1. Opakování a tak

Co si z té střední školy ještě pamatujete? Jak se počítá s logaritmy, sínus, cosínus … Komplexní čísla :-(Umíte řešit soustavy lineárních rovnic pomocí matic?

Příklady náhradní za neúčast a příklady pro kombinované studium

1a. Načrtněte graf funkce $f : y = \log_x \log_x x$.

1b. V $\mathbf{R}$ řešte rovnice a nerovnice

i) $\frac{5\log x+3}{3\log x-4} = \frac{\log x+5}{3\log x-4} - 2$

ii) $4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$

iii) $2\sin^2 x - \cos x \sin x - \cos^2 x = 0$

iv) $|x^2 - x - 6| = 2x^2 + 4x - 4$

v) $0 \le \frac{|\log x|-1}{3} < 1$

1c. V $\mathbf{C}$ řešte rovnici $x^5 - 1 = 0$.

2a. Načrtněte graf funkce $f : y = \log_2(3 - x) + 1$.

2b. V $\mathbf{R}$ řešte rovnice a nerovnice

i) $\log x^{2\log\sqrt{x}} + \log\frac{1}{x^2} = 3$

ii) $8.2^{x^2+4x} \le 2^{2x+6}$

iii) $\cos 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$

iv) $|x + 3| + 2x - 1 = |2x - 4| + x - 2$

v) $\log(-\frac{36}{x^2} - \frac{6}{x} + 2) + 2\log x \le \log(x + 4) + \log(x - 4)$

2c. V $\mathbf{C}$ řešte rovnici $x^4 - 1 = 0$.

3a. Načrtněte graf funkce $f : y = |\log_2(x + 2) - 1|$.

3b. V $\mathbf{R}$ řešte rovnice a nerovnice

i) $\frac{\log(x^3+5x^2+21x-6)}{3\log(x+2)} = 1$

ii) $27^{x+1} + 9^{\frac{3}{2}x+1} + 3^{3x+1} = 351$

iii) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

iv) $|x+2| + 3x - 4 \leq |2x-8| - 6x + 2$

v) $\frac{4}{x+4} \leq x - 4$

3c. V **C** řešte rovnici $7x^3 + 24 = 0$.

4a) V zoologické zahradě onemocněl hroch. Bylo mu předepsáno 42 mg vitaminu A, 65mg vitaminu D. K dispozici máte dva přípravky, první obsahuje 10 procent vitaminu A a 25 procent vitaminu D, druhý obsahuje 20 procent vitaminu A a 25 procent vitaminu D. Jak to hrochovi nadávkujeme?

4b) Majitel hospody má čtyřmístné, šestimístné a osmimístné stoly. Dohromady má 20 stolů. Při plném obsazení je v hospodě 108 zákazníků. V případě, že je plně obsazeno jen polovina čtyřmístných, polovina šestimístných a čtvrtina osmimístných stolů, je v hospodě právě 46 zákazníků. Kolik je v hospodě kterých stolů? To je blbej příklad, co?

5. V každé z následujících soustav nalezněte podmínky pro čísla a a b tak, aby měla soustava žádné, resp. právě jedno, resp. nekonečně mnoho řešení.

i) $x - 2y = 1$ a $ax + by = 5$

ii) $3x + y - z = a$, $x - y + 2z = b$ a $5x + 3y - 4z = c$

iii) $x + 2y - 4z = 4$, $3x - y + 13z = 2$ a $4x + y + a^2z = a + 3$

Domácí úkol

Domácí úkol bude až příště, dneska by to bylo moc lehký :-)

2. To nejnutnější z lineární algebry (se sem stejně nevejde)

Soustavy lineárních rovnic, matice soustavy a rozšířená matice, homogenní a nehomogenní soustavy, kdy to má vlastně řešení?

