Druhý zkouškový příklad — spektrální reprezentace samoadjungované matice resp. operátoru

Je zadána samoadjungovaná matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete její vlastní hodnoty, vlastní vektory, nalezněte unitární matici T realizující podobnostní transformaci

$$TAT^{-1} = TAT^{T*} = D_A,$$

kde D_A je diagonální matice. Určete spektrální reprezentaci zadané matice A:

$$A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r,$$

kde P_i jsou matice ortogonální projekce na L_{λ_i}. Pomocí tohoto rozkladu vypočtěte obecnou mocninu matice A:

$$A^n = \lambda_1^n P_1 + \ldots + \lambda_r^n P_n.$$

Řešení:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & -\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} -\lambda & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 \implies$$

$$\implies \lambda_1 = -1,\ k_1 = \dim L_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1,\ k_2 = \dim L_2 = 2.$$

Zjistili jsme, že dostaneme dva dvojrozměrné ortogonální podprostory vlastních vektorů L_1 a L_2, matice A bude vyjádřena pomocí odpovídajících projekcí jako $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = -P_1 + P_2$. Vypočteme vlastní vektory. Označme jejich neznámé složky $(\beta) = (\beta^1\ \beta^2\ \beta^3\ \beta^4)$. Platí

$$(\beta)(A - \lambda_1 E) = (0),$$

$$(A-\lambda_1 E)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\beta) = (\beta^1 \; -\beta^1 \; \beta^3 \; -\mathrm{i}\beta^3) \implies L_1 = \left[\left|(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}})\right|\right].$$

$$(\beta)(A-\lambda_2 E) = (0),$$

$$(A-\lambda_2 E)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\beta) = (\beta^1 \; \beta^1 \; \beta^3 \; \mathrm{i}\beta^3) \implies L_2 = \left[\left|(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}})\right|\right].$$

Vektory, které jsme prostřednictvím výběru volných neznámých zvolili jako generátory podprostorů vlastních vektorů, tvoří v prostoru U_4 ortonormální bázi (u_1, u_2, u_3, u_4). Matice přechodu od báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi (u_1, u_2, u_3, u_4) je

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ověřte, že platí $TAT^{-1} = TAT^{T*} = D_A$, kde D_A je diagonální matice s diagonálou diag $D_A = (-1, -1, 1, 1)$. (Pořadí vlastních hodnot na diagonále odpovídá pořadí, ve kterém jsme příslušné vlastní vektory naskládali do řádků matice T.

Nyní vypočteme matice projekce:

$$P_1 = C_1^{T*} C_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$P_2 = C_2^{T*} C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\mathrm{i}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Protože spektrální reprezentace je v tomto případě dána pouze dvěma projekcemi, můžeme je určit dokonce i bez výpočtu vlastních vektorů. Platí totiž současně

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \quad P_1 + P_2 = E.$$

a vyřešením této maticové soustavy:

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad P_2 = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

V souladu s předchozím výsledkem

$$P_1 = \frac{1}{2}(E - A), \quad P_2 = \frac{1}{2}(E + A).$$

Nakonec vypočteme

$$A^n = \lambda_1^n P_1 + \lambda_2^n P_2 = (-1)^n P_1 + 1^n P_2$$

a tedy pro sudé $n = 2k$ resp. pro liché $n = 2k + 1$ máme

$$A^{2k} = E \quad \text{resp.} \quad A^{2k+1} = A.$$

Důležité kontroly průběhu výpočtu:

1. Vlastní hodnoty musí vyjít reálné.
2. Při Gaussově eliminaci u hledání každého z L_i se musí vynulovat tolik řádků, jaká byla násobnost kořene λ_i
3. Všechny generátory L_i jsou kolmé ke všem generátorům L_j pro $\lambda_i \neq \lambda_j$.
4. Před vytvořením matice C_i nezapomeňte generátory L_i orogonalizovat a normovat.
5. Všechny matice P_i musí vyjít samoadjungované a splňovat $P_i^2 = P_i$.
6. Zkontrolujte před odevzdáním, že $P_1 + P_2 + \ldots + P_r = E$.
7. Zkontrolujte před odevzdáním, že $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_r P_r = A$.