^2t^3 + C = 0$, b) $\phi(t) = \mathrm{e}^t$, $\mathrm{e}^t(t^2+x^2) + {}+ C = 0$. **7.** a) Bernoulliova rovnice s obecným řešením $x = -\frac{1}{t^2+Ct}$, výjimečným řešením $x = 0$, řešení počáteční úlohy je $x = \frac{1}{2t-t^2}$. b) Substituce $u = x + 2t$ vede k obecnému řešení $x = \mathrm{tg}\left(\frac{t^2}{2} + C\right) - 2t$ a řešení počáteční úlohy je $x = \mathrm{tg}\left(\frac{t^2}{2}\right) - 2t$. **8.** Označme $\beta = F_{vz} - F_g$ rozdíl vztlakové a tíhové síly (pro těleso s menší hustotou než Campari je β kladné). Pro první model je $F_o = -\alpha\dot{x}$ a rovnice má tvar $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - \beta$. Pro rychlost $v(t) = \dot{x}(t)$ dostáváme rovnici se separovatelnými proměnnými $m\dot{v} = -\alpha v - \beta$ s řešením

$$v = K\frac{m}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{\beta}{\alpha}, \quad v(0) = v_0 \quad \Longrightarrow \quad v = \left(v_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Integrací a využitím počáteční podmínky $x(0) = 0$ získáme závislost hloubky x na čase:

$$x = -\frac{m(v_0\alpha + \beta)}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{\beta}{\alpha}t + \frac{m(v_0\alpha + \beta)}{\alpha^2}.$$

Z podmínky $v(t_{max}) = 0$ a $x_{max} = x(t_{max})$ vypočteme maximální hloubku

$$x_{max} = \frac{mv_0}{\alpha} - \frac{m\beta}{\alpha^2} \ln\left(v_0 \frac{\alpha}{\beta} + 1\right).$$

Pro druhý model $F_o = -\gamma \dot{x}^2$ má rovnice tvar $m\ddot{x} = -\gamma \dot{x}^2 - \beta$. Analogickým postupem získáme řešení:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} \operatorname{tg}\left(K - \frac{\sqrt{\gamma\beta}}{m} t\right), \quad \text{kde} \quad K = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} v_0\right),$$

$$x = \frac{m}{\gamma} \ln\left|\cos\left(K - \frac{\sqrt{\gamma\beta}}{m} t\right)\right| + x_{max}, \quad \text{kde} \quad x_{max} = \frac{m}{2\gamma} \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\beta} v_0^2\right).$$

Rozmyslete si, jaké fyzikální rozměry mají konstanty m, α, β, γ a proveďte rozměrovou zkoušku získaných výsledků.

10. V chemii: Rovnice $\dot{x} = (a - px)(b - (1-p)x)$, $x(0) = 0$ má separovatelné proměnné. Pro ideální poměr $\frac{a}{b} = \frac{p}{1-p}$ je řešení $x = \frac{b^2 pt}{(1-p)(1+bpt)} = \frac{abt}{1+bpt}$. V ostatních případech

$$x = \frac{b(1 - \mathrm{e}^{ct})}{1 - p(1 + \frac{b}{a}\mathrm{e}^{ct})}, \qquad \text{kde} \quad c = pb - (1-p)a.$$

Pozor! Řešení odpovídající ideálnímu poměru nedostaneme jako speciální případ této obecné formule. Přijdete na to, proč? Všiměte si, jak se chová řešení pro t jdoucí k nekonečnu v případě $c < 0$ (více látky A než je při ideálním poměru) resp. $c > 0$ (více látky B než je při ideálním poměru) a srovnejte výsledek s případem ideálního poměru.
V biologii: Vyřešeno v textu (příklady 7.12 a 7.13).
V ekonomii: Rovnice $\dot{x} = kx$ má řešení $x = C\mathrm{e}^{kt}$, kde C je konstanta.
V kuchyni: Rovnice $\dot{T} = c(T_0 - T)$ má řešení $T = T_0 - K\mathrm{e}^{-ct}$, rovnice $\dot{T} = k(T_0^4 - T^4)$ má řešení

$$\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}\frac{T}{T_0}} \sqrt{\frac{T_0 + T}{T_0 - T}} = C\mathrm{e}^{2T_0^3 kt}, \quad \text{kde } C \text{ je konstanta.}$$

V technických aplikacích: Rovnice $\ddot{I} + (R/L)\dot{I} + (1/LC)I = 0$ je speciálním případem rovnice řešené v příkladu 7.52.

11. a) Pro $h(t) = 0$ se jedná o Bernoulliovu rovnici pro $r = 2$, pro $g(t) = 0$ jde o rovnici lineární, b) $\ddot{u} - \left(f(t) + \frac{\dot{g}(t)}{g(t)}\right)\dot{u} + h(t)g(t)u = 0$, jedná se o lineární diferenciální rovnici druhého řádu, c) $\dot{w} = (f(t) + 2g(t)x_0(t))\, w + g(t)w^2$, pro známou funkci $x_0(t)$ se jedná o Bernoulliovu rovnici pro $r = 2$.

7.3.3

1. a1) $x = Ct - \sqrt{C}, C \geq 0$, $x = -\frac{1}{4t}$, $t > 0$, a2) $x = Ct + \sqrt{C}, C \geq 0$, $x = -\frac{1}{4t}$, $t < 0$, b) $x = Ct - \ln|C|$, $x = \ln|t| + 1$, c) $x = 0$, $x = -(\sqrt{t} + C)^2, t \geq 0$, $x = (\sqrt{-t} + C)^2, t \leq 0$, d) $x = Ct - \sqrt{C^3}$, $x = \frac{4}{27}t^3$, e) $x = Ct + \mathrm{e}^{-C}$, $x = t - t\ln t$. **2.** Dráha šneka bude popsána funkcí $s(t) = \frac{t^2}{4k}$. Šnek se bude pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $a = \frac{1}{2k}$. Rovnice má tvar $s = \dot{s}t - k(\dot{s})^2$, přičemž její další řešení $s = Ct - kC^2$ nevyhovují počáteční podmínce $s(0) = 0$ (tato podmínka vyplývá z předpokladu, že se šnek vydal na výlet v čase $t = 0$).

7.4.4

1. a) $x = Ct\cos t + Dt\sin t + t^2$, b) $x = \frac{1}{t}\left(C\mathrm{e}^t + D\mathrm{e}^{-t}\right) + \sin t$. **2.** Libovolná dvojice z každé množiny je nezávislá. Kromě d) jsou i všechny systémy nezávislé.

