Přírodovědecká fakulta
Masarykovy univerzity v Brně,
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Disertační práce

Diferenciální invarianty z vnoření variet s metrickými poli

Pavla Musilová

3. října 2002

Poděkování

Děkuji prof. RNDr. Demeteru Krupkovi, DrSc. za vedení práce, děkuji prof. RNDr. Michalu Lencovi PhD., vedoucímu Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky, za podporu ve studiu a především děkuji své mamince Janě Musilové za konzultace, motivaci i psychickou podporu, jakož i všem ostatním babičkám za trpělivé hlídání mých dětí.

Obsah

Úvod

Práce je věnována teorii přirozených Lagrangeových struktur na fibrovaných prostorech, asociovaných s jety vnoření variet s metrickými poli. Používáme základní pojmy z diferenciální geometrie a teorie kategorií, které mohou být nalezeny například v [5], [6], [7] a [15]. Práce je členěna do tří kapitol.

V kapitole 1 uvádíme v souhrnu definice základních pojmů obecného charakteru a věty, které budou využity v důkazech hlavních výsledků práce. Obsáhlejší důkazy převzatých tvrzení nereprodukujeme, pouze komentujeme jejich základní myšlenky s odkazy na monografickou literaturu. Dále je zde popsána faktorizační metoda, kterou aplikujeme na výpočet báze invariantů. Metoda byla použita m.j. také v práci [12], některé dílčí výpočty, které používáme při určování diferenciálních invariantů v částech týkajících se metrických polí souhlasí s výsledky této práce. V této kapitole čerpáme především z [7].

Těžiště práce je v kapitole 2, kde v úvodní části konkretizujeme základní struktury, se kterými budeme pracovat a pojem diferenciálního invariantu z vnoření variet s metrickými poli.

V odstavci A je nalezena báze invariantů prvního řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě, v odstavci B báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $L^2_n \times L^2_m$-varietě a báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě. V odstavci C se pak zabýváme invarianty obecného řádu a odvodíme rekurentní vztah pro jejich výpočet. Využíváme výsledků [13], kde jsou nalezeny invarianty obecného řádu z metrického tenzoru. Výsledky obsažené v těchto třech odstavcích jsou původní a nezávisí na signatuře příslušných metrik. Tyto nové výsledky jsou interpretovány z geometrického hlediska.

Bázi diferenciálních invariantů lze použít ke konstrukci invariantních lagrangiánů. Touto problematikou se zabýváme v kapitole 3, kde uvádíme do souvislosti pojem přirozené Lagrangeovy struktury a diferenciálního invariantu. V analogii s [7] a [8] definujeme přirozenou Lagrangeovu strukturu z vnoření variet s metrikou a dokazujeme, že tyto přirozené Lagrangeovy struktury jsou v bijektivní korespondenci s diferenciálními invarianty z vnoření variet s metrikou.

Problém nalezení všech invariantních lagrangiánů r-tého řádu z metrických polí na libovolné n-rozměrné varietě $\mathcal{X}$, m-rozměrné varietě $\mathcal{Y}$, $n \leq m$, a z vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je tedy formulován jako problém nalezení všech diferenciálních invariantů r-tého řádu z jisté levé $(L_n^{r+1} \times L_m^{r+1})$-variety do $(L_n^1 \times L_m^1)$-variety.

Krátce se také zmiňujeme o lagrangiánu energie, definovaném pro vnoření Riemannových variet, a harmonických zobrazeních. Více o této problematice viz např. [5].

Konstrukce Lagrangiánů z báze invariantů spadá do problematiky klasické teorie invariantů, která je řešena např. v [3], [10] nebo [14]. V souladu s těmito texty jsou některé věty a postupy klasické teorie invariantů zobecněny pro náš případ hledání ekvivariantních zobrazení z variety s tenzorovou akcí grupy $L_n^1 \times L_m^1$. Je formulováno tvrzení o konstrukci všech algebraických invariantů z báze invariantů nalezené v kapitole 2.

Invariantní lagrangiány z vnoření variet s metrickými poli jsou používány ve fyzikálních teoriích, zejména v rychle se rozvíjející teorii strun. Problém nalezení lagrangiánů pro strunovou teorii není dodnes uspokojivě vyřešen. Více o této problematice lze získat například v článku [4] nebo ve zdrojích [11] a [1].

