Požadavky ke zkoušce

Zkouška z předmětu MATEMATIKA 1 má dvě části

- **Písemná část:** Písemná část se ještě dále rozděluje na *praktickou část — písemku* a *teoretickou část — test*. Písemka trvá 90 minut a je v ní obsaženo pět příkladů větší obtížnosti. Test trvá 60 minut, obsahuje deset jednodušších otázek, zaměřených na znalosti základních pojmů a metod.

  Při písemné části není dovoleno používat literaturu, je však povoleno použít tahák vlastní výroby do velikosti formátu A4. (Použití lupy a mikroskopu není dovoleno.)

  Ukázkový test a písemka jsou uvedeny jako součást tohoto dokumentu. Skutečné testy a písemky u jednotlivých termínů budou nižší (maximálně stejné) obtížnosti. Všechny vaše připomínky k ukázkovému testu i písemce jsou vítány.

  Bodování: Testové příklady jsou hodnoceny jedním bodem, písemkové dvěma body. Test i písemka jsou (zvlášť) ohodnoceny známkou takto:
  9-10 bodů ... A
  8-9 bodů ... B
  7-8 bodů ... C
  6-7 bodů ... D
  5-6 bodů ... E
  0-5 bodů ... F.

- **Ústní část:** Doba trvání ústní části závisí na tom, kolik máte vědomostí a jak rychle jste schopni je ze sebe vypravit :-). Při ústní zkoušce se především diskutují chyby, kterých jste se dopustili v písemné části. Navíc si každý student tahá jednu otázku z množiny otázek uvedených níže (na vlastní žádost je možné si k první otázce vytáhnout ještě druhou). Příprava na ústní část je přibližně patnáct minut (bez literatury a bez taháku).

  Známka: Na výsledné známce se podílí dílčí známky z testu, písemky i ústní části, přičemž student, který má nedostatky ve znalostech středoškolské matematiky je automaticky hodnocen známkou F.

Ukázková písemka

PÍSEMKA I:

1. Řešte soustavu rovnic s parametrem a, uveďte, pro jaké hodnoty parametru a má soustava právě jedno řešení (a toto řešení nalezněte) resp. pro jaké hodnoty a nemá soustava žádné řešení resp. pro jaké hodnoty a má soustava nekonečně mnoho řešení (tato řešení zapište pomocí parametru(ů)).

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

---

2. Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{3x^2}{x-1}$.

---

3. Těleso vznikne rotací grafu $f(x) = \cos x$ kolem osy x, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Vypočtěte jeho objem. Vypočtěte polohu těžiště za předpokladu, že hustota tělesa je $\varrho(x) = 1$.

---

4. Vypočtěte délku křivky $y = \mathrm{coshx} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, ohraničenou přímkami $x = 0$ a $x = a$ a zapište integrál pro moment setrvačnosti této křivky kolem osy z v případě, že lineární hustota je $\mu(x, y) = 1$.

---

5. Při střelbě na terč je možné získat $0, \ldots, 5$ bodů. Střelec, který učinil sto pokusů získal i bodů v N_i z těchto pokusů, kde $N_0 = 5$, $N_1 = 25$, $N_2 = 25$, $N_3 = 25$, $N_4 = 10$, $N_5 = 10$. Definujme diskrétní náhodnou veličinu X jako počet bodů získaných při jednom výstřelu. Určete:

a) Rozdělení náhodné veličiny X.

b) Pravděpodobnosti P_i, že střelec při jednom výstřelu získá nejvýše i bodů.

c) Střední hodnotu veličiny X.

d) Střední kvadratickou odchylku.

e) Pravděpodobnost, že počet bodů získaných při jednom výstřelu bude v intervalu $[1,3]$.

