Požadavky ke zkoušce

Zkouška z předmětu MATEMATIKA 2 má dvě části

- **Písemná část:** Písemná část se ještě dále rozděluje na *praktickou část — písemku* a *teoretickou část — test*. Písemka trvá 90 minut a je v ní obsaženo pět příkladů větší obtížnosti. Test trvá 60 minut, obsahuje deset jednodušších otázek, zaměřených na znalosti základních pojmů a metod.

  Při písemné části není dovoleno používat literaturu, je však povoleno použít tahák vlastní výroby do velikosti formátu A4. (Použití lupy a mikroskopu není dovoleno.)

  Ukázkový test a písemka jsou uvedeny jako součást tohoto dokumentu. Skutečné testy a písemky u jednotlivých termínů budou nižší (maximálně stejné) obtížnosti. Všechny vaše připomínky k ukázkovému testu i písemce jsou vítány.

  Bodování: Testové příklady jsou hodnoceny jedním bodem, písemkové dvěma body. Test i písemka jsou (zvlášť) ohodnoceny známkou takto:
  9-10 bodů ... A
  8-9 bodů ... B
  7-8 bodů ... C
  6-7 bodů ... D
  5-6 bodů ... E
  0-5 bodů ... F.

- **Ústní část:** Doba trvání ústní části závisí na tom, kolik máte vědomostí a jak rychle jste schopni je ze sebe vypravit :-). Při ústní zkoušce se především diskutují chyby, kterých jste se dopustili v písemné části. Navíc si každý student tahá jednu otázku z množiny otázek uvedených níže (na vlastní žádost je možné si k první otázce vytáhnout ještě druhou). Příprava na ústní část je přibližně patnáct minut (bez literatury a bez taháku).

  Známka: Na výsledné známce se podílí dílčí známky z testu, písemky i ústní části, přičemž student, který má nedostatky ve znalostech středoškolské matematiky nebo neovládá základní pojmy předmětu MATEMATIKA 1 je automaticky hodnocen známkou F.

Ukázková písemka

PÍSEMKA I:

Ukázkový test

TEST I.

1. Základní algebraické struktury
Je dána čtyřprvková množina $M := \{\heartsuit, \bigcirc, \triangle\}$. Definujte na této množině operaci $+$ tak, aby

a) $(M, +)$ byla grupou.

b) $(M, +)$ nebyla grupou.

Zdůvodněte.

2. Vektorové prostory a podprostory

a) Uveďte příklad dvou disjunktních vektorových podprostorů v $\mathbf{R}^3$.

b) Uveďte příklad tří netriviálních podprostorů v $P_3[x]$ takových, že jejich přímý součet je celý prostor $P_3[x]$.

3. Skalární součin
V prostoru $P_2[x]$ je skalární součin definován vztahem

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2),$$

dokažte, že se jedná o skalární součin.

4. Skalární součin
Určete matici skalárního součinu z předchozího příkladu v bázi $B = \{1, x, x^2\}$.

5. Projekce a ortogonální doplněk
Určete ortogonální doplněk $L_\perp$ k podprostoru

$$L = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ všech čtvercových matic řádu dva nad $\mathbf{R}$, se skalárním součinem definovaným $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$.

6. Projekce a ortogonální doplněk
Určete ortogonální projekci vektoru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

do podprostoru L resp. do $L_\perp$ z předchozího příkladu.

7. Lineární zobrazení
Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ je dáno předpisem

$$f(x, y, z, w) = (x + y, x - y, x).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a image.

8. Křivočaré souřadnice
Je dána transformace souřadnic $f : [0, 2\pi) \times (0, \infty) \ni (\varphi, \varrho) \to (x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \\ y &= b\varrho \cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $\varrho = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$

9. Vlastní hodnoy a vlastní vektory
Lineární zobrazení $f : P_2[x] \to P_2[x]$ je dáno vztahem

$$f(ax^2 + bx + c) = (ax + b).$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Vektorová analýza
Určete gradient skalární funkce $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2) \cdot z$ a spočtěte divergenci a rotaci tohoto gradientu.

ŘEŠENÍ:
1a. Můžeme například definovat $\bigcirc + \heartsuit = \heartsuit + \bigcirc = \heartsuit$, $\bigcirc + \triangle = \triangle + \bigcirc = \triangle$, $\bigcirc + \bigcirc = \bigcirc$, $\triangle + \heartsuit = \heartsuit + \triangle = \bigcirc$, $\heartsuit + \heartsuit = \triangle$ a $\triangle + \triangle = \heartsuit$.

Axiomy grupy jsou zjevně splněny: operace je uzavřená, asociativita (rozepsáním), neutrálním prvkem je $\bigcirc$, ke každému prvku existuje inverzní — $\heartsuit$ a $\triangle$ jsou navzájem inverzní prvky.
1b. Například operace definovaná takto $\bigcirc + \heartsuit = \bigcirc$, $\heartsuit + \heartsuit = \bigcirc$, $\heartsuit + \bigcirc = \heartsuit$, doplněná čímkoli dalším už zjevně nesplňuje například asociativitu $(\heartsuit + \heartsuit) + \heartsuit \neq \heartsuit + (\heartsuit + \heartsuit)$.