7.5.4

1. a) $x = C\mathrm{e}^t + Dt\mathrm{e}^t$, b) $x = C\mathrm{e}^{2t} + D\mathrm{e}^{-2t}$, c) $x = C\cos 2t + D\sin 2t$, d) $x = C\mathrm{e}^{-2t} + D\mathrm{e}^t$, e) $x = \mathrm{e}^t\left(C\cos 2t + D\sin 2t\right)$, f) $x = \mathrm{e}^{-2t}\left(C\cos t + D\sin t\right)$. **2.** a) $x_p = t^2$, b) $x_p = \mathrm{e}^{-t}\left(t^2 + 1\right)$, c) $x_p = \mathrm{e}^{-t}\left(t^2 + 1\right)$, d) $x_p = \mathrm{e}^{-t}\left(t^2 + 1\right)$, e) $x_p = t^3\mathrm{e}^{2t}$, f) $x_p = t^2\sin t$. **3.** a) $x = \mathrm{e}^{4t} + t^2 + \frac{t}{2} - 1$, b) $x = \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t} + \cos 2t$, c) $x = \mathrm{e}^t - \cos t - \sqrt{\mathrm{e}^\pi}\sin t$, d) $x = t^2$.

7.6.3

1. a) $x = A + B\cos t + C\sin t$, b) $x = A\mathrm{e}^t + Bt\mathrm{e}^t + C\mathrm{e}^{-t} + Dt\mathrm{e}^{-t}$, c) $x = A + Bt + Ct^2 + D\mathrm{e}^{2t} + E\mathrm{e}^{-t}$, d) $x = A\cos t + B\sin t + Ct\cos t + Dt\sin t$. **2.** a) $x_p = t\cos t$, b) $x_p = t^4$, c) $x_p = t^3\mathrm{e}^{-t}$, d) $x_p = -\mathrm{e}^{-t}$. **3.** a) $x = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - 2\cos t + 2\sin t - 2t$, b) $x = 2t - 1 + \mathrm{e}^{-2t} + t^5$. **6.** $\chi(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Et}{\hbar}}$, $\varphi(x) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$, $K, A, B \in \mathbf{C}$. 7. $\frac{1}{v_f^2}\frac{\ddot{\chi}}{\chi} = \frac{\varphi''}{\varphi} = \text{konst.} = \pm K^2$ (volba $+$, resp. $-$ odpovídá případu, kdy konstanta je kladná, resp. záporná), $\chi(t) = a\,\mathrm{e}^{v_f Kt} + b\,\mathrm{e}^{-v_f Kt}$, $\varphi(x) = A\,\mathrm{e}^{Kx} + B\,\mathrm{e}^{-Kx}$, resp. $\chi(t) = a\cos\left(v_f Kt\right) + b\sin\left(v_f Kt\right)$, $\varphi(x) = A\cos(Kx) + B\sin(Kx)$, $a, b, A, B \in \mathbf{R}$ jsou integrační konstanty.

7.7.4

1. a) $x_1 = A\cos t + B\sin t$, $x_2 = B\cos t - A\sin t$, b) $x_1 = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t}$, $x_2 = B\mathrm{e}^{2t} + C\mathrm{e}^{3t}$, $x_3 = A\mathrm{e}^t + C\mathrm{e}^{3t}$, c) $x_1 = A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{-t}$, $x_2 = A\mathrm{e}^{2t} - B\mathrm{e}^{-t}$. **2.** a) $x_1 = A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{-2t} + t^2\mathrm{e}^{2t}$, $x_2 = -A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{-2t}$, b) $x_1 = A\cos t + B\sin t + \sin 2t$, $x_2 = -A\sin t + B\cos t$, c) $x_1 = A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{-2t} + t$, $x_2 = -A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{-2t}$, d) $x_1 = A\mathrm{e}^t\cos t + B\mathrm{e}^t\sin t + 1$, $x_2 = B\mathrm{e}^t\cos t - A\mathrm{e}^t\sin t + t$.

3. a) $x_1 = 2t - \mathrm{e}^t$, $x_2 = t + 1 + \mathrm{e}^t$, $x_3 = t - 1$, b) $x_1 = 2\cos t + \sin t$, $x_2 = -\cos t - \sin t$, c) $x_1 = t^2 - 1$, $x_2 = t + 1$, $x_3 = t^2 - t$. **6.** Pohybové rovnice $\ddot{x} = \omega\dot{y}$, $\ddot{y} = -\omega\dot{x}$, kde $\omega = \frac{qB}{m}$, lze převést substitucí $v_1 = \dot{x}$, $v_2 = \dot{y}$ na soustavu prvního řádu. Její obecné řešení je $v_1 = a\cos\omega t + b\sin\omega t$, $v_2 = -a\sin\omega t + b\cos\omega t$. **7.** Rozdíl $\vec{\xi}(t) = \vec{X}_p(t) - \vec{x}_p(t)$ dvou libovolných partikulárních řešení nehomogenní soustavy je řešením odpovídající homogenní soustavy.

8.1.3

3. a) $\{+\infty\}$, b) $\{+\infty, -\infty\}$, c) $\left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right\}$, d) $\{2\}$. Limitu mají posloupnosti a) a d) (limita je stejná jako jejich hromadný bod). **13.** a) konverguje pro $k > 1$ (integrální kritérium), pro $k \leq 1$ diverguje, b) konverguje absolutně pro $k > 1$, pro $k \leq 1$ řada z absolutních hodnot diverguje (srovnání s řadou ad a)), c) konverguje pro $m + 2 \leq k$, jinak diverguje, d) konverguje absolutně (limitní podílové kritérium), e) konverguje (limitní podílové kritérium), f) konverguje absolutně (limitní odmocninové kritérium), g) nekonverguje absolutně (integrální kritérium), konverguje obyčejně (Leibnizovo kritérium).

8.2.3

7. a) na intervalu $(-2, 0)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně (Weierstrassovo kritérium, majorantou je geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x+1|^{n+1}$, obor konvergence lze zjistit například použitím podílového kritéria), v bodě $x_0 = -2$ konverguje neabsolutně (Leibnizovo kritérium), b) řada s kladnými členy pro libovolné x, na intervalu $(-\infty, 0)$ konverguje lokálně stejnoměrně (obor konvergence lze určit například odmocninovým kritériem), c) řada s kladnými členy pro libovolné x, na intervalu $[0, \infty)$ konverguje stejnoměrně (Weierstrassovo kritérium, majorantou je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$). **9.** Ano (například podle Weierstrassova kritéria). **10.** Limitou je ve všech případech nulová funkce, a) ano, b) ne, pouze lokálně stejnoměrně, konverguje však stejnoměrně na intervalu $(1 + \delta, \infty)$ pro libovolné $\delta > 0$, c) ano (například podle poslední vlastnosti věty 8.9), d) na intervalu $[1, \infty)$ konverguje bodově, na intervalu $(1, \infty)$ konverguje lokálně stejnoměrně, na intervalu $(1 + \delta, \infty)$, $\delta > 0$ konverguje stejnoměrně. **11.** $\frac{1}{2}$ (s využitím věty 8.11), řada konverguje stejnoměrně.