1. Nechť $(x)\mathbf{A} = (\beta)$ je soustava n rovnic o n neznámých, jejíž matice $\mathbf{A}^\mathbf{T}$ je regulární. Taková soustava se nazývá *kramerovská* a má právě jedno řešení tvaru

$$(\chi) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\det \mathbf{B}_1, \ldots, \det \mathbf{B}_n),$$

kde matice $\mathbf{B}_i{}^\mathbf{T}$ vznikne nahrazením sloupce (α_i) v matici $\mathbf{A}^\mathbf{T}$ sloupcem pravých stran soustavy (β). Určete řešení následujících kramerovských soustav:

(i)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x^1 & + & 2x^2 & + & x^3 & = & 5 \\ & & 4x^2 & + & 5x^3 & = & 2 \\ x^1 & + & 3x^2 & & & = & 0 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^1 & + & 3x^2 & - & x^3 & = & 4 \\ 2x^1 & + & x^2 & & & = & 4 \\ x^1 & - & x^2 & + & 2x^3 & = & 5 \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x^1 & + & 3x^2 & & & = & 4 \\ 2x^1 & & & + & x^3 & = & 0 \\ -x^1 & + & 2x^2 & + & x^3 & = & \alpha \end{array}$$

(iv)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x^1 & + & x^2 & - & x^3 & = & \beta^1 \\ & - & x^2 & + & x^3 & = & \beta^2 \\ 2x^1 & + & 3x^2 & - & 2x^3 & = & \beta^3 \end{array}$$

$(\beta) = (0, 0, 0)$;
$(3, 5, -1)$; $(2, -10, 24)$

2. Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice $\mathbf{B}^\mathbf{T}$ na schodovitý tvar.

(i)

$$\begin{aligned} 3x + y &= -1 \\ 2x + y &= 2 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + 2x^3 &= -1 \\ 2x^1 - x^2 + 2x^3 &= -4 \\ 4x^1 + x^2 + 4x^3 &= -2 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} 2x^1 + x^2 - 4x^3 &= 0 \\ 3x^1 + 5x^2 - 7x^3 &= 0 \\ 4x^1 - 5x^2 - 6x^3 &= 0 \\ 7x^1 \qquad - 13x^3 &= 0 \end{aligned}$$

3a) Udejte příklad homogenního systému s právě jedním řešením. Může mít homogenní systém právě dvě řešení?

3b) Ukažte, že dvě roviny v $\mathbf{R}^3$ procházenící počátkem mají alespoň jeden další společný bod (mají nekonečně mnoho společných bodů).

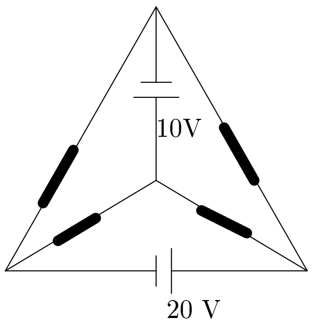
3c) Mohou dvě rovnice o třech neznámých mít jednoznačné řešení?

4. Rozhodněte o vzájemné poloze dvojice přímek:

a $p : x + y + z - 1 = 0, 2x + 3y + 6z - 6 = 0$
$q : y + 4z = 0, 3x + 4y + 7z = 0$

b $p : x = -1 + 3t, y = -3 - 2t, z = 2 - t$
$q : x = 2 + 2t, y = -1 + 3t, z = 1 - 5t$

5. Řešte následující síť, všechny odpory jsou 10 Ω. Použijte Kirhoffovy zákony.



Domácí úkol

1. Určete všechna řešení následujících soustav rovnic. Použijte úpravy matice $\mathbf{B^T}$ na schodovitý tvar.

(i)

$$\begin{aligned} -2x + y &= 2 \\ -4x - 2y &= -4 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 4 \\ 2x^1 + x^2 - x^3 &= 3 \\ 3x^1 + 3x^2 + 2x^3 &= 10 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 &= 0 \\ x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 &= 0 \\ x^1 + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 &= 0 \\ x^1 + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Matice, vektory, skalární a vektorový součin

Co jsou to matice a co s nimi lze provádět? Hodnost, determinant, matice inverzní (a kdy existuje). Co jsou to vektory, skalární a vektorový součin, kdy jsou vektory lineárně závislé a kdy nezávislé, báze.