2a. Takové dva podprostory neexistují, neboť každý podprostor musí obsahovat nulový vektor, ten tedy bude v průniku libovolných dvou podprostorů.
2b. Např. $V_1 = [1]$, $V_2 = [x]$, $V_3 = [x^2, x^3]$.

3. Prověřením axiomů skalárního součinu.

4.
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

5.
$$L_\perp = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

6.
$$A_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\perp = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$\mathrm{Ker} f = [(0,0,0,1),(0,0,1,0)]$, $\mathrm{Im} f = [(1,1,1),(1,-1,0)]$.

8. Souřadnicové křivky jsou elipsy se středem v počátku a poměrem poloos a/b a přímky procházející počátkem. Inverzní transformace je dána
$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \\ \varphi &= \mathrm{arctg} \frac{xb}{ya} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

9. Zobrazení má jedinou vlastní hodnotu $\lambda = 0$, vlastními vektory jsou všechny vektory z jádra zobrazení $\mathrm{Ker} f = [1]$.

10. $\mathbf{grad}\varphi = (2xz, 2yz, x^2+y^2)$, $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\varphi) = \vec{o}$, $\mathbf{div}(\mathbf{grad})\varphi = 4z$.

Otázky k ústní zkoušce

ZÁKLADNÍ ALGEBRAICKÉ STRUKTURY

- grupa
- okruh
- těleso a pole
- vektorový prostor
- příklady

VEKTOROVÉ PROSTORY A PODPROSTORY

- definice vektorového prostoru
- definice vektorového podprostoru
- lineární závislost a nezávislost, báze, dimenze, lineární obal
- průnik a součet podprostorů, přímý součet
- doplňek k podprostoru
- rozklad vektoru do dvou podprostorů, diskuze jednoznačnosti tohoto rozkladu
- příklady

SKALÁRNÍ SOUČIN

- definice skalárního součinu
- reprezentace skalárního součinu v bázích, matice skalárního součinu a její vlastnosti, transformační vztah
- norma vektoru, odchylka dvou vektorů
- vlastnosti skalárního součinu a normy
- ortogonalita vektorů, ortogonalizační proces
- ortogonální doplněk k podprostoru
- příklady

ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE

- skalární součin a ortogonálnost vektorů
- ortogonální doplněk k podprostoru
- ortogonální projekce a komponenta vektoru
- matice projekce, k čemu slouží a jak ji spočteme
- příklady

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

- definice lineárního zobrazení
- reprezentace lineárního zobrazení v bázích, transformační vztah
- jádro a obraz lineárního zobrazení, hodnost a defekt
- součet dvou lineárních zobrazení, skalární násobek lineárního zobrazení a skládání dvou lineárních zobrazení
- příklady

LINEÁRNÍCH TRANSFORMACE A VLASTNÍ VEKTORY

- definice vlastního vektoru a vlastní hodnoty
- jak určíme vlastní hodnoty a vlastní vektory
- diskuse diagonální reprezentace lineární transformace
- příklady

LINEÁRNÍ TRANSFORMACE V PROSTORECH SE SKALÁRNÍM SOUČINEM

- samoadjungovaná a symetrická lineární transformace
- vlastnosti samoadjungované a symetrické lineární transformace
- ortogonální lineární transformace
- vlastnosti ortogonální lineární transformace
- příklady

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

- co je to diferenciální rovnice, řešení, úplné řešení, integrální křivka
- rovnice se separovatelnými proměnnými, řešení
- rovnice převoditelné na rovnici se separovatelnými proměnnými, řešení
- lineární rovnice prvního řádu a její řešení
- exaktní rovnice, řešení
- příklady

SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU A LINEÁRNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

- co je to soustava lineárních rovnic prvního řádu
- řešení soustavy, princip superpozice
- lineární rovnice druhého řádu
- řešení rovnice druhého řádu, princip superpozice
- příklady

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

- co je to funkce více proměnných
- definiční obor, graf funkce, vrstevnice
- limita a spojitost funkce více proměnných
- parciální derivace a derivace ve směru
- gradient a úplný diferenciál funkce více proměnných
- příklady

VEKTOROVÁ ANALÝZA

- skalární a vektorové funkce
- operace gradient, divergence a rotace, Laplaceův operátor
- některé identity vektorové analýzy
- geometrická interpretace
- příklady

KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE

- kartézské souřadnice
- polární a cylindrické souřadnice
- sférické souřadnice
- souřadnicové roviny a přímky, element objemu (resp. plochy)
- transformace souřadnic, Jacobiho matice a jacobián
- příklady