První zkouškový příklad — JNT matice resp. operátoru

Je zadána matice

$$\mathbf{B} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete její vlastní hodnoty, vlastní vektory, Jordanův normální tvar $\mathbf{J_B}$ a všechny matice $\mathbf{T}$, realizující podobnostní transformaci

$$\mathbf{TBT}^{-1} = \mathbf{J_B}.$$

Pomocí maticové kalkulačky zkontrolujte výsledek pro jednu konkrétní volbu matice $\mathbf{T}$ a export přiložte k písemce.

Řešení:

Vypočteme determinant chrakteristické matice (např. Laplaceovým rozvojem podle posledního sloupce):

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) \quad = \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

Zobrazení f má jednu čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 1$. V tuto chvíli vidíme, že přípustné (navzájem nepodobné) Jordanovy matice jsou následující (kombinatorická úloha, ještě se mohou lišit pořadím bloků, ale dvě Jordanovy matice lišící se pouze pořadím bloků už jsou si podobné, tedy možných tříd podobnosti je v našem případě jen pět):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přičemž poslední (čtyřblokovou) můžeme hned vyloučit (identita by totiž byla v každé bázi reprezentovaná stejnou maticí E, což neodpovídá zadání).

Nyní je třeba určit vlastní vektory, příslušné této vlastní hodnotě, jejichž rovnice mají tvar:

$$(x, y, z, w) \cdot \mathbf{B} = \lambda \cdot (x, y, z, w).$$

Maticí této homogenní soustavy je matice $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})^T = (\mathbf{B} - \mathbf{E})^T$ a budeme ji upravovat na schodovitý tvar:

$$(\mathbf{B} - \mathbf{E})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy má hodnost 2, její řešení bude tedy obsahovat $4 - 2$ volné neznámé (parametry). Podprostor vlastních vektorů je dvourozměrný (dva lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídají tomu, že Jordanova matice bude mít dva bloky):

$$\text{Ř} = L_\lambda = \{(0, t, s, 0) \mid t, s \in \mathbf{C}\}.$$

V tuto chvíli tedy víme, že ze všech Jordanových matic, které připadaly v úvahu pro čtyřnásobnou $\lambda = 1$ zbývají pouze následující (dvoublokové) možnosti (mezi nimi v tuto chvíli ještě neumíme rozhodnout):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dimenze podprostoru vlastních vektorů $\dim L_\lambda$ **je rovna počtu bloků příslušných této** λ **v Jordanově matici!**

(Kdybychom měli situaci s třemi nezávislými vlastními vektory, byla by matice tříbloková, tj. předposlední z naší původní nabídky pěti matic nebo naopak pro situaci s pouze jedním nezávislým vlastním vektorem zase jednobloková, tj. první z naší původní nabídky pěti matic.)

Vlastních vektorů není dostatek na vytvoření báze, zobrazení nemá diagonální reprezentaci, je třeba řešit nehomogenní soustavu pro další vektor v „řetízku“ (x', y', z', w'):

$$(x', y', z', w') \cdot \mathbf{B} = \lambda \cdot (x', y', z', w') + (0, t, s, 0).$$

Matice soustavy je opět $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})^{\mathbf{T}}$, ale doplněná o pravou stranu $(0, t, s, 0)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ -1 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Pozor: klíčový moment, kdy se rozhoduje o tom, jak bude vypadat Jordanův normální tvar. Tato nehomogenní soustava má řešení pouze za předpokladu

$$\underline{t+s=0}$$

Pouze pro tuto volbu existuje „řetízkový“ vektor (x', y', z', w'). Je tedy jasné, že Jordanova matice bude mít jeden blok řádu tři a jeden blok řádu jedna. Tedy definitivně víme, že

$$\mathbf{J_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení nehomogenní soustavy je

$$\text{Ř'} = \{(t, T, S, 0) \mid t = -s, T, S \in \mathbf{C}\}.$$

Nyní nám chybí již jen poslední „řetízkový“ vektor (x'', y'', z'', w''), který je řešením nehomogenní soustavy:

$$(x'', y'', z'', w'') \cdot \mathbf{B} = \lambda \cdot (x'', y'', z'', w'') + (t, T, S, 0):$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & T \\ -1 & 0 & 0 & 0 & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T+S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

soustava má řešení pouze pro $\underline{T+S=0}$,

$$\text{Ř''} = \{(T, u, v, t) \mid t = -s, T = -S, u, v \in \mathbf{C}\}.$$

Nyní zbývá poskládat vypočítané vektory do matice přechodu $\mathbf{T}$ (první řádek odpovídá vektoru Ř”, druhý vektoru Ř’, třetí vlastnímu vektoru s volbou $t = -s$ a poslední vlastnímu vektoru s volbou nezávislou, tj. $t + s \neq 0$):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T & u & v & t \\ t & T & -T & 0 \\ 0 & t & -t & 0 \\ 0 & c & d & 0 \end{pmatrix} \quad T, u, v, t, c, d \in \mathbf{C}, t \neq 0, c \neq -d.$$