Naše práce neobsahuje výčet všech funkcionálně nezávislých invariantních lagrangiánů, dává však přímý návod na jejich konstrukci. Věříme, že výsledky této práce najdou své uplatnění ve fyzikálních teoriích.

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole shrnujeme definice a vlastnosti následujících obecných pojmů: Jet zobrazení, diferenciální grupa, levá (resp. pravá) G-varieta, pravý hlavní G-prostor, fibrovaný prostor r-bází na varietě, fibrovaný prostor s typovou vrstvou, diferenciální grupa L_n^r, vnitřní semidirektní součin Lieových grup, ekvivariantní zobrazení dvou levých G-variet, izomorfismus levých G-variet, tenzorová akce. Jsou zde také uvedena některá tvrzení týkající se těchto pojmů, jichž bude v dalších kapitolách využito. Pro účely práce formulujeme definici tenzorového součinu modulů nad obecně různými okruhy. Znalost základních pojmů z diferenciální geometrie (hladká varieta, vnoření, Lieova grupa …) a znalost základů teorie kategorií předpokládáme. Podrobný výklad problematiky související s těmito pojmy lze nalézt např. [6], [7] a [15].

1.1 Vnitřní semidirektní součin podgrup

Nechť H, K jsou podgrupy grupy G a nechť platí

1) K je normální podgrupa G,

2) $H \cap K = \{e\}$,

3) $K \cdot H = G$.

Pak G se nazývá *vnitřní semidirektní součin podgrup H a K* a píšeme $G = H \times_S K$.

Nechť $G = H \times_S K$. Pak každý prvek $g \in G$ má jednoznačný rozklad $g = \alpha(g) \cdot \beta(g)$ kde $\alpha(g) \in K, \beta(g) \in H$. Tento rozklad určuje zobrazení $\alpha :$

$G \to K$ a homomorfismus $\beta : G \to H$. Skutečnost, že β je homomorfismus, vyplývá z předpokladu, že K je normální podgrupa grupy G. Pro libovolné $g \in K$ je $\alpha(g) = g$, $\beta(g) = e$, pro libovolné $g \in H$ je $\alpha(g) = e$, $\beta(g) = g$. Předpokládejme, že grupa G působí zleva na množině Q, tj. je definováno zobrazení $\Phi : G \times Q \to Q$ splňující: $\Phi(g_1, \Phi(g_2, q)) = \Phi(g_1 \cdot g_2, q)$, $\Phi(e, q) = q$ pro každé $q \in Q$ a každé $g_1, g_2 \in G$. Dále píšeme $\Phi(g, q) = g \cdot q$. Pak grupa H působí zleva na množině Q/K vztahem

$$h \cdot [q]_K = [h \cdot q]_K, \tag{1.1}$$

kde označením $[q]_K$ rozumíme třídu prvku q, tj. $[q]_K = \{\overline{q} \in Q \mid \overline{q} = k \cdot q, k \in K\}$. Nechť Q, P jsou množiny, na nichž působí zleva grupa G. Zobrazení $F : Q \to P$ se nazývá *G-ekvivariantní*, platí-li $F(g \cdot q) = g \cdot F(q)$ pro libovolné $q \in Q$, $g \in G$. Platí následující teorém:

Věta 1.1 *Nechť grupa G tvaru $G = H \times_S K$ působí zleva na množině Q a grupa H působí zleva na množině P. Nechť $F : Q \to P$ je zobrazení s vlastností*

$$F(g \cdot q) = \beta(g) \cdot F(q) \tag{1.2}$$

pro každé $g \in G$ a každé $q \in Q$. Pak F má tvar

$$F = f \circ \pi,$$

kde $f : Q/K \to P$ je jednoznačně určené H-ekvivariantní zobrazení a $\pi : Q \to Q/K$ je kanonická projekce.

Důkaz: Podrobný důkaz tvrzení je uveden v [7]. Kromě toho je paralelní s důkazem následující věty 1.2.