ŘEŠENÍ:
1.
Pro $a=-2$ soustava nemá řešení.
Pro $a=1$ má soustava nekonečně mnoho řešení: $x=1+t+s$, $y=-t$, $z=-s$, kde t,s jsou libovolná reálná čísla.
V ostatních případech má soustava právě jedno řešení: $x=-\frac{a+1}{a+2}$, $y=\frac{1}{a+2}$, $z=\frac{(a+1)^2}{a+2}$.
3. $V=\frac{\pi^2}{4}$, $T=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi},0,0)\ldots$snad :-).
4. $L=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^a-\frac{1}{\mathrm{e}^a})$, $J_z=\int\limits_0^a(\cosh^2 t+t^2)\cdot\sqrt{1+\sinh^2 t}\mathrm{d}t=$
$=\int\limits_0^a(\cosh^2 t+t^2)\cdot\cosh t\mathrm{d}t$.
5. a) $\{[0,0.05],[1,0.25],[2,0.25],[3,0.25],[4,0.1],[5,0.1]\}$. b) $P_0=0.05, P_1=0.3, P_2=0.55, P_3=0.80, P_4=0.90, P_5=1$. c) 2.4. d)1.84 e)0.75.

Ukázkový test

TEST I.

1. Rozhodněte o vzájemné poloze přímek v $\mathbf{R}^3$ zadaných takto:

$$p: x+y=2,\ x-z=-1$$

$$q: x=-1-t,\ y=1+2t,\ z=-t$$

---

2. Rozhodněte, zda následující matice je regulární. Zdůvodněte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

3. Vektor $\vec{a}$ má v bázi $B_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ složky $a^1 = 1$, $a^2 = -1$, v bázi $B_2 = (\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,')$ složky $a^1\,' = 1$, $a^2\,' = 1$, vektor $\vec{e}_2\,'$ má v bázi B_1 složky $(1, 1)$. Určete matice přechodu mezi bázemi a zapište transformaci složek vektoru z jedné báze do druhé pomocí maticového násobení.

---

4. Doplňte následující systém vektorů na ortogonální bázi $\mathbf{R}^3$ a vektory normujte.

$$\vec{a} = (1, 0, 1), \quad \vec{b} = (1, 1, -1)$$

---

5. Určete definiční obor funkce $y = |\mathrm{tg}(x)| \cdot \frac{\ln(x^2)}{x}$ a rozhodněte o lichosti (resp. sudosti) funkce.

---

6. Vypočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{\sin^2 x}{x^3}.$$

---

7. Rozkladem na parciální zlomky vypočtěte:

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1} \mathrm{d}x.$$

---

8. Metodou per partes vypočtěte:

$$\int (3x^2 + x + 1) \ln x \mathrm{d}x.$$

---

9. Ze skupiny 7 studentů a 4 studentek se má vybrat šestičlenná skupina, ve které budou alespoň 2 studentky. Kolika způsoby to lze provést?

---

10. Pravdě podobnost, že student A složí zkoušku z Matematiky 1 je p, pravděpodobnost, že student B složí zkoušku z Matematiky 1

je q. Jaká je pravděpodobnost, že zkoušku složí:
a) právě jeden ze studentů,
b) alespoň jeden ze studentů,
c) oba studenti,
d) žádný ze studentů.

ŘEŠENÍ:

1. Různoběžky, průsečík $P = [-3, 5, -2]$.
2. Matice není regulární, neboť má ve schodovitém tvaru nulový řádek.
3.
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$
$$(\alpha^{1'}, \alpha^{2'}) = (\alpha^1, \alpha^2) \cdot \mathbf{S}, \quad (\alpha^1, \alpha^2) = (\alpha^{1'}, \alpha^{2'}) \cdot \mathbf{T}$$
4.
$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), \pm(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}).$$
5. $D_f = \mathbf{R} - \{0, (2k+1)\frac{\pi}{2}\}, k \in \mathbf{Z}$, funkce je lichá.
6. 0 a $-\infty$.
7. $\frac{x^2}{2} + \ln\sqrt{|x^2-1|} + C$.
8. $(x^3 + \frac{x^2}{2} + x)\ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} - x + C$.
9. 371.
10. a) $p(1-q) + q(1-p)$ b) $p + q - p \cdot q$ c) $p \cdot q$ d) $1 - p - q + p \cdot q$.

