1 Vektorové prostory a podprostory

Definujte *vektorový prostor, podprostor, dimenzi, bázi, součet podprostorů, doplněk.*

1. Dokažte, že každá báze daného vektorového prostoru má stejný počet prvků.

2. Zvolte tři různé báze ve $\mathcal{V}_4$ a nalezněte matice přechodu mezi těmito bázemi. Zvolte libovolný vektor $\vec{a}$ a určete jeho složky v těchto bázích.

3.Vektory $\vec{a}, \vec{b}$ mají v bázi (e_1, e_2) složky $a^1 = 1, a^2 = 1, b^1 = 1, b^2 = -1$, v bázi $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ složky $\overline{a}^1 = -1, \overline{a}^2 = 0, \overline{b}^1 = 1, \overline{b}^2 = 2$. Určete matici přechodu mezi bázemi a vyjádřete pruhované vektory báze jako lineární kombinaci nepruhovaných a obráceně. Mají báze stejnou orientaci?

4. Nechť $L_1 = [(0,2,3,1), (-1,-3,3,1), (1,1,1,1), (2,1,-3,5)], L_2 = [(-4,1,0,2), (2,5,1,0), (-8,13,2,-6)]$ jsou podprostory ve $\mathcal{V}_4$. Určete bázi a dimenzi podprostorů $L_1, L_2, L_1 + L_2, L_1 \cap L_2$ a jejich doplňků.

5. Nechť $L_1 = [(1,1,0,1), (1,0,1,1), (1,0,0,0), (3,1,1,2)]$, $L_2 = [(2,1,1,0), (0,1,-1,0), (1,1,1,0)]$ jsou podprostory ve $\mathcal{V}_4$. Určete dimenzi a bázi průniku. Zjistěte, zda $L_1 + L_2 = V_4$ a v kladném případě určete rozklad libovolného, pevně zvoleného vektoru do L_1 a L_2. Pokud tento rozklad není jednoznačný, určete alespoň dva různé rozklady.

6. Za jakých podmínek je rozklad vektoru do dvou podprostorů jednoznačný? Dokažte.

7. Zvolte ve V_4 podprostor L dimenze 2 a určete alespoň dva jeho doplňky L',L''. Rozložte libovolný, pevně zvolený vektor do L a L' (resp. do L a L''). Jsou tyto rozklady jednoznačné? Zdůvodněte.

2 Vektorové prostory se skalárním součinem, ortogonální doplněk, projekce

Definujte *skalární součin, ortogonálnost vektorů, normovaný vektor, unitární a ortogonální matici.*

1. Ukažte, že matice, reprezentující skalární součin v bázi, je samoadjungovaná.

2. Nechť $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{E}_n$ jsou libovolné vektory. Dokažte že platí *trojúhelníková nerovnost* ($\sqrt{\langle \vec{a}+\vec{b} \mid \vec{a}+\vec{b} \rangle} \leq \sqrt{\langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle} + \sqrt{\langle \vec{b} \mid \vec{b} \rangle}$) a *Cauchy-Buňakovského nerovnost* ($\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle^2 \leq \langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle \langle \vec{b} \mid \vec{b} \rangle$.

3. Ortogonalizujte systém vektorů $\vec{b}_1 = (1,1,0,0), \vec{b}_2 = (1,0,1,0), \vec{b}_3 = (-1,0,0,1)$ v $\mathcal{U}_4$ (složky vektorů jsou zadány v ortonormální bázi). Výsledný systém doplňte tak, aby vznikla ortonormální báze $\mathcal{U}_4$.

4. Skalární součin v $\mathcal{U}_4$ je v bázi $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_4)$ reprezentován maticí

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & i & 2 \end{pmatrix}.$$

Prověřte, zda matice splňuje axiomy skalárního součinu. Vyjádřete skalární součin vektorů $\vec{a} = (a^1, \ldots, a^4), \vec{b} = (b^1, \ldots, b^4)$ zadaných v téže bázi. Nalezněte alespoň jednu ortonormální bázi.

5. Definujte libovolně skalární součin ve $\mathcal{V}_3$ (zadáním matice v dané bázi s prověřením axiomů). Zvolte jinou bázi, nalezněte matici přechodu a vyjádřete skalární součin v nově zvolené bázi. Nalezněte dvě různé ortonormální báze. Co musí splňovat matice přechodu mezi ortonormálními bázemi? Dokažte.

6. Ve vektorovém prostoru polynomů jedné reálné proměnné stupně nejvýše n je skalární součin definován takto:

$$\langle a(x) \mid b(x) \rangle = \int\limits_0^1 a^*(x) b(x) \mathrm{d}x \in C.$$

Prověřte axiomy skalárního součinu. Nalezněte bázi. Ortonormalizujte ji.

