PÍSEMKA 2.- náhradní
Lineární transformace

1. Nalezněte spektrální reprezentaci zobrazení, které je v ortonormální bázi reprezentováno maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

reprezentuje lineární transformaci (vektory píšeme do řádků a násobíme je maticí A zprava, pokud jste zvyklí na jinou symboliku, je třeba to v písemce uvést a použít jinou matici – jakou?) $\varphi : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ v bázi (e_1, e_2, e_3).
a) určete vlastní hodnoty této transformace
b) určete vlastní vektory této transformace
c) nalezněte bázi, ve které je φ reprezentována diagonální maticí, určete matici přechodu
d) pomocí trasformačního vztahu převeďte matici A do této báze. (Vyšla vám diagonální s vlastními hodnotami na diagonále?)

3. Nalezněte lineární transformaci $P_2(x) \to P_2(x)$, která má dvě různé vlastní hodnoty, a jejíž vlastní vektory jsou pouze $t(x^2 + x)$ a $s(x + 1)$, $t, s \in \mathbf{R}$. Transformaci zadejte předpisem i maticí ve standardní bázi $(x^2, x, 1)$. Vlastní hodnoty si zvolte. Bude taková transformace diagonalizovatelná? Zdůvodněte.

4. Popište množinu všech takových transformací ve $\mathcal{V}_n$, pro které platí, že každý nenulový vektor $\vec{a} \in \mathcal{V}_n$ je vlastní. (Zdůvodněte.)

5. Nechť $\varphi, \psi \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ jsou lineární transformace. Dokažte, že

$$\ker(\varphi) \cap \ker(\psi) \subset \ker(\varphi + \psi).$$

Ukažte, že obrácená inkluze obecně neplatí, tj. nalezněte transformace φ, ψ a vektor $\vec{a} \in \ker(\varphi + \psi)$ takový, že $\vec{a}$ nepatří do $\ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$.