3. Křivočaré souřadnice I + ještě něco o lineárních zobrazeních

Pojmy k opakování: Kartézská soustava souřadnic, souřadnicové přímky a roviny.
Pojmy: Polární, válcové, kulové, sférické a jiné křivočaré souřadnice.

1. Nechť $\varphi : \mathcal{V}_n \to \mathcal{W}_n$ je lineární transformace. Dokažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:
a) φ je regulární,
b) $\varphi(\mathcal{V}_n) = \mathcal{W}_n$,
c) $\mathrm{d}(\varphi) = 0$,
d) existuje inverzní lineární zobrazení.
Návod: Využijte skutečnosti, že obrazy vektorů báze generují $Im(\varphi)$ a vztahu $h(\varphi) + d(\varphi) = n$.

2. Nechť $P_{n+1}(x)$ je vektorový prostor všech polynomů jedné proměnné st$f \leq n$ s reálnými koeficienty. Definujme zobrazení $\varphi : P_{n+1}(x) \to P_{n+1}(x)$ takto (f' značí derivaci):

$$P_{n+1}(x) \ni f(x) \to \varphi(f(x)) = f'(x) \in P_{n+1}(x).$$

a) dokažte, že φ je lineární transformace,
b) určete její jádro a image, hodnost a defekt,

c) je tato transformace regulární? Proč?
d) Zapište matici této transformace v bázi $(1, x, \ldots, x^n)$ resp. v bázi $(1, x, \frac{1}{2}x^2, \ldots, \frac{1}{n}x^n)$ a přesvědčte se o platnosti transformačního vztahu pro tuto matici.

3a. Bod $P \in \mathbf{R}^2$ je zadán svými kartézskými souřadnicemi. Určete jeho souřadnice polární, složky vektorů $\vec{f}_\rho, \vec{f}_\varphi$ vzhledem k bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ a vyjádřete polární plošný element v bodě P.

- $P = [x_P \ y_P] = [4 \ \ 3]$,
- $P = [x_P \ y_P] = [5 \ \ -12]$.

3b. Určete kartézské souřadnice bodu $P \in \mathbf{R}^2$ na základě uvedených údajů.

- $P = [\rho_P, \varphi_P] = \left[8 \ \ \frac{7\pi}{6}\right]$,
- $P = [\rho_P, \varphi_P] = \left[13 \ \ \frac{5\pi}{3}\right]$,
- $\varphi_P = \frac{11}{6}\pi$, $\quad \Delta S_P \approx 4,5 \Delta\rho\Delta\varphi$.

4. Zapište kartézské rovnice souřadnicových křivek C_ρ a C_φ určujících bod P v polárních souřadnicích pro každý z bodů P v úlohách (1a) a (1b).

5a. Zapište kartézské rovnice souřadnicových ploch $\mathrm{S}_\rho, \mathrm{S}_\varphi, \mathrm{S}_z$ určujících body P_1, P_2, P_3 ve válcových souřadnicích, konkrétní polohy bodů zvolte sami.

5b. Napište kartézské rovnice souřadnicových křivek $\mathrm{C}_\rho, \mathrm{C}_\varphi, \mathrm{C}_z$ bodů P z úlohy (5a).

Domácí úkol

IIIa. Zapište polární i kartézskou rovnici elipsy, pro niž $a = 5\text{cm}$, $\epsilon = 0,8$ a jejíž pravé ohnisko F leží v počátku soustavy souřadnic. Osy elipsy jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic.

IIIb. Odvoďte polární rovnici paraboly, jejíž ohnisko F leží v počátku soustavy souřadnic a jejíž osa splývá s osou x. Zapište i její kartézskou rovnici.