1a. Jsou zadány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & a \\ 0 & 2a & 3 & 0 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, které dvojice z těchto matic lze spolu násobit a v jakém pořadí a násobení proveďte.

1b) Dokažte $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\mathbf{T} = \mathbf{B^T} \cdot \mathbf{A^T}$, kde symbol $\mathbf{A^T}$ značí matici transponovanou k $\mathbf{A}$.

2. U následujících matic zjistěte, zda jsou regulární (u číselných matic) resp. za jakých podmínek jsou regulární (u matic s parametry)

a v kladném případě stanovte matice inverzní. Užijte obou způsobů výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ a výsledky porovnejte.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3a. Určete, zda dané vektory $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]$ jsou lineárně závislé či nezávislé

i) $\mathbf{u} = [1, 2, -2]$, $\mathbf{v} = [-2, -3, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, 2, 2]$

ii) $\mathbf{u} = [1, 3, -2]$, $\mathbf{v} = [1, 1, 2]$, $\mathbf{w} = [-1, 2, -8]$

3b. Určete hodnotu parametru a, pro kterou jsou dané vektory lineárně závislé či nezávislé

i) $\mathbf{u} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{v} = [1, a, 1]$, $\mathbf{w} = [2, 2, a]$

i) $\mathbf{u} = [0, 2, a]$, $\mathbf{v} = [-1, 3, 2]$, $\mathbf{w} = [2, -4, a]$

4a. Určete, zda dané vektory jsou ortogonální či ortonormální $\mathbf{u} = [1, -2, 2, 1]$, $\mathbf{v} = [1, 3, 2, 1]$, $\mathbf{w} = [-1, 0, 1, -1]$

4b. Určete parametry a , b tak, aby dané vektory byly ortogonální

i) $\mathbf{u} = [1, 1, 2, 0, 0]$, $\mathbf{v} = [1, -1, 0, 1, a]$, $\mathbf{w} = [1, b, 2, 3, -2]$

ii) $\mathbf{u} = [2, -1, 0, a, b]$, $\mathbf{v} = [a, b, 0, -2, 1]$, $\mathbf{w} = [a, 2b, 5, b, -a]$

4c. Určete vektor $\mathbf{x} = [x, y, z, t]$, který je ortogonální k dané trojici vektoru $\mathbf{u} = [1, 1, 1, 1]$, $\mathbf{v} = [1, -1, -1, 1]$, $\mathbf{w} = [2, 1, 1, 3]$

5. Dokažte, že pro smíšený součin $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \equiv \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ platí

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$$

Domácí úkol

2a. Dokažte následující vztahy, které platí pro vektory v $\mathbf{R}^3$

i) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$

ii) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

iii) $(k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$, $k \in \mathbf{R}$

iv) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

2b. Dokažte, že pro libovolné dva vektory $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$ platí, že jejich skalární součin s vektorem $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je roven nule, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

4. Báze, dimenze a podprostory, ještě nějaké násobení a determinanty

Co je to báze vektorového prostoru, matice přechodu mezi dvěma bázemi. Podprostory, jejich dimenze a jak to souvisí s hodností matic.

1. V bázi $B = < \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5} >$ jsou dány vektory
$\vec{a_1} = (1 \;\; 0 \;\; -2 \;\; 2 \;\; 3 \;\; -1)$,$\vec{a_2} = (0 \;\; 4 \;\; -2 \;\; 2 \;\; 0)$,
$\vec{a_3} = (-1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -4 \;\; 2)$, $\vec{a_4} = (-2 \;\; 11 \;\; -6 \;\; -5 \;\; 5)$. Určete, jsou-li lineárně závislé či nezávislé a stanovte dimenzi vektorového podprostoru v $\mathbf{R}^5$, který generují.