8.3.4

2. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$, $\mathbf{R}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, $(0, 2)$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (x-1)^n$, $(-1, 3)$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$, $(0, 2)$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, $(-1, 1)$, f) $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1, 1)$, g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(-1, 1)$, h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\mathbf{R}$, i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\mathbf{R}$, j) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7$, k) $x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}$, l) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{x^7}{7}$. **3.** a) $-\ln(1-x)$, $|x| < 1$, b) $\frac{1}{(-k)^p}\mathrm{e}^{-kx}$, $x \in \mathbf{R}$, c) $\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$, d) $\ln(1-x^2)$, $|x| < 1$. **4.** a) $1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4$,

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{80}+\frac{3}{3\,200}$, c) $\frac{\pi}{4}+0{,}01-0{,}000\,1$, d) $3+\frac{2}{27}-\frac{8}{2187}$, e) $\frac{\pi}{90}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3+\frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5$.
5. a) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, b) $-\frac{4C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, c) $1-\frac{\pi^3}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$, d) $\frac{2(-1)^{n+1}\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin nx$. **6.** a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\doteq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots}{x}\,\mathrm{d}x=\left[x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\dots\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\doteq$ $\doteq\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi^3}{64\cdot 18}+\frac{31\pi^5}{1\,024\cdot 600}$, řada je alternující, chyba je tedy menší než nejbližší následující nenulový člen: $\left[\frac{x^7}{7\cdot 7!}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$, b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}\doteq\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\ln x-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\dots\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\doteq\ln 2-\frac{3\pi^2}{64}+\frac{15\pi^4}{256\cdot 96}$, řada je alternující, chyba je tedy menší než nejbližší následující nenulový člen: $\left[\frac{x^6}{6\cdot 6!}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$.

9.1.5

10. Pomlčka v první tabulce znamená, že jsme pojem pro danou situaci nedefinovali.

A_i	kompaktní	otevřená	uzavřená	souvislá	jednoduše souvislá	omezená
a)	NE	NE	NE	ANO	NE	ANO
b)	NE	NE	ANO	ANO	ANO	NE
c)	NE	NE	ANO	ANO	—	NE
d)	NE	NE	NE	NE	—	NE
e)	NE	NE	NE	NE	—	NE
f)	ANO	NE	ANO	ANO	—	ANO
g)	NE	NE	ANO	NE	—	NE

A_i	intA_i	extA_i	hA_i
a)	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 0<x^2+y^2<r^2\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2>r^2\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid(x^2+y^2=r^2)\vee((x,y)=(0,0))\}$
b)	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x<0\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x>0\}$	$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x=0\}$
c)	$\emptyset$	$\mathbf{R}^2\setminus A_3$	A_3
d)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}^2$
e)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}^2$
f)	$\emptyset$	$\mathbf{R}^2\setminus A_6$	A_6
g)	$\emptyset$	$\mathbf{R}^2\setminus A_7$	A_7

11.

množina	otevřená	uzavřená	souvislá	kompaktní	omezená	hromadné body	izolované body
$(0,1)$	ANO	NE	ANO	NE	ANO	$[0,1]$	$\emptyset$
$[0,1)$	NE	NE	ANO	NE	ANO	$[0,1]$	$\emptyset$
$(0,1]$	NE	NE	ANO	NE	ANO	$[0,1]$	$\emptyset$
$[0,1]$	NE	ANO	ANO	ANO	ANO	$[0,1]$	$\emptyset$
$\mathbf{N}$	NE	ANO	NE	NE	NE	$\emptyset$	$\mathbf{N}$
$\mathbf{Q}$	NE	NE	NE	NE	NE	$\mathbf{R}$	$\emptyset$

A_i	intA_i	extA_i	hA_i	$\overline{A}_i$
$A_1 = (0,1)$	$(0,1)$	$(-\infty,0)\cup(1,\infty)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$
$A_2 = [0,1)$	$(0,1)$	$(-\infty,0)\cup(1,\infty)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$
$A_3 = (0,1]$	$(0,1)$	$(-\infty,0)\cup(1,\infty)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$
$A_4 = [0,1]$	$(0,1)$	$(-\infty,0)\cup(1,\infty)$	$\{0,1\}$	$[0,1]$
$A_5 = \mathbf{N}$	$\emptyset$	$\cup_{n\in\mathbf{N}}(n,n+1)$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}$
$A_6 = \mathbf{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$

13.

množina	otevřená	uzavřená	souvislá	kompaktní	hromadné body	izolované body
$(0,1)$	NE	NE	ANO	ANO	$\mathbf{R}$	$\emptyset$
$[0,1)$	NE	NE	ANO	ANO	$\mathbf{R}$	$\emptyset$
$(0,1]$	NE	NE	ANO	ANO	$\mathbf{R}$	$\emptyset$
$[0,1]$	NE	NE	ANO	ANO	$\mathbf{R}$	$\emptyset$
$\mathbf{N}$	NE	NE	ANO	ANO	$\mathbf{R}$	$\emptyset$
$\mathbf{Q}$	NE	NE	ANO	ANO	$\mathbf{R}$	$\emptyset$

A_i	intA_i	extA_i	h A_i	$\overline{A}_i$
$A_1 = (0,1)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$A_2 = [0,1)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$A_3 = (0,1]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$A_4 = [0,1]$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$A_5 = \mathbf{N}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
$A_6 = \mathbf{Q}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$

14.

množina	otevřená	uzavřená	souvislá	kompaktní	hromadné body	izolované body
$(0,1)$	ANO	ANO	NE	NE	$\emptyset$	$(0,1)$
$[0,1)$	ANO	ANO	NE	NE	$\emptyset$	$[0,1)$
$(0,1]$	ANO	ANO	NE	NE	$\emptyset$	$(0,1]$
$[0,1]$	ANO	ANO	NE	NE	$\emptyset$	$[0,1]$
$\mathbf{N}$	ANO	ANO	NE	NE	$\emptyset$	$\mathbf{N}$
$\mathbf{Q}$	ANO	ANO	NE	NE	$\emptyset$	$\mathbf{Q}$