♡

Poznámka: Názorně lze větu 1.1 interpretovat takto: Ke každému zobrazení $F : Q \to P$ spňujícímu vztah (1.2) existuje právě jedno H-ekvivariantní zobrazení $f : Q/K \to P$ takové, že následující diagram komutuje:

$$\begin{tikzcd} Q^{[G]} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & P^{[G/K]} \\ Q/K_{[G/K]} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Nechť Q je množina s levou akcí grupy G. Nechť $K \subset G$ je normální podgrupa grupy G. Uvažujme množinu G/K a zobrazení

$$G/K \times G/K \ni ([g_1]_K, [g_2]_K) \to [g_1]_K \cdot [g_2]_K = [g_1 \cdot g_2]_K \in G/K. \tag{1.3}$$

Vzhledem k tomu, že podgrupa K je normální, vztah (1.3) korektně definuje grupovou operaci na množině G/K. Množina G/K opatřená strukturou grupy danou vztahem (1.3) se nazývá *faktorová grupa.*

Na množině Q/K definujme působení faktorové grupy G/K následovně:

$$G/K \times Q/K \ni ([g]_K, [q]_K) \to [g]_K \cdot [q]_K = [g \cdot q]_K \in Q/K. \tag{1.4}$$

Ukážeme, že půsebení je korektně definováno, tj. nezávisí na volbě reprezentanta. Nechť $g' = k_1 \cdot g, q' = k_2 \cdot q$, $k_1, k_2 \in K$. Platí:

$$[g']_K \cdot [q']_K = [(k_1 \cdot g) \cdot (k_2 \cdot q)]_K = [(k_1 \cdot g \cdot k_2) \cdot q]_K =$$

$$= [(k_1 \cdot g \cdot k_2 \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot q)]_K = [(k_1 \cdot k_2') \cdot (g \cdot q)]_K = [g \cdot q]_K,$$

kde $k_2' = g \cdot k_2 \cdot g^{-1} \in K$, neboť podgrupa K je normální. Dále ukážeme, že se jedná o levou akci:

$$[g_1]_K \cdot ([g_2]_K \cdot [q]_K) = [g_1 \cdot g_2 \cdot q]_K = ([g_1]_K \cdot [g_2]_K) \cdot [q]_K.$$

Věta 1.2 *Nechť Q je množina s levou akcí grupy G, K je normální podgrupa grupy G a nechť P je libovolná množina s akcí grupy G/K. Pak ke každému zobrazení $F : Q \to P$ splňujícímu vztah*

$$F(g \cdot q) = \beta(g) \cdot F(q),$$

kde $\beta : G \to G/K$ je faktorová projekce, existuje právě jedno G/K-ekvivariantní zobrazení $f : Q/K \to P$ s vlastností $F = f \circ \pi$, kde $\pi : Q \to Q/K$ je faktorová projekce.

Důkaz: Nechť F je zobrazení splňující předpoklad věty. Definujme zobrazení $f : Q/K \to P$ vztahem

$$f([q]_K) = F(q).$$

Definice je korektní, neboť pro libovolné $k \in K$

$$f([k \cdot q]_K) = F(k \cdot q) = \beta(k) \cdot F(q) = e \cdot F(q) = f([q]_K).$$

Zobrazení je G/K-ekvivariantní neboť

$$f([g]_K \cdot [q]_K) = F(g \cdot q) = \beta(g) \cdot F(q) = [g]_K \cdot f([q]_K).$$

Předpokládejme, že $F = f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi$, pak pro libovolné $q \in Q$ platí $f_1 \circ \pi(q) = f_2 \circ \pi(q)$ a tedy $f_1 = f_2$ na Q/K.

♡

Poznámka: Věta 1.2 je zobecněním věty 1.1. Ve speciálním případě, kdy grupa G je vnitřním semidirektním součinem tvaru $G = H' \times_s K$, je grupa H' izomorfní s grupou G/K. Zobrazení $\kappa : G/K \ni [g]_K \to \beta'(g) \in H'$, kde $\beta' : G \to H'$ je zobrazení určené jednoznačným rozkladem prvků semidirektního součinu, je izomorfismus.

Předpokládejme, že G je Lieova grupa, H,K její Lieovy podgrupy takové, že platí $G = H \times_S K$. Je-li zobrazení $\beta \times \alpha : G \to G$ izomorfismem Lieových grup, nazýváme G *vnitřním semidirektním součinem Lieových podgrup H a K*.

1.2 Akce Lieových grup na varietách

Nechť G je Lieova grupa, $\mathcal{Q}$ je hladká varieta. Připomeňme, že *levou* resp. *pravou akcí grupy G na varietě $\mathcal{Q}$* budeme nazývat hladké zobrazení $\Phi : G \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ resp. $\Phi : \mathcal{Q} \times G \to \mathcal{Q}$ splňující pro všechna $p \in \mathcal{Q}$ a pro všechna $g, h \in G$ podmínky

1) $\Phi(e, p) = p$ resp. $\Phi(p, e) = p$,

2) $\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(g \cdot h, p)$ resp. $\Phi(\Phi(p, h), g) = \Phi(p, h \cdot g)$.