2. Přechod mezi bázemi B a B' v $\{R^4$ je dán vztahy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \vec{e_1} & = & -\vec{e_1}' & + & \vec{e_2}' & + & \vec{e_3}' & & \\ \vec{e_2} & = & \vec{e_1}' & & & + & 2\vec{e_3}' & & \\ \vec{e_3} & = & \vec{e_1}' & + & \vec{e_2}' & + & \vec{e_3}' & + & \vec{e_4}' \\ \vec{e_4} & = & 3\vec{e_1}' & & & & & + & \vec{e_4}' \end{array} \quad \text{(Báze } B \text{ je ortonormální.)}$$

- Určete matice přechodu T a S. Vyjádřete vektory báze B' jako lineární kombinace vektorů báze B.
- Vektor $\vec{a} = (1 \;\; 0 \;\; -2 \;\; 1)$ v bázi B. Určete jeho složky v B'.
- Rozhodněte, zda báze B' je ortonormální, či nikoliv.

3a. Dokažte, že hodnota skalárního součinu je nezávislá na volbě báze.

3b. Určete možné hodnoty determinantu matice přechodu při přechodu mezi dvěma ortonormálními bázemi.

4. Dokažte následujcící vztahy pro dané matice

i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix} \tag{1}$$

ii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

5. Vypočtěte determinant následujícćh matic

i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ii)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

iii)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix} \tag{5}$$

iv)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Domácí úkol

3a) V $\mathbf{R}^2$ určete matici přechodu od pevně zvolené ortonormální báze $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ k bázi pootočené o úhel φ. Ukažte, že vynásobením matic příslušných pootočení o úhly φ a φ' získáme matici přechodu od původní báze k bázi pootočené o součet těchto úhlů. Závisí na pořadí násobení?
3b) Nepovinné!
V $\mathbf{R}^3$ určete matici přechodu od pevně zvolené ortonormální báze $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ k bázi získané pootočením o úhel φ kolem osy z a následným pootočením o úhel ϑ kolem osy x. Návod: Určete postupně matice přechodu jednotlivých pootočení a ty potom vynásobte. Bude výsledek záviset na pořadí otečení?

5. Funkce

Vlastnosti funkcí, sudá, lichá, ohraničená, rostoucí, klesající a jiné funkce. Racionální lomenné funkce, rozklad na parciální zlomky, limita a spojitost.

1a) Určete definiční obor funkcí $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$, $y = \ln\sin(x-3) + \sqrt{16+x^2}$, $y = \sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$, $y = \frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3-x)$.

1b) Rozhodněte o sudosti resp. lichosti funkcí $y = x^3$, $y = x^2+1$, $\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$.

1c) Určete periodu funkcí $y = \sin 3x$, $y = \sin^2 x$, $y = 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x$, $y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

2a) Následující polynomy rozložte v $\mathbf{R}$ a určete znaménka: $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$, x^6-1, $(x^2+3x+2)(x^2+x)$.

2b) Najděte inverzní funkce k funkcím $y = \frac{2x-1}{3x+5}$, $y = 10^{x-3}$.

2c) Nepovinné pro předmět Matematika 1!
Ukažte, že množina všech funkcí $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s operacemi sčítání a násobení funkcí je okruhem s jedničkou (rozhodněte, zda je tento okruh

oborem integrity resp. tělesem). Ukažte, že množina všech konstantních funkcí je podokruhem (rozhodněte, zda je tento podokruh ideálem). Nalezněte nějaký ideál v okruhu reálných funkcí.

2d) Ukažte, že množina všech funkcí $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s operacemi sčítání a násobení funkce reálným číslem má strukturu vektorového prostoru nad $\mathbf{R}$. Ukažte, že množina všech konstantních funkcí je jeho podprostorem. Nalezněte nějaké další podprostory.