Definujte *ortogonální doplněk* podprostoru, *matici projekce*.

7. Dokažte, že ortogonální doplněk k danému podprostoru v $\mathcal{U}_n$ je určen jednoznačně.

8. Nechť L je podprostor unitárního prostoru $\mathcal{U}_n$, generovaný vektory $\vec{a}_1 \ldots, \vec{a}_r$, jejichž složky jsou zadány vzhledem k ortonormální bázi v $\mathcal{U}_n$. Určete jeho ortogonální doplněk a matici projekce. Zvolte libovolný vektor a určete jeho rozklad.
a)$n = 6, \vec{a}_1 = (2, 1, 1, 0, 0, 1), \vec{a}_2 = (2, 2, 1, 1, 0, 0), \vec{a}_3 = (2, -1, 1, -2, 0, 3)$
b)$n = 4, \vec{a} = (1, 1, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$

3 Lineární transformace na vektorových prostorech, reprezentace v bázích

Definujte *lineární transformaci, jádro a image lineární transformace, hodnost a defekt, izomorfismus vektorových prostorů, regulární transformaci*

1. Nechť $\varphi : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_m$ je lineární transformace. Dokažte:
i) $\varphi(\vec{o}_{\mathcal{V}_n}) = \vec{o}_{\mathcal{V}_m}$
ii) transformace je jednoznačně určena obrazy libovolné báze ve $\mathcal{V}_n$
iii) Dokažte, že $ker(\varphi)$ je vektorovým podprostorem ve $\mathcal{V}_n$, $Im(\varphi)$ je vektorovým podprostorem ve $\mathcal{V}_m$ a $h(\varphi) + d(\varphi) = n$.

2. Definujte libovolnou lineární transformaci $\varphi : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_m$ (např. zadáním její matice v nějakých bázích).
a) určete její hodnost a defekt
b) určete obraz vektoru $\vec{a}$ v téže bázi
c) zvolte jiné báze vektorových prostorů, zapište matice přechodu, zapište matici transformace φ v těchto bázích.

3. Dokažte, že vektorové prostory jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi. Diskutujte vztah mezi maticí izomorfismu φ a jeho inverze φ^{-1} v libovolné, pevně zvolené bázi.

4.Nechť $P_{n+1}(x)$ je vektorový prostor všech polynomů jedné proměnné st$f \leq n$ s reálnými koeficienty. Definujme zobrazení $\varphi : P_{n+1}(x) \to P_{n+1}(x)$ takto (f' značí derivaci):

$$P_{n+1}(x) \ni f(x) \to \varphi(f(x)) = f'(x) \in P_{n+1}(x).$$

a) dokažte, že φ je lineární transformace
b) určete její jádro a image, hodnost a defekt

c) je tato transformace regulární? Proč?
d) Zapište matici této transformace v bázi $(1, x, \ldots, x^n)$ resp. v bázi $(1, x, \frac{1}{2}x^2, \ldots, \frac{1}{n}x^n)$ a přesvědčte se o platnosti transformačního vztahu pro tuto matici
e) zvolte dvě ortonormální báze vzhledem ke skalárnímu součinu:

$$\langle a(x) \mid b(x) \rangle = \int_0^1 a(x)b(x)\mathrm{d}x \in R$$

pro $n = 4$ a udělejte pro ně totéž, co v případě d).

5. Nechť $L \subset \mathcal{V}_n$ je podprostor ve $\mathcal{V}_n$, L' jeho libovolný, pevně zvolený doplněk. Dokažte, že zobrazení

$$\pi_{L,L'} : \mathcal{V}_n \ni \vec{a} \to \pi_{L,L'}(\vec{a}) = \vec{a}_L \in L \subset \mathcal{V}_n$$

projekce na podprostor je lineární transformace,
b) určete jádro, image, hodnost a defekt
c) dokažte že platí $\pi_{L,L'} \circ \pi_{L,L'} = \pi_{L,L'}$ a
d)$\pi_{L,L'} \circ \pi_{L',L}(\vec{a}) = \vec{o} \quad \forall \vec{a}$
e) co platí pro determinant a matici této lineární transformace?

6. Ukažte, že ortogonální projekce na podprostor v unitárním prostoru je lineární transformací a matice této transformace vyjádřená v ortonormální bázi je totožná s maticí projekce (viz. cvičení 2).

4 Struktura prostoru lineárních transformací, příklady

Definujte *operaci skládání lineárních transformací.*

1. Zaveďte na množině $L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m)$ strukturu vektorového prostoru (s důkazem). Určete jeho dimenzi a uveďte příklad báze.