$\mathcal{Q}$ se pak nazývá *levá* resp. *pravá G-varieta*. Ekvivariantní difeomorfismus levých G-variet se nazývá *izomorfismus levých G-variet*. Levá akce (vlastnosti levé a pravé akce jsou analogické, budeme je tedy definovat pouze pro levou akci) se nazývá *volná*, jestliže $\Phi(g, p) = p$ implikuje $g = e$ pro každé $p \in \mathcal{Q}$. Levá akce se nazývá tranzitivní, jestliže pro libovolné $p_1, p_2 \in \mathcal{Q}$ existuje $g \in G$ tak, že $p_1 = \Phi(g, p_2)$. Dva prvky levé G-variety $p_1, p_2 \in \mathcal{Q}$ nazveme ekvivalentními a značíme $p_1 \sim p_2$, jestliže existuje $g \in G$ tak, že $p_2 = \Phi(g, p_1)$. Třídu $[p] = \{q \in \mathcal{Q} \mid q \sim p\}$ nazýváme *orbitou* akce grupy G na varietě $\mathcal{Q}$ a množinu všech orbit značíme $\mathcal{Q}/G$. Nechť $\mathcal{Q}$ je levá resp. pravá G-varieta, $m = \dim \mathcal{Q}$. Souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ na $\mathcal{Q}$ se nazývá *G-asociovaný*, jestliže existuje číslo n, $1 \leq n \leq m$, tak, že pro každé $p, q \in \mathcal{V}$ platí: $y^i(p) = y^i(q)\ \forall i = \{1, \ldots, n\}$ právě tehdy když $[p] = [q]$. Poznamenejme, že pro každé dva G-asociované souřadnicové systémy $(\mathcal{V}, \psi)$, $(\mathcal{V}', \psi')$ na libovolné souvislé komponentě variety $\mathcal{Q}$ platí $n = n'$. Množinu $\mathcal{W} \subset \mathcal{Q}$ nazveme *G-invariantní*, jestliže pro každé $g \in G$ a každé $w \in \mathcal{W}$ platí $\Phi(g, w) \in \mathcal{W}$ resp. $\Phi(w, g) \in \mathcal{W}$.

Věta 1.3 *Nechť $\mathcal{Q}$ je souvislá levá resp. pravá G-varieta, $\pi_0 : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}/G$ kanonická projekce na množinu orbit. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1) *Na množině $\mathcal{Q}/G$ existuje struktura hladké variety taková, že π_0 je submerze.*

2) *Množina $R = \{(p_1, p_2) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} | [p_1] = [p_2]\}$ je uzavřenou podvarietou $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$.*

3) *$\mathcal{Q}$ lze pokrýt G-asociovanými souřadnicovými systémy a pro každé $p, q \in \mathcal{Q}$ takové, že $[p] \neq [q]$, existují G-invariantní otevřené množiny $\mathcal{W}_p$, $\mathcal{W}_q$ tak, že $p \in \mathcal{W}_p$, $q \in \mathcal{W}_q$ a $\mathcal{W}_p \cap \mathcal{W}_q = \emptyset$.*

Důkaz: Předchozí tvrzení je standardně uváděno v literatuře. Jeho důkaz lze nalézt např. v [7].

♡

Jsou-li splněny ekvivalentní podmínky věty 1.3, je hladká struktura na $\mathcal{Q}/G$ splňující první podmínku určena jednoznačně. Množinu $\mathcal{Q}/G$ opatřenou touto hladkou strukturou nazýváme *varietou orbit (příslušnou levé* resp. *pravé G-varietě $\mathcal{Q}$).*

Pravým hlavním G-prostorem nad varietou $\mathcal{X}$ nazveme čtveřici $(\mathcal{P}, G, \pi, \mathcal{X})$, kde $\mathcal{P}$ je pravá G varieta s akcí $\Phi : \mathcal{P} \times G \to \mathcal{P}$, $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{X}$ je hladké zobrazení a platí:

1) akce G na $\mathcal{P}$ je volná,

2) $\pi(p_1) = \pi(p_2) \Leftrightarrow [p_1] = [p_2]$ pro libovolné $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$,