A_i	$\operatorname{int} A_i$	$\operatorname{ext} A_i$	$\mathrm{h}\, A_i$	$\overline{A}_i$
$A_1 = (0,1)$	$(0,1)$	$\mathbf{R} \setminus (0,1)$	$\emptyset$	$(0,1)$
$A_2 = [0,1)$	$[0,1)$	$\mathbf{R} \setminus [0,1)$	$\emptyset$	$[0,1)$
$A_3 = (0,1]$	$(0,1]$	$\mathbf{R} \setminus (0,1]$	$\emptyset$	$(0,1]$
$A_4 = [0,1]$	$[0,1]$	$\mathbf{R} \setminus [0,1]$	$\emptyset$	$[0,1]$
$A_5 = \mathbf{N}$	$\mathbf{N}$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$	$\emptyset$	$\mathbf{N}$
$A_6 = \mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$	$\emptyset$	$\mathbf{Q}$

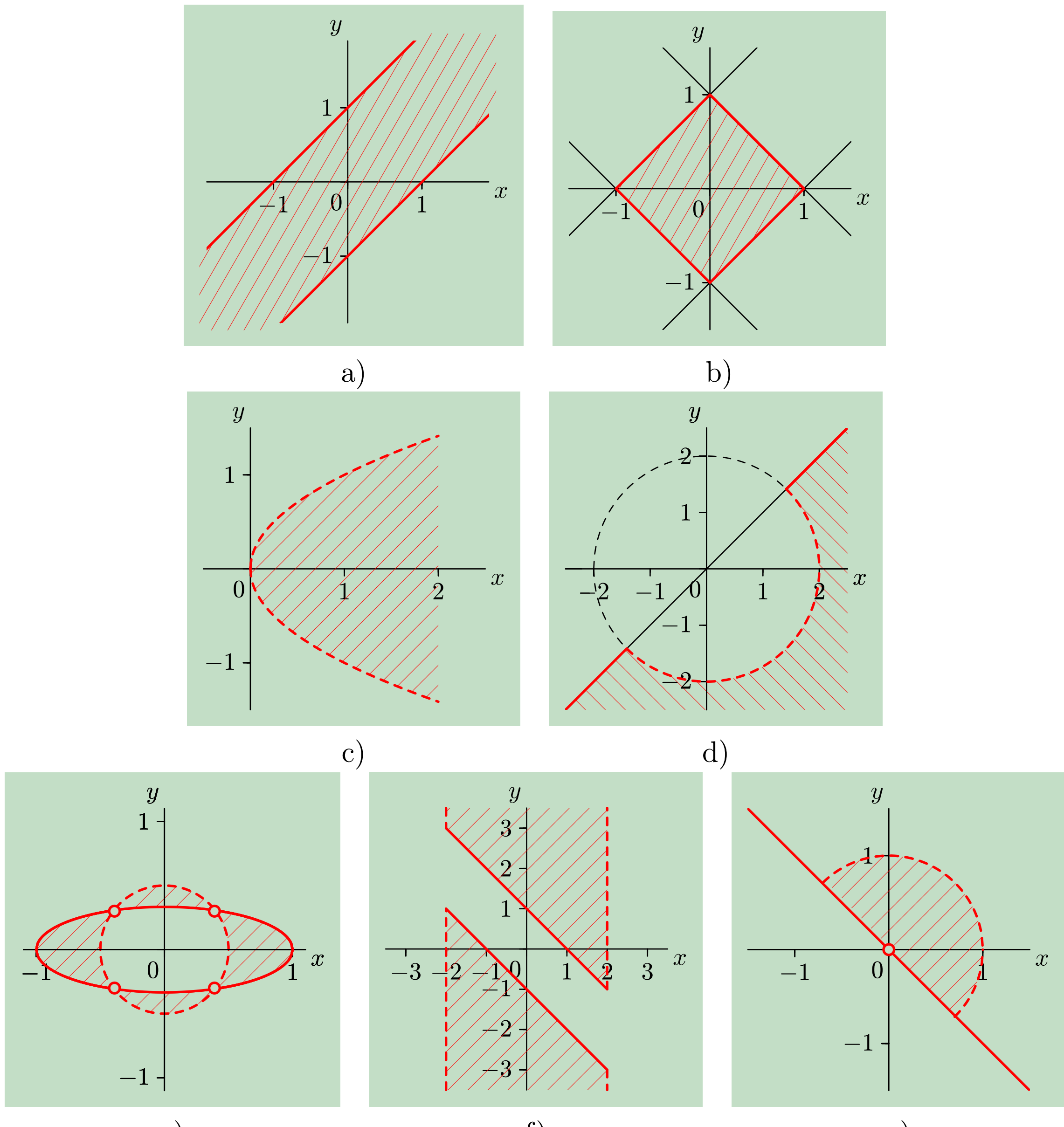
16. Například $B = (0,1]$ a $C = (1,2)$.

9.2.7

1.

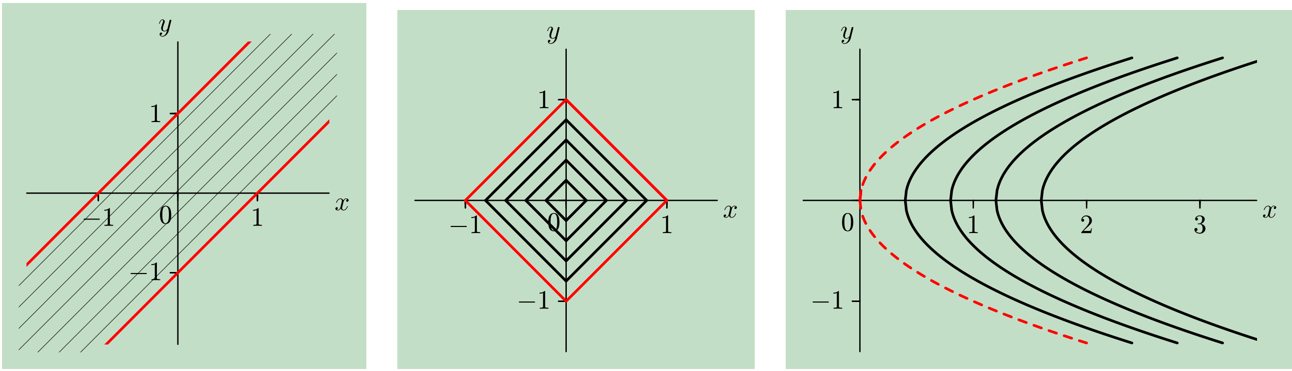
D_f	otevřená	uzavřená	kompaktní	souvislá	omezená
a)	NE	ANO	NE	ANO	NE
b)	NE	ANO	ANO	ANO	ANO
c)	ANO	NE	NE	ANO	NE
d)	NE	NE	NE	ANO	NE
e)	NE	NE	NE	NE	ANO
f)	NE	NE	NE	NE	NE
g)	NE	NE	NE	ANO	NE