2. Odvoďte vztahy pro matice
a) součtu dvou lineárních transformací $\varphi + \psi$, $\varphi, \psi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m)$
b) κ-násobku lineární transformace $\kappa\varphi$, $\varphi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m)$
c) složené lineární transformace $\varphi \circ \psi$, $\varphi \in L(\mathcal{V}_m, \mathcal{V}_k), \psi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m)$

3. Ukažte, že množina $(\mathrm{reg} L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n), \circ)$ všech izomorfismů ve $\mathcal{V}_n$ tvoří grupu.

4. Charakterizujte transformace $\varphi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$, pro které image splývá s jádrem.

5. Nechť (e_i) resp. (f_j) je báze ve $\mathcal{V}_n$ resp. ve $\mathcal{V}_m$. Uvažujme bázi prostoru $L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m)$ definovanou takto:

$$\Phi^i_j(e_k) = f_j \delta^i_k$$

kde $i = 1 \dots n, j = 1, \dots m$. Nechť $(\overline{e}_i)$ resp. $(\overline{f}_j)$ jsou jiné báze prostoru $\mathcal{V}_n$ resp. $\mathcal{V}_m$. Pomocí příslušných matic přechodu odvoďte transformační vztah pro Φ^i_j a $\overline{\Phi}^l_k$. Konkretizujte na příkladech.

6. Nechť L je podprostor unitárního prostoru $\mathcal{U}_n$, generovaný vektory $\vec{a}_1 \dots, \vec{a}_r$, jejichž složky jsou zadány vzhledem k ortonormální bázi v $\mathcal{U}_n$. Určete vektory báze jeho ortogonálního doplňku užitím vztahu $\pi_L + \pi_{L'} = id$, jejich složky vyjádřete v téže ortonormální bázi.
a)$n = 6, \vec{a}_1 = (2, 1, 1, 0, 0, 1), \vec{a}_2 = (2, 2, 1, 1, 0, 0), \vec{a}_3 = (2, -1, 1, -2, 0, 3)$
b)$n = 4, \vec{a} = (1, 1, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, 1, 1, 0), \vec{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$
Porovnejte s výsledkem příkladu 8 cvičení 2.

5 Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárních transformací

Definujte *vlastní hodnotu a vlastní vektor lineární transformace, charakteristickou matici, spektrum.*

1. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory transformace $\pi_{L,L'}$ (projekce na podprostor).

2. Nechť φ, ψ jsou lineární transformace ve $\mathcal{V}_n$ nad C. Ukažte, že lineární transformace $\varphi \circ \psi$ a $\psi \circ \varphi$ mají stejné spektrum.

3. Určete spektrum a vlastní vektory lineární transformace φ, je-li v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentována maticí A. Ve všech případech uvažujte vektorový prostor $\mathcal{V}_n$ nad C i nad R.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad d) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dokažte, že stopa všech matic reprezentujících danou lineární transformaci v různých bázích je stejná a je rovna součtu všech charakteristických kořenů dané lineární transformace (každý kořen započítán tolikrát, jaká je jeho násobnost).

6 Polynomické matice

Definujte λ - *matici (polynomickou matici), součet matic a* $\varphi(\lambda)$-*násobek matice.* Co považujeme za *elementární úpravy* λ-matic? Definujte *kanonický tvar, invariantní faktory* a *hodnost* λ-matice. Definujte *unimodulární matici.* Jaké má vlastnosti?

1. Určete kanonické tvary následujících polynomických matic
a) pomocí elementárních úprav
b) výpočtem invariantních faktorů

$$\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3\lambda^2-2\lambda+1 & 2\lambda^2+\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda-1 \\ 2\lambda^3-2\lambda & \lambda^2-1 & 2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-1 \\ 5\lambda^3-4\lambda+1 & 3\lambda^2+\lambda-2 & 5\lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-2 \end{pmatrix}$$

2. Rozhodněte, zda zadané matice jsou unimodulární, v kladném případě určete odpovídající matici inverzní a matice $U(\lambda), V(\lambda)$, které danou matici převádějí na kanonický tvar. Jsou určeny jednoznačně?

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda^3+5 \\ \lambda^2-\lambda-4 & \lambda^4-\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+i\lambda & -i\lambda^3+(1+2i)\lambda^2-2\lambda+1 \\ 1 & -i\lambda+2i \end{pmatrix}$$

7 Jordanův normální tvar a podobnostní transformace

Definujte *Jordanovu submatici, Jordanovu matici* a *Jordanův normální tvar* matice A. Definujte *podobnost* matic a dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence na množině čtvercových matic řádu n.