Řádky, matice přechodu, do nichž umisťujeme souřadnice vlastních vektorů odpovídají vždy posledním řádkům jednotlivých Jordanových bloků!

Vlastní vektor se totiž zobrazí na svůj násobek, tj. na diagonále je příslušná vlastní hodnota a jinak nuly, což je právě poslední řádek v každém Jordanově bloku. V tomto konkrétním případě tedy třetí a čtvrtý. Při stanovení podmínek nesmíme zapomenout, že vlastní vektory použité do nové báze musí být zvoleny nezávislé, tj. aby matice $\mathbf{T}$ byla regulární, dále nesmíme zapomenout na dodržení případných omezujících podmínek na řešitelnost soustavy pro řetízkové vektory. Pro pochopení celého postupu si stačí uvědomit, jak se chová naše nová báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, když je v ní operátor reprezentován naší Jordanovou maticí (vektoru $\mathbf{u}_3$ a $\mathbf{u}_4$ jsou vlastní, jedničku schválně vyznačujeme, protože je to vlastní hodnota):

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{u}_1) &= 1\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \\
\varphi(\mathbf{u}_2) &= 1\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \\
\varphi(\mathbf{u}_3) &= 1\mathbf{u}_3, \\
\varphi(\mathbf{u}_4) &= 1\mathbf{u}_4.
\end{aligned}$$

Pro každou z našich matic T pak platí, že

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}_{\mathbf{B}},$$

kde $\mathbf{J}_{\mathbf{B}}$ je Jordanova matice uvedená výše. Pro nějakou konkrétní volbu, např. $c = 0, d = 1, t = 1, T = 0, u = 0, v = 0$ pak získáme matici přechodu pro kontrolu maticovou kalkulačkou

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kontrola z maticové kalkulačky je ve zvláštním souboru s názvem "kalkulacka-jnt1.pdf".

Příklad 2:
Vyzkoušejte si sami celý postup znovu pro jinou matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Komentář: Při řešení postupujte analogicky. Opět máme stejnou, čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 1$. Dokonce bude stejný i podprostor generovaný vlastními vektory L_λ. Rozdíl bude v tom, že při řešení první nehomogenní soustavy (té pro řetízkový vektor (x', y', z', w')) nenarazíte na žádnou omezující podmínku pro parametry t a s. Soustava bude mít řešení pro obě (libovolné) nezávislé volby vlastního vektoru (tj. parametrů t a s). Z toho je jasné, že Jordanova matice má dva dvojnásobné bloky. Žádný další (dvoučárkovaný) řetízkový vektor již hledat nebudeme. Srovnejme chování nové báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ podle této Jordanovy matice s předchozím příkladem (tentokrát jsou $\mathbf{u}_2$ a $\mathbf{u}_3$ vlastní vektory):

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{u}_1) &= 1\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\\
\varphi(\mathbf{u}_2) &= 1\mathbf{u}_2,\\
\varphi(\mathbf{u}_3) &= 1\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4,\\
\varphi(\mathbf{u}_4) &= 1\mathbf{u}_4.
\end{aligned}$$

Výsledek:

$$\mathbf{J_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{s-t}{2} & T & S & \frac{t+s}{2} \\ 0 & t & s & 0 \\ \frac{v-u}{2} & U & V & \frac{u+v}{2} \\ 0 & u & v & 0 \end{pmatrix},$$

$T, S, u, v, t, s, U, V \in \mathbf{C}, (t, s) \neq k \cdot (u, v)$.

A pro všechny naše matice $\mathbf{T}$ opět platí

$$\mathbf{J_C} = \mathbf{TCT}^{-1}.$$

Matici přechodu pro maticovou kalkulačku dostaneme například pro konkrétní volbu: $u = v = 1, U = V = T = S = 0, t = -1, s = 1$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Export je opět ve zvláštním souboru s názvem "kalkulacka-jnt2.pdf".

Dodatek pro šprty — jak nalézt podobnostní transformaci pomocí úprav polynomických matic?