3. Pokud je třeba, podělením polynomů převeďte neryze lomenné funkce na součet polynomu a ryze lomenné funkce, kterou následně rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x^5+2x^4-2x^3+2x^2-x+1}{x^4(x^2+1)}, \quad \frac{x^4+2x^3-10x^2+22x-71}{x^2+2x-15}.$$

4. Vypočtěte následující limity funkcí:

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg} x)\cdot \ln x$
- $\lim\limits_{x\to 0+} (\mathrm{cotg} x - \frac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{(2x^3-2x)^{\frac{1}{3}}}$

5. Vypočtěte následující limity posloupností:

- $(\frac{\ln n}{n})$
- $((-1)^n)$
- $(\frac{n}{\ln n})$
- $((\frac{n+1}{n+2})^n)$
- $((\frac{n^2}{n^2+1})^{2n^2})$
- $(\frac{\sin n+n}{\sin n-n})$

Domácí úkol

4a. Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}, \quad \frac{2x^4-2x^3+x^2+1}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2}, \quad \frac{1}{(x^4-1)^2}$$

4b.

- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$
- $\lim\limits_{x\to 0+}(\frac{1}{x})^{\mathrm{tg} x}$

5. Z definice vypočtěte derivace funkcí $f(x) = \text{kons.}$ a $f(x) = x^n$.

6. A zase funkce

Výpočty derivací, derivace součtu, součinu, podílu a složené funkce.
Vyšetření průběhu funkce:

- definiční obor,
- sudost, lichost,
- derivace, monotónnost, lokální extrémy,
- druhá derivace, konvexnost, konkávnost, inflexní body,
- asymptoty,
- nulové body
- zakreslení grafu.

1. Určete derivaci funkce a ober její existence

a) $\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\ln x$

b) $7^{-x^2}\cdot\mathrm{e}^{-5x}$

c) $e^{-3x}\cdot\sin 3x$

d) $\ln(x^2-a^2)+\ln\frac{x-a}{x+a}$

e) $\arccos\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

f) $2^{\tan x^2}$

g) $3^{\ln\tan x}$

h) $\ln(e^{-2x}+x\cdot e^{-2x})$

i) $x^{(x^2+1)}$

j) $\sqrt{x}^{(\frac{1}{x+1})}$

2. Vyšetřete průběh následujících funkcí: $y = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$, $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

3. Vyšetřete průběh následujících funkcí: $y = \ln\sin x$, $y = 2\cos x - \cos 2x$, $y = \frac{e^x}{x^2}$.

4. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x)$ na intervalu [a,b].

$f(x)$	a	b
$x^4 - 8x^2 - 9$	-1	1
$2 \cdot \sin 2x + \cos 4x$	0	$\frac{\pi}{3}$
$2 \cdot 2^{3x} - 9 \cdot 2^{2x} - 12 \cdot 2^x$	-1	1
$2 \cdot \ln^3 x - 9 \cdot \ln^2 x + 12 \cdot \ln x$	$e^{\frac{3}{4}}$	e^3
$\sin(\sin x)$	-1	1

5. Částice koná harmonické kmity o amplitudě $A = 2 \cdot 10^{-4}$m a frekvenci f=400Hz. Určete její největší rychlost a zrychlení.

Domácí úkol

6a. Nad středem kruhové atletické dráhy poloměru R se má zavěsit lampa dané svítivosti. V jaké výšce je nutno ji zavěsit, aby osvětlení dráhy bulo maximální?

6b. Z Planckova vyzařovacího zákona (závislost energie vyzářené absolutně černým tělesem na vlnové délce) odvoďte Wienův posunovací zákon.

7. Integrál

Integrování metodou per partes, pomocí substitucí, stačí jenom nápad.