1. Rozhodněte, zda zadané matice jsou podobné a nalezněte nějakou podobnostní transformaci.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Pro zadanou Jordanovu matici určete kanonický tvar její charakteristické matice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Je zadán kanonický tvar charakteristické matice $J - \lambda E$, určete příslušnou matici Jordanovu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-5)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-2)^3(\lambda-5)^2 \end{pmatrix}$$

4. Kdy lze třídu podobných matic (nad R, resp. nad C) reprezentovat Jordanovou maticí?

5. Určete Jordanův normální tvar následujících matic:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

6. Uvědomte si souvislosti Jordanova normálního tvaru matice, reprezentující danou lineární transformaci s vlastnostmi této transformace.

- Kdy lze lineární transformaci ve $\mathcal{V}_n$ reprezentovat diagonální maticí?

- Za jakých podmíne lze z vlastních vektorů utvořit bázi?

- Jaká je dimenze podprostoru, který generují vlastní vektory, příslušné téže vlastní hodnotě?

- Kdy je dimenze podprostoru, který generují vlastní vektory, příslušné téže vlastní hodnotě λ_i rovna násobnosti kořene λ_i charakteristického polynomu?

- Co jsou to elementární dělitelé a jak souvisí s počtem lineárně nezávislých vlastních vektorů?

8 Podprostory generované vlastními vektory

1. Nechť $\varphi, \psi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ jsou lineární transformace a systém vlastních vektorů každé z nich nechť generuje celý prostor $\mathcal{V}_n$. Dokažte, že tyto transformace komutují právě tehdy, existuje-li jejich společný systém vlastních vektorů. Je předpoklad, který vyžaduje, aby vlastní vektory každé z nich generovaly celý prostor, nezbytný? Odpověď zdůvodněte.

2. Nechť $\varphi, \psi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ komutují. Dokažte, že pro každý vlastní vektor $\vec{a}$ transformace φ je i vektor $\psi(\vec{a})$ jejím vlastním vektorem, příslušným téže vlastní hodnotě jako $\vec{a}$.

3. V následujících příkladech představuje A matici reprezentující danou lineární transformaci $\varphi \in L(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ v bázi (e_i). Určete alespoň jednu bázi (f_j), v níž je φ reprezentována Jordanovou maticí. Příslušnou Jordanovu matici rovněž určete a najděte odpovídající podobnostní transformaci.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

9 Unitární a ortogonální lineární transformace

Definujte *unitární* a *ortogonální lineární transformaci.*

1.Ukažte, že pro případ euklidovského prostoru stačí definovat ortogonální transformaci vztahem

$$(\varphi(a), \varphi(a)) = (a, a)$$

pro libovolný vektor $a \in \mathcal{E}_n$. Je tato definice ekvivalentní také s definicí unitární transformace?

2. Je-li $\varphi \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$ reprezentována v nějaké ortonormální bázi unitární maticí, pak je reprezentována unitární maticí v každé ortonormální bázi. Dokažte.

3. Dokažte, že kompozice dvou unitárních lineárních transformací je opět unitární.

4. Nechť $\varphi \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$ je unitární lineární transformace. Jakou podmínku je třeba klást na číslo $\kappa \in C$, aby transformace $\kappa\varphi$ byla unitární?

5. Nechť matice A reprezentuje unitární lineární transformaci v obecné bázi. Jaký je vztah mezi A^{-1} a A^{T*}, je-li skalární součin reprezentován v téže bázi maticí G.

10 Samoadjungovaná a symetrická lineární transformace

Definujte *samoadjungovanou* a *symetrickou* lineární transformaci. Co je to *spektrální reprezentace*?

1. Nechť $\varphi, \varphi^{+} \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$ jsou navzájem sdružené lineární transformace. Zjistěte, jaký je vztah mezi jejich spektry a soubory vlastních vektorů. Prověřte, zda je získaný výsledek v souhlasu také s případem euklidovského prostoru.

2. Lineární transformace $\varphi \in L(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n)$ je samoadjungovaná právě tehdy, jestliže pro alespoň jednu bázi (e_i) platí $(\varphi(e_k), e_l) = (e_k, \varphi(e_l))$ pro všechna $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažte.

3. Samoadjungované lineární transformace jsou v ortonormální bázi zadány následujícími maticemi. Najděte jejich spektrální reprezentace (oběma způsoby).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Dokažte, že ortogonální projekce na podprostor je samoadjungovaná.

5. Zjistěte nutné a postačující podmínky pro to, aby složení (resp. součet, resp. násobek skalárem) dvou samoadjungovaných lineárních transformací byla opět samoadjungovaná lineární transformace.