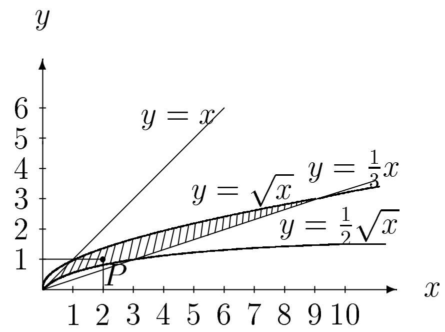
4. Křivočaré souřadnice II.

Pojmy: Transformace souřadnic, parciální derivace, Jacobiho matice, Jacobián, elementární plocha a objem.

1. Je zadána funkce $M \to \mathbf{R}^3$, $M \subset \mathbf{R}^2$, určete její Jacobiho matici, pokuste se o geometrickou interpretaci řádků matice:

- $(f^1(u,v), f^2(u,v), f^3(u,v)) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$,
- $(f^1(u,v), f^2(u,v), f^3(u,v)) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$.

2. V následujících případech jsou zadanými křivkami vymezeny oblasti v $\mathbf{R}^2$, v nichž může ležet bod P. Popište bod $P \in \mathbf{R}^2$ dvojicí vhodně zvolených křivočarých souřadnic, zapište množinu M (definiční obor) křivočarých souřadnic, najděte transformační vztahy mezi kartézskými souřadnicemi $[x,y]$ a křivočarými souřadnicemi $[u,v]$, určete souřadnicové křivky, jejich tečné vektory v bodě P, obecný tvar Jacobiho matice a hodnotu jakobiánu v bodě P.



Obecně a pak pro konkrétní bod $P = [x_P, y_P] = [2,1]$.

3. Zobecněné polární souřadnice v $\mathbf{R}^2$, $[\rho, \varphi]$, jsou definovány vztahy $x = a\rho \cos\varphi$, $y = b\rho \sin\varphi$, a, b jsou kladné konstanty, $\rho \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Určete ρ a φ jako funkce x, y. Zapište souřadnicové křivky (parametrické i kartézské rovnice), Jacobiho matici a jakobián.

4. Zobecněné kulové souřadnice v $\mathbf{R}^3$ r, φ, ϑ jsou definovány vztahy $x = ar \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = br \sin\varphi \sin\vartheta$, $z = cr \cos\vartheta$

a, b, c jsou kladné konstanty, $r \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi), \vartheta \in [0, \pi]$. Určete r, φ a ϑ jako funkce x, y, z. Zapište souřadnicové křivky (parametrické rovnice) a souřadnicové plochy (kartézské rovnice), Jacobiho matici a jakobián.

5. Rovinný útvar M v rovině xy je omezen křivkami $y = 4x^3$, $y = 8x^3$, $y = x^{-2}$, $y = 6x^{-2}$ a má plošnou hustotu $\sigma(x, y) = kx^{-1}$, $k > 0$ je konstanta. Vypočtěte jeho hmotnost užitím věty o transformaci integrálu. Návod: zvolte vhodné křivočaré souřadnice $[u, v]$, určete Jacobiho matici a jakobián, $M = \int \sigma(u, v) \cdot J(u, v) \mathrm{d}u\mathrm{d}v$, jaké budou meze integrálu? Správnost výsledku si můžete ověřit výpočtem v kartézských souřadnicích.

Domácí úkol

IV. Plocha v $\mathbf{R}^3$ má kartézskou rovnici $\frac{(x^2+y^2)}{R^2} = \frac{z^2}{h^2}$, najděte vhodné zobrazení $f : M \to \mathbf{R}^3$, kde $M \subset R^2$, které určuje tuto plochu, a spočtěte jeho Jacobiho matici.