11. Kombinatorika a pravděpodobnost

1. Pánové Bose a Fermi si každý na svoji farmu pořídili n prasátek. Každý z nich pro svá prasátka postavil k chlívků.

   a) Určete, kolika různými způsoby může do svých chlívků umístit prasátka pan Bose, jestliže jeho chlívky jsou dostatečně velké (do každého se vejde libovolný počet prasátek). Boseho prasátka jsou nerozlišitelná.

   b) Pan Fermi si nechal poradit od pana Pauliho a postavil chlívky tak malé, že se do každého vejde pouze jedno prasátko. Určete, kolika různými způsoby může prasátka rozmístit do chlívků pan Fermi, jestliže $k \geq n$. Fermiho prasátka jsou také nerozlišitelná.

2. Jaká je pravděpodobnost, že při současném hodu šesti kostkami padne

   a) na každé kostce jiné číslo,

   b) samé jedničky,

   c) alespoň tři dvojky,

   d) právě tři dvojky,

   e) všechna čísla stejná,

   f) všechna čísla lichá,

   g) součet n, $n = 6, \ldots, 36$ (k odevzdání není nutné počítat všechny případy).

3. Čtyři osoby si v šatně odložily kabát. Šatnářka při odchodu rozdala kabáty náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že

   a) všechny osoby budou mít svůj kabát,

   b) žádná z osob nebude mít svůj kabát,

   c) alespoň jedna osoba bude mít svůj kabát,

   d) právě jedna osoba bude mít svůj kabát.

4. Dokažte následující kombinatorické identity:

a)
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

b)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

c)
$$\sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r},$$

d)
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad n > 0; k \geq 0.$$

5. Klíčivost semen je ϑ (pravděpodobnost, že semínko vyklíčí), zasadíme-li n semen, jaká je pravděpodobnost, že

a) vyklíčí alespoň jedno semeno?

b) vyklíčí alespoň k semen?

c) vyklíčí právě k semen?

Domácí úkol

11. Každý ze dvou parníků může doplout do přístavu vždy jen jednou za den, v kterýkoli okamžik nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu, druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden bude muset čekat, až druhý opustí přístaviště?