2. a) $\mathcal{V}_C = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2 | y = x - \sin C\}$, $C \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, b) $\mathcal{V}_C = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2 | |x| + |y| = = \cos C\}$, $C \in [0, \frac{\pi}{2}]$, c) $\mathcal{V}_C = \{(x,\, y) \in \mathbf{R}^2 | y^2 = x - \frac{1}{C^2}\}$, $C > 0$. **3.** a) Limita vzhledem k množinám A_1, A_5 neexistuje. Limita vzhledem k množině A_2 je $\sqrt{2}$, limita vzhledem k množině A_3 je $-\sqrt{2}$ a limita vzhledem k množině A_4 je 0. b) Limita vzhledem k množinám A_1, A_2 a A_5 neexistuje. Limita vzhledem k množině A_3 je 1, limita vzhledem k množině A_4 je -1. c) Limita vzhledem k množině A_1 a A_5 neexistuje, limita vzhledem k množině A_3 je 1, limita



Obr. 10.10 Úloha 1.

vzhledem k množinám A_2 a A_4 je 0. d) Limita vzhledem k množinám A_1, A_2, A_5 je 0, limita vzhledem k množině A_3 je $\frac{k}{k^3+1}$, limita vzhledem k množině A_4 neexistuje. **4.** a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{2}a$, c) ∞, d) neexistuje, e) 0, f) $-\frac{1}{4}$, g) $\frac{1}{3}$, h) neexistuje. **5.** a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x = y\}$, b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (|x| = |y|) \vee (xy = 0)\}$, c) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (x = (2k+1)\frac{\pi}{2}) \vee (y = n\pi), n, k \in \mathbf{Z}\}$, d) Funkce je spojitá na celém svém definičním oboru $D = \mathbf{R}^2$. **6.** a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x(\ln(x^2+y^2)+2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$,



Obr. 10.11 Úloha 2.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y(\ln(x^2+y^2)+2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2(\ln(x^2+y^2)+2)+2x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2(\ln(x^2+y^2)+2)+2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{xy\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $\operatorname{grad} f = \left(\frac{x(\ln(x^2+y^2)+2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y(\ln(x^2+y^2)+2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $\mathrm{d}f = \frac{x(\ln(x^2+y^2)+2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y(\ln(x^2+y^2)+2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y$. b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{z^2+x^2y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz}{z^2+x^2y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2+x^2y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3z}{(z^2+x^2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2x^3yz}{(z^2+x^2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2xyz}{(z^2+x^2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{z(z^2-x^2y^2)}{(z^2+x^2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{y(x^2y^2-z^2)}{(z^2+x^2y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{x(x^2y^2-z^2)}{(z^2+x^2y^2)^2}$, $\operatorname{grad} f = \left(\frac{yz}{z^2+x^2y^2}, \frac{xz}{z^2+x^2y^2}, -\frac{xy}{z^2+x^2y^2}\right)$, $\mathrm{d}f = \frac{yz}{z^2+x^2y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{xz}{z^2+x^2y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2+x^2y^2}\,\mathrm{d}z$. c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}(1+\ln(xy))$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2}(1-\ln(xy))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x}{y^3}(2\ln(xy)-3)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{\ln(xy)}{y^2}$, $\operatorname{grad} f = \left(\frac{1}{y}(1+\ln(xy)), \frac{x}{y^2}(1-\ln(xy))\right)$, $\mathrm{d}f = \frac{1}{y}(1+\ln(xy))\,\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}(1-\ln(xy))\,\mathrm{d}y$. d) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\frac{x}{y^3}}{\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + 2\mathrm{e}^{x^2+y^2} + 4x^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\frac{x^3}{y^5}-\frac{2x}{y^3}}{\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + 2\mathrm{e}^{x^2+y^2} + 4y^2\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\frac{1}{y^2}}{\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + 4xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}$, $\operatorname{grad} f = \left(-\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}, \frac{\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}\right)$, $\mathrm{d}f = \left(-\frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}} + 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$. e) $\frac{\partial f}{\partial x} = z\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\frac{y^2+2xy}{x^4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{z}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -z\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\frac{x+y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = -\frac{y}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$, $\operatorname{grad} f = \left(z\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right), \frac{z}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}, \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\right)$, $\mathrm{d}f = z\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \frac{z}{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y + \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}z$. f) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{-xy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} + 1$, $\operatorname{grad} f = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x\right)$, $\mathrm{d}f = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + x\right)\mathrm{d}y$. **7.** a) $4 - \frac{1}{60}$, b) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{40}$, c) 0,02, d)