1.-5. Vypočtěte následující integrály:

$\int \sin^2 x \mathrm{d}x$

$\int \sin^3 x \mathrm{d}x$

$\int \sin 5x \cdot \cos 3x \mathrm{d}x$

$\int \sin^5 x \cdot \cos x \mathrm{d}x$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

$\int \mathrm{e}^{\cos x} \cdot \sin^3 x \mathrm{d}x$

$\int x \cdot \sqrt{x^2+a^2} \mathrm{d}x$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$

$\int \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 2x} \mathrm{d}x$

$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

$\int x \cdot \sin(x^2+1) \mathrm{d}x$

$\int \frac{x}{4+x^4} \mathrm{d}x$

$\int \frac{3x^2+4x+6}{x^2+1} \mathrm{d}x$

$\int \sqrt{2+x+x^2} \mathrm{d}x$

$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x$

$\int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$

Domácí úkol

7. Odvoďte rekurentní vzorce pro neurčité integrály:

- $\int \cos^n x \mathrm{d}x$, $(n \neq 0)$
- $\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$, $(n \neq 1)$
- $x^n \cdot \cos x \mathrm{d}x$

8. Opakování

1. Vypočtěte následující integrály:

- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x-x^2}$

2. Vypočtěte limity následujících funkcí:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$
- $\lim\limits_{x \to \infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$

- $\lim_{x \to 0+} (\sin x)^x$

3. Vypočtěte následující integrály:

- $\int \frac{1+2x}{\sqrt{1+x-3x^2}} \mathrm{d}x$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

4. Vyšetřete průběh následujících funkcí:

- $y = (x^3 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$
- $y = x\mathrm{e}^x$
- $y = \frac{1}{1-e^x}$
- $y = \frac{e^x + e^{-1}}{2}$

5. Dvě částice hmotností $M > m$ se pohybují po přímce rychlostmi o velikostech $V > v$ stejným směrem. Dojde k jejich pružné srážce. Určete jaká by měla být velikost rychlosti v_0 pomalejší částice (m) před srážkou tak, aby vzrůst její kinetické energie při srážce byl maximální.

Domácí úkol

8a. Vypočtěte obsah kruhu, vypočtěte hmotnost kruhu, který má plošnou hustotu $\varrho(x, y) = |x|$ a je umístěn v počátku.

8b. Vypočtěte obsah plochy pod grafem funkce $y = \sin^2 x$, $y = sin3x$ pro $x \in < 0, \pi >$, vypočtěte hmotnost této plochy, jestliže plošná hustota je $\varrho(x, y) = x + y$.

9. Aplikace integrálu

1a. Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^2$ a $x = y^2$.

1b. Vypočtěte obsah plochy ohraničené křivkami $x + y + y^2 = 2$ a $x = 0$.

2. Vypočtěte obsah plochy ohraničené osou x a jedním obloukem cykloidy: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$.

3. Vypočtěte obsah kruhové úseče, elipsy, trojúhelníka.

4-5. Vypočtěte objem válce, kužele, koule, kulového vrchlíku, elipsoidu, kvádru... Vypočtěte momenty setrvačnosti těchto těles kolem osy symetrie, pro případ konstantní hustoty. Pro odevzdání stačí vybrat jen některá tělesa.

Domácí úkol

9. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hmotným středem

i) poloviny homogenního válce (osa je rovnoběžná s osou válce),

ii) homogenní polokoule (osa je rovnoběžná s kruhem ohraničujícím polokouli).

Uměli byste tyto momenty setrvačnosti určit pomocí Steinerovy věty?

10. Křivkový integrál

1. Vypočtěte moment setrvačnosti
a) homogenního oblouku kružnice , vzhledem k ose kolmé na rovinu kružnice a procházející jejím středem

b) homogenní úsečky (vzhledem k ose kolmé na úsečku a procházející jejím středem, resp. libovolným jiným bodem),

c) zapište integrál a) pro případ oblouku kružnice se středem v bodě $(0, 0, 0)$, ležící v rovině xy, která má lineární hustotu $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

2. Vypočtěte práci síly $\vec{F} = (-kx, -ky, 0)$ po kružnici $x^2 + z^2 = 1$, $y = 1$ z bodu $N = [0, 1, 1]$ do bodu $M = [1, 1, 0]$.

