Písemka - skalární součin

1. Rozhodněte, zda $\langle \cdot | \cdot \rangle$ definuje skalární součin ve V nad $\mathbf{C}$, zdůvodněte:
a) $V = \mathbf{C}$, $\langle x + iy | a + ib \rangle = xa + yb - \mathrm{i} \cdot xb + \mathrm{i} \cdot ya$

b)$V = M_{22}$ nad $\mathbf{C}$, $\langle A | B \rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$.

2. Ve vektorovém prostoru nad $\mathbf{R}$ ukažte, že u je ortogonální k v právě tehdy, když $\|u + v\| = \|u - v\|$. (Bude to platit také nad $\mathbf{C}$?)

3. Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R}^4$:
$L = [(1, -1, 0, 0), (-1, 1, 1, 1)]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi. Určete matici projekce a pro libovolný vektor zapište vztah pro ortogonální projekci a komponentu.

4. Skalární součin v P_2 je dán vztahem

$$\langle p | q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) \mathrm{d}x.$$

Určete ortogonální projekci a komponentu vektoru $v = x^2$ v podprostoru $L = [x + 1, 9x - 5]$.

5. Nechť $\vec{a} = (-i, 0), \vec{b} = (1, i) \in \mathcal{V}_2$ v bázi (e_1, e_2). Definujte skalární součin tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly ortogonální. Určete matici skalárního součinu v bázi (e_1, e_2).

6. V $\mathbf{C}^2$ nad $\mathbf{C}$ zadejte dva různé skalární součiny (například tak, že zadáte jejich matici G ve standardní bázi). Ke každému z nich nalezněte dvě různé ortonormální báze a určete matici přechodu mezi nimi.