2,07 e, e) 4,896, f) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}0{,}04$. **8.** a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, b) 0, c)$-\frac{2}{\sqrt{3}}$. **10.** a) Například konstantní funkce zobrazuje libovolnou otevřenou množinu do jediného bodu, který není otevřenou množinou. b) Například funkce $f(x,y)=\operatorname{arctg} x$ zobrazuje uzavřenou množinu $\mathbf{R}^2$ na množinu $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, která není uzavřená. **11.** Obě definice splývají právě tehdy, když bod a, ve kterém limitu uvažujeme, splňuje následující podmínku: „Existuje nějaké ryzí okolí bodu a, které je podmnožinou definičního oboru dané funkce.“ **17.** a) Vrstevnice: $\mathcal{V}_C=\{(x,\,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2==1-C,\ C\le 1\}$, spádnice: $y=kx$, k je libovolné, tečná rovina: $2x_0x+2y_0y+z=1+x_0^2+y_0^2$, b) Vrstevnice: $\mathcal{V}_C=\{(x,\,y)\in\mathbf{R}^2\mid y=C+x^2,\ C\in\mathbf{R}\}$, spádnice: $y=\ln\frac{k}{\sqrt{|x|}}$, k je libovolné kladné číslo, a přímka $x=0$, tečná rovina: $2x_0x-y+z=x_0^2$. **21.** a) $4\varphi_{uv}=0$, kde $\varphi(u,\,v)==f\left(\frac{1}{2}(u+v),\,\frac{1}{2}(u-v)\right)$; řešení: $\varphi(u,\,v)=F(u)+G(v)$, $f(x,\,y)=F(x+y)+G(x-y)$, kde F a G jsou libovolné funkce, b) $4\varphi_{uv}=0$, kde $\varphi(u,\,v)=f\left(\frac{1}{2}(u+v),\,\frac{2}{u-v}\right)$; řešení: $\varphi(u,\,v)=F(u)++G(v)$, $f(x,\,y)=F\left(x+\frac{1}{y}\right)+G\left(x-\frac{1}{y}\right)$, kde F a G jsou libovolné funkce, c) $4uv\varphi_{uv}=0$, kde $\varphi(u,\,v)=f\left(\sqrt{uv},\,\sqrt{\frac{u}{v}}\right)$; řešení: $\varphi(u,\,v)=F(u)+G(v)$, $f(x,\,y)=F\,(xy)+G\left(\frac{x}{y}\right)$, kde F a G jsou libovolné funkce. **22.** $p(x,y,z)=\text{konst.}$ **23.** a) $F=x^2y-xy^2+\cos x+C$, b) $F=\mathrm{e}^{xy}+\sqrt{xy}+C$, c) výraz není úplným diferenciálem, d) $F=x^2+y^2+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$, e) výraz není úplným diferenciálem, f) $\sqrt{1+x^2+y^2}+\ln x+\sin y+C$, g) výraz není úplným diferenciálem. **26.** Například a) $f(x,\,y)=-(x-a)^2$, b) $f(x,\,y)=(x-a)^2$, c) $f(x,\,y)==(x-a)^4+(y-b)^2$, d) $f(x,\,y)=-(x-a)^4-(y-b)^2$, e) $f(x,\,y)=-(x-a)^4-(y-b)^4$, f) $f(x,\,y)=(x-a)^4+(y-b)^4$, g) $f(x,\,y)=(x-a)^3+(y-b)^3$, h) $f(x,\,y)=(x--a)^3-(y-b)^2$, i) $f(x,\,y)=(x-a)^3+(y-b)^2$. **27.** a) $(a_1,\,b_1)=(1,\,\frac{1}{2})$, $f(a_1,\,b_1)=-\frac{1}{4}$ ostré lokální minimum, $(a_2,\,b_2)=(0,\,0)$, $f(a_2,\,b_2)=0$ a $(a_3,\,b_3)=(2,\,0)$, $f(a_3,\,b_3)=0$ sedlové body, b) $(a_1,\,b_1)=(0,\,0)$, $f(a_1,\,b_1)=0$ a $(a_2,\,b_2)=(-1,\,-1)$, $f(a_2,\,b_2)=-\frac{1}{6}$ sedlové body, c) $(a,\,b)=(0,\,b)$, $f(a,\,b)=0$, pro $b>0$ neostré lokální maximum, pro $b<0$ neostré lokální minimum, d) $(a_1,\,b_1)=(-\frac{3}{2},\,0)$, $f(a_1,\,b_1)=\frac{27}{4}$, sedlový bod, $(a_2,\,b_2)=(0,\,0)$, $f(a_2,\,b_2)=0$ sedlový bod, e) $(a,\,b)=(1,\,-2)$, $f(a,\,b)=4$ ostré lokální maximum. **28.** a) funkce nemá na M globální extrém, b) v bodě $(a,\,b)=(1,\,1)$ má funkce globální minimum $f(1,\,1)=\frac{1}{2}$, c) V bodech $(a_1,\,b_1)=(1,\,0)$ a $(a_2,\,b_2)=(-1,\,0)$ má funkce globální maximum $f(a_1,\,b_1)=f(a_2,\,b_2)=1$, v bodě $(a_3,\,b_3)=(0,\,0)$ globální minimum $f(a_3,\,b_3)=0$, d) funkce nemá na M globální extrém, e) V bodech $(a_1,\,b_1)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\,\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $(a_2,\,b_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ má funkce globální maximum $f(a_1,\,b_1)=f(a_2,\,b_2)=3$, v bodě $(a_3,\,b_3)=(0,\,0)$ globální minimum $f(a_3,\,b_3)=-1$,

29. a) $(a,\,b)=(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2})$, $f(a,\,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ostré lokální maximum, b) $(a,\,b)=(1--\frac{1}{\sqrt{2}},\,1-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f(a,\,b)=\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$, $\lambda=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}}$ ostré lokální maximum, c) $(a,\,b)=(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2})$, $f(a,\,b)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ostré lokální minimum, d) $(a_1,\,b_1)=(1+\frac{1}{\sqrt{2}},\,1+\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f(a,\,b)=\sqrt{2}+1$, $\lambda=\frac{1}{2}$ ostré lokální maximum, $(a_2,\,b_2)=(1-\frac{1}{\sqrt{2}},\,1-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $f(a,\,b)=\sqrt{2}-1$, $\lambda=-\frac{1}{2}$ ostré lokální minimum, e) $(a,\,b)=(\frac{p^2}{p^2+q^2},\,\frac{q^2}{p^2+q^2})$, $f(a,\,b)=\frac{2}{p^2+q^2}$, $\lambda=\frac{2}{p^2+q^2}$ ostré lokální minimum,

f) $(a_1, b_1) = (1, 0)$, $f(a_1, b_1) = \frac{1}{p^2}$, $\lambda = \frac{1}{p^2}$ ostré lokální minimum, $(a_2, b_2) = (0, 1)$, $f(a_2, b_2) = \frac{1}{q^2}$, $\lambda = \frac{1}{q^2}$ ostré lokální maximum, $(a_3, b_3) = (-1, 0)$, $f(a_3, b_3) = \frac{1}{p^2}$, $\lambda = \frac{1}{p^2}$ ostré lokální minimum, $(a_4, b_4) = (0, -1)$, $f(a_4, b_4) = \frac{1}{q^2}$, $\lambda = \frac{1}{q^2}$ ostré lokální maximum, g) $(a_1, b_1) = (1, 1)$, $f(a_1, b_1) = 2$, $\lambda = 2$ ostré lokální minimum, $(a_2, b_2) = (-1, -1)$, $f(a_2, b_2) = 2$, $\lambda = 2$ ostré lokální minimum, h) $(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $f(a, b) = \frac{5}{4}$, $\lambda = 1$ ostré lokální maximum. **31.** Hledáme stacionární body funkce $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - \lambda(2x^2 + y^2 - 1)$, nejvyšší bod je vázaným lokálním maximem: $x = 0$, $y = \pm 1$, $z = 1$, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, nejnižší bod je vázaným lokálním minimem: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$, $\lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **33.** a) $(a_1, b_1) = (-2, 1)$, $c_1 = f(a_1, b_1) = -3$ ostré lokální maximum, $(a_2, b_2) = (2, -1)$, $c_2 = f(a_2, b_2) = 3$ ostré lokální minimum, b) $(a_1, b_1) = (0, \frac{16}{5})$, $c_1 = f(a_1, b_1) = -\frac{12}{5}$ ostré lokální maximum, $(a_2, b_2) = (0, 0)$, $c_2 = f(a_2, b_2) = 4$ ostré lokální minimum.

