Třetí zkouškový příklad — kanonický tvar kuželosečky

Kuželosečka je v kartézské soustavě souřadnic zadána rovnicí

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0.$$

Nalezněte její kanonický tvar a určete o jakou kuželosečku se jedná (včetně nalezení nové ortonormální báze a posunu počátku soustavy souřadnic).

Řešení:
Maticový tvar je

$$(X)A(X)^T + (X)B + c =$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} + 2 = 0,$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 15\lambda - 50 =$$

$$= (\lambda - 10)(\lambda - 5), \quad \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 5,$$

$$(A - \lambda_1 E) = (A - 10E) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = [|\vec{f_1}|] = \left[\left|\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|\right].$$

$$(A - \lambda_2 E) = (A - 5E) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = [|\vec{f_2}|] = \left[\left|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right|\right],$$

$$\bar{B} = TB = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{\sqrt{5}} \\ -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Seminormální tvar kuželosečky:

$$10\bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}\bar{x} - \frac{10}{\sqrt{5}}\bar{y} + 2 = 0.$$

Doplnění na čtverec:

$$10\left(\bar{x}^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{1}{5}\right) - 2 + 5\left(\bar{y}^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y} + \frac{1}{5}\right) - 1 + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 10\left(\bar{x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5\left(\bar{y}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-1=0.$$

Nové proměnné a normální tvar:

$$\xi=\bar{x}-\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \eta=\bar{y}-\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \bar{O}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\quad \text{v soustavě } \langle O;\,\vec{f}_1,\,\vec{f}_2\rangle,$$

$$10\xi^2+5\eta^2-1=0\Longrightarrow \left(\frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{10}}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\frac{1}{5}}}\right)^2=1.$$

Souřadnice počátku $\bar{O}$ v původní soustavě $\langle O;\,\vec{e}_1,\,\vec{e}_2\rangle$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)T=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\left(-\frac{1}{5},\,\frac{3}{5}\right).$$

Kuželosečkou je elipsa s poloosou $\frac{1}{\sqrt{10}}$ podél vektoru $\vec{f}_1$ a poloosou $\frac{1}{\sqrt{5}}$ podél vektoru $\vec{f}_2$.

Ještě ukážeme, jak klasifikovat kuželosečku pomocí *invariantů*.

Funke

$$I_1=\alpha_1^1+\alpha_2^2=\mathrm{tr}A,\qquad I_2=\det A,\qquad I_3=\det\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \frac{1}{2}\beta_1\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2\\ \frac{1}{2}\beta_1 & \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma\end{pmatrix}$$

jsou invarianty kuželosečky, funkce

$$K_1=\det\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \frac{1}{2}\beta_1\\ \frac{1}{2}\beta_1 & \gamma\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\alpha_2^2 & \frac{1}{2}\beta_2\\ \frac{1}{2}\beta_2 & \gamma\end{pmatrix}$$

je jejím semiinvariantem.

Vidíme, že

$$I_1=\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}=9+6=15.$$

$$I_2=\det A=\det\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}=50,$$

$$\lambda_1+\lambda_2=\mathrm{tr}A=15,\quad \lambda_1\cdot\lambda_2=\det A=50,$$

$$\lambda_1=10,\quad \lambda_2=5,$$

$$I_3 = \det \begin{pmatrix} 9 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} = -50,$$

$$K_1 = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 5.$$

Použijeme tabulku klasifikace kuželoseček podle invariantů:

Rovnice	Kuželosečka	Invarianty	Normální tvar
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$	imaginární elipsa	$I_2 > 0,\ I_1 \cdot I_3 > 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	reálná elipsa	$I_2 > 0,\ I_1 \cdot I_3 < 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvojice imag. různob.	$I_2 > 0,\ I_3 = 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	hyperbola	$I_2 < 0,\ I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvojice reál. různob.	$I_2 < 0,\ I_3 = 0$	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0$
$x^2 - 2py = 0$	parabola	$I_2 = 0,\ I_3 \neq 0$	$\lambda_1 x^2 \pm 2\sqrt{\lvert\frac{I_3}{I_1}\rvert} y = 0$
$x^2 + a^2 = 0$	dvojice imag. rovnob.	$I_2 = 0,\ I_3 = 0,\ K_1 > 0$	$\lambda_1 x^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0$
$x^2 - a^2 = 0$	dvojice reál. rovnob.	$I_2 = 0,\ I_3 = 0,\ K_1 < 0$	$\lambda_1 x^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0$
$x^2 = 0$	dvojná přímka	$I_2 = 0,\ I_3 = 0,\ K_1 = 0$	$\lambda_1 x^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0$

Protože $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$ a $I_3/I_2 = -1$ jedná se o elipsu s kanonickým tvarem

$$10\xi^2 + 5\eta^2 - 1 = 0.$$