3) Rozvrstvení $\mathcal{P}$ nad $\mathcal{X}$ je lokálně triviální, tj. existuje otevřené pokrytí $\mathcal{U}_i, i \in I$, variety $\mathcal{X}$ a difeomorfismy $\psi_i : \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_i \times G$ tak, že následující diagramy komutují:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{U}_i \times G \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ \mathcal{U}_i & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathcal{U}_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{U}_i \times G \\ \downarrow \Phi_g & & \downarrow \mathrm{id}\times R_g \\ \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) & \xrightarrow{\psi_i} & \mathcal{U}_i \times G \end{array}$$

pr_1 je projekce na první faktor, $g \in G$ je libovolné, $\Phi_g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ je zobrazení definované vztahem $\Phi_g(p) = \Phi(p,g)\ \forall p \in \mathcal{P}$ a $R_g : G \ni h \to h \cdot g \in G$ je pravá translace grupy G.

Nechť $\mathcal{P}$ je pravý hlavní G-prostor nad $\mathcal{X}$, $\mathcal{Q}$ levá G-varieta. Vztah $(p,q)\cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot q)$ definuje na množině $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ strukturu pravé G-variety, která splňuje ekvivalentní podmínky věty 1.3. Množinu orbit této akce opatřenou strukturou orbitvariety značíme $\mathcal{P} \times_G \mathcal{Q}$. Definujme zobrazení $\pi_{\mathcal{Q}}$ následujícím diagramem

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \times \mathcal{Q} \arrow[r, "\pi_q"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \mathcal{P} \times_G \mathcal{Q} \arrow[d, "\pi_{\mathcal{Q}}"] \\
\mathcal{P} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

kde π_q je faktorová projekce a pr_1 je projekce na první faktor. Soubor $(\mathcal{P} \times_G \mathcal{Q}, \pi_{\mathcal{Q}}, \mathcal{X}, \mathcal{Q}, G)$ nazýváme *fibrovaný prostor s typovou vrstvou $\mathcal{Q}$ asociovaný s $\mathcal{P}$*. Dále budeme také užívat značení $\mathcal{Q}(\mathcal{P})$.

1.3 Jety zobrazení a diferenciální grupa L_n^r

Nechť $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) jsou variety dimenze n (resp. m). Zobrazení $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, třídy C^∞ nazveme *r-ekvivalentními v bodě $x \in \mathcal{X}$*, jestliže existují souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi), \varphi = (x^i), i = 1, \ldots, n$, na $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V}, \psi), \psi = (y^\sigma), \sigma = 1, \ldots, m$, na $\mathcal{Y}$, takové, že platí:

$$x \in \mathcal{U}, \quad f(x) = g(x) \in \mathcal{V},$$
$$D^k_{i_1 \ldots i_k}(\psi f \varphi^{-1})(\varphi(x)) = D^k_{i_1 \ldots i_k}(\psi g \varphi^{-1})(\varphi(x)) \tag{1.5}$$

pro $1 \le k \le r, 1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$. (Pro $k = 1$ píšeme jen D_{i_1}.) Tato relace je zjevně relací ekvivalence. *r-jetem* zobrazení f v bodě $x \in \mathcal{X}$ nazveme třídu uvedené ekvivalence obsahující zobrazení f a označujeme $J^r_x f$. Tedy $J^r_x f = \{g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \mid g$ je r-ekvivalentní s f v bodě $x\}$. Nechť $F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je množina všech zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ třídy C^∞. Dále označíme:

$$J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{J^r_x f \mid (f \in F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) \wedge (f(x) = y)\},$$

$$J^r_x(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \bigcup_{y\in\mathcal{Y}} J^r_{(x,y)}(\mathcal{X},\mathcal{Y}),$$

$$J^r(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} J^r_x(\mathcal{X},\mathcal{Y}),$$

$$T^r_n\mathcal{Y} = J^r_0(\mathcal{R}^n,\mathcal{Y}) = \bigcup_{y\in\mathcal{Y}} J^r_{(0,y)}(\mathcal{R}^n,\mathcal{Y}).$$

r-jet $J^r_x f$ nazveme *regulární*, je-li hodnost Jacobiho matice $D\psi f\varphi^{-1}(\varphi(x))$ maximální. Množinu všech regulárních jetů z $J^r_{(x,y)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ označujeme $\mathrm{reg}J^r_{(x,y)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Tato množina je uzavřená vzhledem k operaci skládání jetů.