9.3.4

1. (Matice jsou uvedeny postupně v pořadí a) až f).)

$$\begin{pmatrix} \frac{-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 & \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 & \frac{-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \sin z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - 2 \\ \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 2z \\ \frac{-3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} - 2 & \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 2z & \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 2y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{yz} & -\frac{y}{x^2z} & -\frac{z}{x^2y} \\ -\frac{x}{y^2z} & \frac{1}{xz} & -\frac{z}{xy^2} \\ -\frac{x}{yz^2} & -\frac{y}{xz^2} & \frac{1}{xy} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & 2z \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-yz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ 2z & \frac{-yz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{y^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + 2x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} yz^2 + \cos x & 2xyz & y^2z \\ xz^2 & x^2z - \frac{1}{y^2} & 2xyz \\ 2xyz & x^2y & y^2x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2y^2z - \frac{2x}{(1+x^2)^2} & 4xyz & 2xy^2 \\ 4xyz & \frac{z^2-2y^2}{(y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 2x^2z & \frac{-3yz}{(y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 2x^2y \\ 2xy^2 & \frac{-3yz}{(y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} + 2x^2y & \frac{y^2-2z^2}{(y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix}.$$

2. a) $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + xy + \sin z + C$, b) $f(x, y, z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 2xz + yz^2 + C$, d) $f(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + xz^2 + C$, f) $f(x, y, z) = \frac{-1}{\sqrt{y^2+z^2}} + x^2y^2z + \operatorname{arctg} x + C$,

vektorová pole v úlohách c) a e) nejsou konzervativní.
3. a) Integrální křivky $y = kx$, $x \neq 0$, $k \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta, kmenová funkce $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, vrstevnice $x^2+y^2 = \mathrm{e}^{2C}$ jsou kružnice se středem v počátku, b) integrální křivky $y = x+k$, $k \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta, jsou přímky rovnoběžné s osou prvního a třetího kvadrantu, kmenová funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x+y)$, vrstevnice $\operatorname{arctg}(x+y) = C$ jsou přímky rovnoběžné s osou druhého a čtvrtého kvadrantu $y = -x$, c) integrální křivky $y^2 + \frac{1}{2}x^2 = k$, $k \in \mathbf{R}$ je libovolná kladná konstanta, jsou soustředné elipsy s poloosami $\sqrt{2k}$, $\sqrt{k}$, kmenová funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$, vrstevnice $\frac{x^2}{y} = C$, tj. $y = \frac{1}{C}x^2$, $C > 0$, jsou části parabol v prvním kvadrantu, d) integrální křivky $y^2 - x^2 = k$, $k \in \mathbf{R}$ je libovolná konstanta, jsou hyperboly, jejichž asymptotami jsou osy kvadrantů, kmenová funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy)$, vrstevnice $\operatorname{arctg}(xy) = C$ jsou hyperboly, jejichž asymptotami jsou pro $C \neq 0$ osy x a y, pro $C = 0$ jsou vrstevnicemi osy x a y. **4.** a) $-2\pi^2$, b) 1, c) 1, d) $\frac{11}{15}$, e) $\frac{3}{4}$, f) $64\pi^3$.

9.4.4

2.a) $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varrho + \left(\frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\varrho}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial(\varrho F_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{\partial F_\varrho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z$, $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial(\varrho F_\varrho)}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$, b) $\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_\varphi\sin\vartheta) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi$, $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$. **3.** $\vec{\nabla}f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e}_w$, $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_uh_vh_w}\left(\frac{\partial(h_vh_wF_u)}{\partial u} + \frac{\partial(h_uh_wF_v)}{\partial v} + \frac{\partial(h_uh_vF_w)}{\partial w}\right)$, $\operatorname{rot}\vec{F} = \frac{\vec{e}_u}{h_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_wF_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_vF_v)\right] + \frac{\vec{e}_v}{h_uh_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_uF_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_wF_w)\right] + \frac{\vec{e}_w}{h_uh_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_vF_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_uF_u)\right]$,
$\Delta f = \frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_uh_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$. **4.** a) $Q = 4\frac{\partial^2}{\partial v^2}$, b) $Q = \left(\frac{\partial}{\partial u} + 2\frac{\partial}{\partial v}\right)\vec{e}_u - \frac{\partial}{\partial u}\vec{e}_v - \frac{\partial}{\partial w}\vec{e}_w$, c) $Q = 4\frac{\partial}{\partial u} + \left(v^2 - \frac{2v}{u+v}\right)\frac{\partial}{\partial v}$, d) $Q = u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + uv\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + v^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} + u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}$.

10.1.5

5.

$$E(L) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g(x)y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \implies \frac{g(x)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = K = \text{konst.}, \quad y(x) = \int\frac{K}{\sqrt{g^2(x)-K^2}}\,\mathrm{d}x.$$

a) Pro $g(x) = \sqrt{x}$ je $y(x) = 2K\sqrt{x-K^2} + C$, $x \geq K^2$, $C = \text{konst.}$

b) Pro $g(x) = x$ je $x = K\cosh\frac{y-C}{K}$, $x^2 \geq K^2$, $C = \text{konst.}$, nebo ekvivalentně

$$y(x) = K\ln\left[\frac{x}{K} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{K}\right)^2 - 1}\right] + C.$$

6. a) $\tilde{L}(x,\,y,\,\dot{x},\,\dot{y}) = \dot{x}L(x,\,y,\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}})$,

$$\tilde{J}[x,\,y] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \dot{x}L\left(x,\,y,\,\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\,\mathrm{d}t, \quad x(\alpha) = a, \quad x(\beta) = b.$$

d) Postupnými úpravami vyjde

$$E_x(\tilde{L}) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L - \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right] = -\dot{y}\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right] = -\dot{y}E(L),$$
$$E_y(\tilde{L}) = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}\frac{1}{\dot{x}}\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \dot{x}\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right] = \dot{x}E(L).$$

Soustava rovnic $E_x(\tilde{L}) = 0$, $E_y(\tilde{L}) = 0$ je ekvivalentní rovnici $E(L) = 0$ a zároveň rovnici $\dot{x}E_x(\tilde{L}) + \dot{y}E_y(\tilde{L}) = 0$.