3. Vypočtěte polohu těžiště homogenního oblouku šroubovice ($x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) a oblouku šroubovice s hustotou $\varrho(x, y, z) = z^2(x + y)^2$.

4. Asteroida je dána parametrizací $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Zakreslete přibližný obrázek a vypočtěte její délku (pozn. integrovat se bude v mezích od nuly do $\frac{\pi}{2}$ - proč?).

5. Vypočtěte délku křivky $y = \ln x$ mezi hodnotami $x_1 = \sqrt{3}$ a $x_2 = \sqrt{8}$.

Domácí úkol

10. Vypočtěte hmotnosti, resp. polohy těžiště resp. momenty setrvačnosti kolem několika různých os pro následující křivky v případě, že
a) jsou homogenní.
b) nejsou homeogenní, nekonstantní lineární hustotu si zvolte sami.

- Kardioida: $x = a\cos\varphi$, $y = a(\varphi + \sin\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$,
- Archimedova spirála: $r = a \cdot \varphi$ v polárních souřadnicích,
- Logaritmická spirála: $r = e^{k\varphi}$ v polárních souřadnicích,
- Kružnice: $r = R$ v polárních souřadnicích, $\varphi \in [0, 2\pi]$,
- Cykloida: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$,
- Asteroida: $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$,
- Lemniscata: $x = r\sin^3 t$, $y = r\sin t\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.
- A další křivky, ještě jich je spousta.

Křivky nakreslete. Z tohoto úkolu si vyberte pouze něco, celkem asi pět integrálů. Některá z křivek se možná objeví na písemce :-).

11. Kombinatorika a pravděpodobnost

1. Pánové Bose a Fermi si každý na svoji farmu pořídili n prasátek. Každý z nich pro svá prasátka postavil k chlívků.

a) Určete, kolika různými způsoby může do svých chlívků umístit prasátka pan Bose, jestliže jeho chlívky jsou dostatečně velké (do každého se vejde libovolný počet prasátek). Boseho prasátka jsou nerozlišitelná.

b) Pan Fermi si nechal poradit od pana Pauliho a postavil chlívky tak malé, že se do každého vejde pouze jedno prasátko. Určete, kolika různými způsoby může prasátka rozmístit do chlívků pan Fermi, jestliže $k \geq n$. Fermiho prasátka jsou také nerozlišitelná.

2. Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu šesti kostkami padne

a) na každé kostce jiné číslo,

b) samé jedničky,

c) alespoň tři dvojky,

d) právě tři dvojky,

e) všechna čísla stejná,

f) všechna čísla lichá,

g) součet n, $n = 6, \ldots, 36$ (k odevzdání není nutné počítat všechny případy).

3. Čtyři osoby si v šatně odložily kabát. Šatnářka při odchodu rozdala kabáty náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že

a) všechny osoby budou mít svůj kabát,

b) žádná z osob nebude mít svůj kabát,

c) alespoň jedna osoba bude mít svůj kabát,

d) právě jedna osoba bude mít svůj kabát.

4. Dokažte následující kombinatorické identity:

a)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

c)

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r},$$

d)

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \qquad n > 0; k \geq 0.$$

5. Klíčivost semen je ϑ (pravděpodobnost, že semínko vyklíčí), zasadíme-li n semen, jaká je pravděpodobnost, že

a) vyklíčí alespoň jedno semeno?

b) vyklíčí alespoň k semen?

c) vyklíčí právě k semen?

Domácí úkol

11. Každý ze dvou parníků může doplout do přístavu vždy jen jednou za den, v kterýkoli okamžik nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu, druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden bude muset čekat, až druhý opustí přístaviště?