Otázky k ústní zkoušce

LINEARITA

- příklady lineárních vztahů
- přímka a rovina v $\mathbf{R}^3$ (parametrické a obecné vyjádření)
- vzájemná poloha rovin v $\mathbf{R}^3$
- vzájemná poloha přímek v $\mathbf{R}^3$
- Frobeniova věta

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

- soustava lineárních rovnic, matice soustavy a rozšířená matice soustavy

– ekvivalentní úpravy a Gaussova eliminační metoda
– Frobeniova věta
– soustavy s nekonečně mnoha řešeními (volné neznámé)
– vzájemná poloha rovin a přímek
– příklady

ČÍSELNÉ OBORY

– přirozená čísla (princip úplné indukce)
– celá čísla
– racionální a iracionální čísla
– reálná čísla a operace s reálnými čísly, vlastnosti
– komplexní čísla

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

– komplexní čísla v algebraickém tvaru
– komplexní čísla v goniometrickém tvaru
– operace s komplexními čísly, vlastnosti
– exponenciální tvar komplexního čísla
– Moivrova věta
– příklady

MATICE

- co je to matice, typ matice
- matice se speciálním tvarem (diagonální, trojúhelníková ...)
- operace s maticemi, vlastnosti
- hodnost matice
- čtvercové matice (determinant, regulárnost)
- metody výpočtu inverzní matice
- příklady

VEKTORY

- co je to vektor
- lineární závislost a nezávislost vektorů
- operace s vektory, vlastnosti
- vektorový prostor $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{C}^n$
- báze a dimenze
- přechod mezi bázemi
- příklady

SKALÁRNÍ A VEKTOROVÝ SOUČIN V $\mathbf{R}^3$

- skalární součin, norma (velikost) vektoru, odchylka vektorů
- ortogonalita, ortonormalita
- vlastnosti skalárního součinu
- vektorový součin, vlastnosti
- smíšený součin, vlastnosti
- ortonormální báze a matice přechodu mezi ortonormálními bázemi
- příklady

FUNKCE

- co je to funkce (obecně), reálná funkce reálné promněnné
- způsoby zadání funkce
- definiční obor a obor hodnot funkce
- operace s funkcemi, vlastnosti
- inverzní funkce a její graf
- příklady

VLASTNOSTI FUNKCÍ

- co je to rálná funkce reálné promněnné
- funkce sudá, lichá, periodická
- funkce rostoucí, klesající, ...
- prostá funkce
- kdy k dané funkci existuje inverzní
- příklady

LIMITA FUNKCE

- definice limity, limita zprava a zleva
- nevlastní limita a limita v nevlastním bodě
- limita a spojitost
- vlastnosti limit (limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, limita složené funkce)
- věta o sevření
- l'Hospitalovo pravidlo
- příklady

SPOJITÉ FUNKCE

- limita
- spojitost zleva, spojitost zprava, spojitost
- vlastnosti spojitých funkcí
- příklady

POSLOUPNOSTI

- co je to posloupnost
- limita posloupnosti
- geometrická posloupnost
- aritmetická polsoupnost
- řada a její součet

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE

- polynom, rozklad polynomu v **R**, kořeny
- racionálně lomenná funkce (ryze lomenná a neryze lomenná, rozklad na praciální zlomky)
- goniometrické a cyklometrické funkce
- mocnina a logaritmus
- hyperbolické funkce
- příklady

DERIVACE

- definice derivace, derivace zprava a zleva
- geometrická interpretace derivace
- vlastnosti derivací (derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, derivace složené funkce)
- derivace elementárních funkcí
- spojitost a derivace
- příklady

PRŮBĚH FUNKCE

- první a druhá derivace funkce
- derivace a vlastnosti funkcí (stacionární body, extrémy, monotónnost, konvexnost, konkávnost a inflexní body)
- nevlastní derivace
- asymptoty se směrnicí a bez směrnice
- příklady

INTEGRÁL

- primitivní funkce
- základní integrační metody
- určitý a neurčitý integrál
- geometrický význam
- příklady

APLIKACE INTEGRÁLU

- plocha pod grafem funkce
- těžiště a momenty setrvačnosti plochy
- geometrické charakteristiky rotačních těles
- křivkový integrál
- geometrické charakteristiky rotačních povrchů
- příklady

KOMBINATORIKA A PRAVDĚPODOBNOST

- základní kombinatorické pojmy (variace, kombinace, permutace)
- kombinatorické identity (Pascalův trojúhelník)
- definice pravděpodobnosti
- jevy nezávislé a vylučující se
- podmíněná pravděpodobnost
- binomická pravděpodobnost

PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA

- pravděpodobnost
- náhodná veličina s diskrétním a spojitým rozložením
- funkce hustoty pravděpodobnosti
- střední hodnota, střední kvadratická odchylka, ...
- příklady