Víme, že Jordanův normální tvar libovolné číselné matice A lze určit také tím způsobem, že nalezneme kanonický tvar její charakteristické (tj. polynomickké) matice $A - \lambda E$, ten můžeme najít pomocí ekvivalentních úprav polynomických matic (řádkových a sloupcových) nebo pomocí invariantních faktorů určených z dělitelů minorů i-tého řádu ($i = 1, 2, ...n$).

Na tomto místě ještě ukážeme postup, jak nalézt podobnostní transformaci $TAT^{-1} = B$ mezi libovolnými dvěma podobnými maticemi pomocí úprav polynomických matic. Tento postup je velmi pracný, proto zvolíme matice pouze řádu dva. Vy si samozřejmě tento postup můžete vyzkoušet i na předchozích příkladech.

Příklad: Jsou zadány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

které jsou podobné již na první pohled (proč? :-)). Nalezněte nějakou jejich podobnostní trasformaci.

A. Pomocí úprav polynomických matic

Nejprve vezmeme příslušné charakteristické matice $A - \lambda E$ resp. $B - \lambda E$ a ty budeme upravovat na kanonický tvar $K_A = K_B$ (kanonický tvar mají stejný, neboť jsou ekvivalentní - to plyne z podobnosti původních matic A, B). S jednotkovou maticí vlevo děláme tytéž úpravy řádkové, jako s charakteristickou, s jednotkovou maticí vpravo děláme tytéž sloupcové úpravy jako s maticí charakteristickou.

$A - \lambda E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Přičtením $(\lambda - 1)$- násobku druhého řádku k prvnímu řádku:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1+\lambda & 0 & 1-(1-\lambda)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Přičtením $(\lambda - 1)$-násobku prvního sloupce ke druhému sloupci:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1+\lambda & 0 & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & -1+\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Výměnou řádků a násobením spodního řádku číslem -1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \lambda-1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & \lambda^2-2\lambda & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$B-\lambda E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

přičtením λ-násobku prvního sloupce ke druhému sloupci:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 2-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

přičtením $(\lambda-2)$-násobku druhého řádku k prvnímu řásku:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & \lambda-2 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

výměnou řádků a násobením druhého sloupce číslem -1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda-2 & 0 & \lambda^2-2\lambda & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Tím jsme získali unimodulární matice

$$U_A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix},\quad V_A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resp.

$$U_B(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{pmatrix},\quad V_B(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pro které (prověřte)

$$K_A=U_A(A-\lambda E)V_A,\quad K_B=U_B(B-\lambda E)V_B.$$

Odtud

$$(B-\lambda E)=U_B^{-1}U_A(A-\lambda E)V_AV_B^{-1}=U\cdot(A-\lambda E)\cdot V,$$

kde

$$U=U_B^{-1}U_A=\begin{pmatrix} -1 & 3-2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad V=V_AV_B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme hodnoty maticových polynomů $R_1=U_L(B)$ resp. $R_2=V_R(B)$:

$$R_1=B^2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+B\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot B^2 + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} B + \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjevně $R_1 = R_2^{-1}$ a tyto matice realizují jednu z možných podobnostních transformací (prověřte)

$$B = R_1 \cdot A \cdot R_2.$$

Srovnejte s geometrickým postupem:

B. Pomocí řetízků rovnic

Nejprve určíme vlastní hodnoty:

$$\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.$$

Určíme báze, ve které jsou matice A a B v Jordanově normálním tvaru $J_A = J_B$. U našich matic je Jordanův tvar zjevně diagonální, neboť vlastní hodnoty jsou různé. Nemusíme tedy řešit řetízky rovnic, protože báze je tvořena přímo vlastními vektory, které snadno určíme $\vec{a}_{\lambda_1} = (1, -1)$, $\vec{a}_{\lambda_2} = (1, 1)$, $\vec{b}_{\lambda_1} = (1, -2)$, $\vec{b}_{\lambda_2} = (1, 0)$.

Matice přechodů od původní báze k těmto novým bázím označíme

$$T_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Platí

$$J_A = T_A \cdot A \cdot T_A^{-1}, \quad J_B = T_B \cdot B \cdot T_B^{-1},$$

odkud

$$B = (T_B^{-1} T_A) \cdot A \cdot (T_A^{-1} T_B) = T \cdot B \cdot T^{-1}$$

a matice $T = T_B^{-1} T_A$ realizuje jednu z možných podobnostních transformací (prověřte):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrola z maticové kalkulačky opět přiložena ve zvláštním souboru "kalkulacka-jnt3.pdf".