10.2.3

2. $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{\varphi}\ell\cos\varphi + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi$, $E_x(L) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x} + m\dot{\varphi}\ell\cos\varphi) = 0$, $E_\varphi(L) = -mg\ell\sin\varphi - m\ell\ddot{x}\cos\varphi - m\ell^2\ddot{\varphi} = 0$, $p_x = m\dot{x} + m\dot{\varphi}\ell\cos\varphi = \text{konst.}$, $p_\varphi = m\dot{x}\ell\cos\varphi + m\ell^2\dot{\varphi}$.

3.

a)

$$L(t,\,x,\,X,\,\dot{x},\,\dot{X}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 - \frac{1}{2}k(x-\ell)^2 - \frac{1}{2}K(X-x-L)^2 + mgx + MgX,$$

$$E_x(L) = mg - k(x-\ell) + K(X-x-L) - m\ddot{x} = 0, \quad E_X(L) = Mg - K(X-x-L) - M\ddot{X} = 0.$$

b) Úloha je regulární.

$$p = m\dot{x}, \quad P = M\dot{X},$$
$$H(t,\,x,\,X,\,p,\,P) = \frac{p^2}{2m} + \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}k(x-\ell)^2 + \frac{1}{2}K(X-x-L)^2 - mgx - MgX,$$

$$\dot{p} = -k(x-\ell) + K(X-x-L) + mg, \quad \dot{P} = -K(X-x-L) + Mg, \quad \dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{X} = \frac{P}{M}.$$

Hamiltonova funkce nezávisí explicitně na čase, proto se podél trajektorie soustavy zachovává její celková mechanická energie (součet kinetické energie, potenciální pružné energie a potenciální gravitační energie). Žádná ze zobecněných souřadnic x, X není cyklická, zobecněné hybnosti se proto nezachovávají.

4.

a) $L(x,\, y,\, \dot{y}) = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}$, problém je regulární, neboť

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(1+y'^2)^{3/2}} \neq 0, \quad \text{pro} \quad x,\, y \neq 0,$$

$$E(L) = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{y\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Technické úpravy dokončete a uvidíte, že řešit Eulerovu-Lagrangeovu rovnici není schůdné.

b) Řešení je však snadné, použijeme-li hamiltonovské formulace úlohy:

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+y'^2}} \implies y'^2 = \frac{p^2}{x^2+y^2-p^2},$$

$$H(x,\, y,\, p) = -L + py' = -\sqrt{x^2+y^2-p^2}.$$

Hamiltonovy rovnice a jejich řešení:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-p^2}},$$

$$pp' - yy' = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(p^2-y^2)}{\mathrm{d}x} = 0 \implies p^2 - y^2 = \text{konst.}$$

(Fyzikové ihned vědí, že toto je rovnice fázové trajektorie částice popsané zobecněnou souřadnicí y, má-li x význam času.)

5.

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\ell_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\ell_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + (m_1+m_2)g\ell_1\cos\varphi_1 + m_2 g\ell_2\cos\varphi_2,$$

$$E_{\varphi_1}(L) = -m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) - (m_1+m_2)g\ell_1\sin\varphi_1 -$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((m_1+m_2)\ell_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\big) = 0,$$

$$E_{\varphi_2}(L) = m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) - m_2 g\ell_2\sin\varphi_2 -$$
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(m_2\ell_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2\ell_1\ell_2\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\big) = 0.$$

10.3.3

1. $\varphi(z) = \frac{Cz}{R\sqrt{R^2-C^2}} + \varphi_0$, konstanty C a φ_0 jsou dány podmínkou, že oblouk prochází zadanými body A a B. **2.** $t_{AB} = s_0\sqrt{\frac{R}{g}}$, kde s_0 je hodnota parametru určená souřadnicemi bodu $B = (d,\, h)$.

3.

a) Označme $t' = \mathrm{d}t/\mathrm{d}x$. Pak

$$L(t,\, x,\, \dot{x}) \longrightarrow \tilde{L}(x,\, t,\, t') = \frac{a(x)}{2t'} - U(x)t', \quad E = -\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t'} = \text{konst.} \implies$$

$$\implies \frac{a(x)}{2(t')^2} + U(x) = E \implies (t')^2 = \frac{a(x)}{2[E - U(x)]}.$$

b) Vztah pro periodu má tvar

$$T = 2\int\limits_{x_m}^{x_M} \sqrt{\frac{a(x)}{2[E-U(x)]}}\,\mathrm{d}x.$$

c) Pro matematické kyvadlo je $x(t) = \varphi(t)$, $a(\varphi) = m\ell^2$ (pozor, vzhledem k volbě úhlové výchylky φ jako zobecněné souřadnice musíme vzít za $a(\varphi)$ moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k bodu závěsu, nikoli hmotnost kyvadla), $U(\varphi) = -mg\ell\cos\varphi$ (je-li hladina nulové potenciální tíhové energie zvolena na úrovni bodu závěsu), $E = -mg\ell\cos\varphi_0$, kde φ_0 je amplituda úhlové výchylky. Pro periodu platí

$$T = 2\int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \sqrt{\frac{\ell}{2g(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}}\,\mathrm{d}\varphi, \quad \text{pro malé výchylky} \quad T \doteq 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Použité úpravy:

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 \doteq \frac{1}{2}(\varphi_0^2 - \varphi^2), \qquad \int\limits_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}\,\mathrm{d}\varphi = |\text{substituce} \ \ \varphi = \varphi_0\cos u| = \pi.$$

5. a) $m = \frac{8}{\pi^2}$, $x(t) = 2\cos\frac{\pi}{2}t$, $y(t) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}t$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, $v(\sqrt{2}, 1) = (-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2})$. b) $L = \frac{4}{\pi^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \alpha(x^2+y^2)$, $E_x = -2\alpha x - \frac{8}{\pi^2}\ddot{x} = 0$, $E_y = -2\alpha y - \frac{8}{\pi^2}\ddot{y} = 0$, c) $E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + U(x,\, y) = 6$ (ze zadaných počátečních podmínek), hledaná funkce je $\varphi = \varphi(\varrho)$.

$$J[\varphi] = \int \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E_0 - U}\,\mathrm{d}\ell = \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\pi}{2}\sqrt{E_0 - \varrho^2}\sqrt{1 + \varrho^2\varphi'^2}\,\mathrm{d}\varrho \implies \frac{\pi}{2}\sqrt{E_0 - \varrho^2}\frac{\varphi'\varrho^2}{\sqrt{1+\varrho^2\varphi'^2}} = K,$$

kde K je konstanta. Všechny číselné hodnoty jsou v jednotkách soustavy SI.