Jak nalézt podobnostní transformaci?

Příklad: Jsou zadány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podobné již na první pohled. Nalezněte nějakou jejich podobnostní trasformaci.

A. Pomocí polynomických matic

Nejprve vezmeme příslušné charakteristické matice $A = \lambda E$ resp. $B - \lambda E$ a ty budeme upravovat na kanonický tvar $K_A = K_B$ (kanonický tvar mají stejný, neboť jsou ekvivalentní - to plyne z podobnosti původních mati A, B). S jednotkovou maticí vlevo děláme tytéž úpravy řádkové, jako s charakteristickou, s jednotkovou maticí vpravo děláme tytéž sloupcové úpravy jako s maticí charakteristickou.

$A - \lambda E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Přičtením $(\lambda - 1)$- násobku druhého řádku k prvnímu řádku:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1+\lambda & 0 & 1-(1-\lambda)^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Přičtením $(\lambda - 1)$-násobku prvního sloupce ke druhému sloupci:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1+\lambda & 0 & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & -1+\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Výměnou řádků a násobením spodního řádku číslem -1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & \lambda-1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & \lambda^2-2\lambda & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$B - \lambda E$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 2-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 \end{array}\right),$$

přičtením λ-násobku prvního sloupce ke druhému sloupci:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 1-\lambda & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

přičtením $(\lambda-2)$-násobku druhého řádku k prvnímu řásku:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & \lambda-2 & 0 & 2\lambda-\lambda^2 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

výměnou řádků a násobením druhého sloupce číslem -1:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda-2 & 0 & \lambda^2-2\lambda & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Tím jsme získali unimodulární matice

$$U_A(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix},\ V_A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & \lambda-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resp.

$$U_B(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 \end{pmatrix},\ V_B(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pro které (prověřte)

$$K_A=U_A(A-\lambda E)V_A,\quad K_B=U_B(B-\lambda E)V_B.$$

Odtud

$$(B-\lambda E)=U_B^{-1}U_A(A-\lambda E)V_AV_B^{-1}=U\cdot(A-\lambda E)\cdot V,$$

kde

$$U=U_B^{-1}U_A=\begin{pmatrix} -1 & 3-2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ V=V_AV_B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2\lambda+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme hodnoty maticových polynomů $R_1=U_L(B)$ resp. $R_2=V_R(B)$:

$$R_1=B^2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+B\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$R_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot B^2+\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}B+\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zjevně $R_1=R_2^{-1}$ a tyto matice realizují jednu z možných podobnostních transformací (prověřte)

$$B=R_1\cdot A\cdot R_2.$$

B. Pomocí řetízků rovnic

Nejprve určíme vlastní hodnoty:

$$\det(A-\lambda E)=\det(B-\lambda E)=\lambda^2-2\lambda,\ \ \lambda_1=0,\ \ \lambda_2=2.$$

Určíme báze, ve které jsou matice A a B v Jordanově normálním tvaru $J_A=J_B$. U našich matic je Jordanův tvar zjevně diagonální, neboť vlastní hodnoty jsou různé. Nemusíme tedy řešit řetízky rovnic, protože báze je tvořena přímo vlastními vektory, které snadno určíme $\vec{a}_{\lambda_1}=(1,-1)$, $\vec{a}_{\lambda_2}=(1,1)$, $\vec{b}_{\lambda_1}=(1,-2)$, $\vec{b}_{\lambda_2}=(1,0)$.

Matice přechodů od původní báze k těmto novým bázím označíme

$$T_A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \ T_B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Platí

$$J_A=T_A\cdot A\cdot T_A^{-1},\quad J_B=T_B\cdot B\cdot T_B^{-1},$$

odkud

$$B=(T_B^{-1}T_A)\cdot A\cdot(T_A^{-1}T_B)=T\cdot B\cdot T^{-1}$$

a matice $T=T_B^{-1}T_A$ realizuje jednu z možných podobnostních transformací (prověřte):

$$T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \ T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Výpočty v části B je ještě nutno zkontrolovat.