Množina $L^r_n = \mathrm{Imm}J^r_{0,0}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$ uvažovaná s hladkou strukturou danou kanonickým globálním souřadnicovým systémem a se strukturou grupy danou skládáním jetů je Lieovou grupou. Nazýváme ji *diferenciální grupa.*

Příklad 1: Nechť $\mathcal{X}$ je n-rozměrná varieta. Množina $\mathcal{F}^r\mathcal{X} = \mathrm{Imm}J^r_0(\mathbf{R}^n,\mathcal{X})$ s pravou akcí grupy L^r_n danou vztahem

$$\mathrm{Imm}J^r_0(\mathbf{R}^n,\mathcal{X}) \times L^r_n \ni (j^r_0\xi, j^r_0\alpha) \to j^r_0(\xi\circ\alpha) \in \mathrm{reg}J^r_0(\mathbf{R}^n,\mathcal{X})$$

tvoří pravý hlavní L^r_n prostor nad varietou $\mathcal{X}$, který nazýváme *fibrovaný prostor r-bází na $\mathcal{X}$.*

Označme:

$$\pi^r_n : L^r_n \to L^1_n$$

kanonickou projekci a

$$i^r_n : L^1_n \to L^r_n$$

kanonické vložení. Tato zobrazení jsou homomorfismy Lieových grup.

Označme

$$a^i_{j_1\ldots j_k} = a^i_{j_1\ldots j_k}(j^r_0\alpha) = D^k_{j_1,\ldots j_k}\alpha^i,$$

kde $1\le k\le r$, $1\le i\le n$, $1\le j_1\le\ldots\le j_k\le n$, kanonické souřadnice na L^r_n. V těchto souřadnicích mají zobrazení π^r_n a i^r_n vyjádření:

$$\pi^r_n : (a^i_j,\ldots,a^i_{j_1\ldots j_r}) \to (a^i_j),$$

$$i^r_n : (a^i_j) \to (a^i_j,0,\ldots,0).$$

Označme

$$K^r_n = \ker\pi^r_n$$

jádro homomorfismu π^r_n. K^r_n je normální Lieovou podgrupou Lieovy grupy L^r_n, $H^r_n = i^r_n(L^1_n)$ je Lieovou podgrupou Lieovy grupy L^r_n izomorfní s L^1_n. Izomorfismus je dán vztahem $\kappa^r_n : i^r_n(L^1_n) \ni (a^i_j,0,\ldots,0) \to (a^i_j) \in L^1_n$.

Věta 1.4 *Diferenciální grupa L_n^r je vnitřním semidirektním součinem Lieových podgrup $i_n^r(L_n^1)$ a K_n^r.*

Důkaz: Z definice homomorfismů π_n^r a i_n^r je bezprostředně zřejmé, že podgrupy K_n^r a H_n^r Lieovy grupy L_n^r splňují požadavky 1)–3) semidirektního součinu a zobrazení $\beta \times \alpha : L_n^r \to L_n^r$, kde β a α jsou zobrazení určená jednoznačným rozkladem prvku semidirektního součinu, je izomorfismus Lieových grup (viz též [7]).

♡

Analogicky označme $\pi^{r,s} : L_n^r \to L_n^s$ kanonickou projekci a $i_n^{s,r} : L_n^s \to L_n^r$ kanonické vložení, kde $1 \leq s \leq r$. Platí:

$$\pi_n^{r,s} : L_n^r \ni (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_r}^i) \to (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_s}^i) \in L_n^s,$$

$$i_n^{s,r} : L_n^s \ni (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_s}^i) \to (a_j^i, \dots, a_{j_1,\dots,j_s}^i, 0, \dots, 0) \in L_n^r.$$

Pro $s > 1$ však zobrazení $i_n^{s,r}$ obecně není homomorfismem. Pro $s = 1$ je $\pi_n^{r,s} = \pi_n^r$ a $i_n^{s,r} = i_n^r$.

Označme

$$K_n^{r,s} = \ker \pi_n^{r,s}.$$

Množina $K_n^{r,s}$ je normální podgrupou grupy L_n^r, neboť je jádrem grupového homomorfismu.

Věta 1.5 *Faktorová grupa $L_n^r / K_n^{r,s}$, $r \geq s$ je izomorfní s grupou L_n^s.*

Důkaz: Dokážeme, že zobrazení $\kappa : L_n^s \to L_n^r / K_n^{r,s}$ definované vztahem $\kappa = \beta \circ i_n^{s,r}$, kde $\beta : L_n^r \to L_n^r / K_n^{r,s}$ je faktorová projekce, je isomorfismus. Platí $\kappa(j_0^s\alpha) \cdot \kappa(j_0^s\beta) = \beta(i_n^{s,r}(j_0^s\alpha)) \cdot \beta(i_n^{s,r}(j_0^s\beta)) = [j_0^r\alpha]_{K_n^{r,s}} \cdot [j_0^r\beta]_{K_n^{r,s}} = [j_0^r(\alpha \circ \beta)]_{K_n^{r,s}} = \kappa(j_0^s(\alpha \circ \beta)) = \kappa(j_0^s\alpha \cdot j_0^s\beta)$, zobrazení κ je tedy homomorfismus. Předpokládejme, že $\kappa(j_0^s\alpha) = \kappa(j_0^s\beta)$, pak $[j_0^r\alpha]_{K_n^{r,s}} = [j_0^r\beta]_{K_n^{r,s}}$ a existuje tedy prvek $j_0^r k \in K_n^{r,s}$ takový, že $j_0^r\alpha = j_0^r k \cdot j_0^r\beta$. Odtud vyplývá rovnost $j_0^s\alpha = j_0^s\beta$, neboť $\pi_0^{r,s}(j_0^r k) = j_0^s \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$. Zobrazení κ je tedy injektivní. Surjektivnost zobrazení je zřejmá, neboť $\kappa^{-1}[j_0^r\alpha]_{K_n^{r,s}} = j_0^s\alpha$.

♡

Diferenciálním invariantem nazýváme zobrazení L z levé L_n^r-variety $\mathcal{Q}$ do levé L_n^s-variety $\mathcal{P}$, $r \geq s$, splňující podmínku

$$L(j_0^r\alpha \cdot q) = \pi_n^{r,s}(j_0^r\alpha) \cdot L(q)$$

pro všechna $q \in \mathcal{Q}$ a všechna $j_0^r\alpha \in L_n^r$.

1.4 Tenzorová akce grupy L_n^1

Nechť a_j^i jsou kanonické souřadnice na L_n^1, souřadnice b_j^i definujme vztahem

$$b_j^i(J_0^1\alpha) = a_j^i(J_0^1\alpha^{-1}).$$

Dále zkráceně $A = (a_j^i(J_0^1\alpha)) = (a_j^i)$, horní index je řádkový.

Uvažujme množinu $\mathbf{R}^n$ s přirozenou strukturou hladké variety, přirozenou strukturou vektorového prostoru a působením grupy L_n^1 daným v kanonických souřadnicích takto:

$$L_n^1 \times \mathbf{R}^n \ni (A, \xi) \to \overline{\xi} = A \cdot \xi = (a_i^j \xi^i) \in \mathbf{R}^n, \tag{1.6}$$

kde $\xi = (\xi^i)$ resp. $\overline{\xi} = (\overline{\xi}^i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zřejmě platí $(\tilde{A} \cdot (A \cdot \xi))^j = \tilde{a}_i^j a_k^i \xi^k = ((\tilde{A}A) \cdot \xi)^j$, vztah (1.6) definuje levou akci L_n^1 na $\mathbf{R}^n$.

Uvažujme množinu všech lineárních zobrazení $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, označovanou $\mathbf{R}^{n*}$ s přirozenou strukturou hladké variety, přirozenou strukturou vektorového prostoru a působením grupy L_n^1:

$$L_n^1 \times \mathbf{R}^{n*} \ni (A, \omega) \to A \cdot \omega \in \mathbf{R}^{n*}$$

definovaným požadavkem

$$(A \cdot \omega)(A \cdot \xi) = \omega(\xi) \tag{1.7}$$

pro každé $\omega = (\omega_i) \in \mathbf{R}^{n*}$, $\xi = (\xi^i) \in \mathbf{R}^n$. V kanonických souřadnicích můžeme vztah (1.7) zapsat následovně:

$$L_n^1 \times \mathbf{R}^{n*} \ni (A, \omega) \to \overline{\omega} = A \cdot \omega = (b_j^i \omega_i) \in \mathbf{R}^{n*}.$$

Zřejmě platí $(\tilde{A} \cdot (A \cdot \omega))_j = \tilde{b}_j^i b_i^k \omega_k = ((\tilde{A}A) \cdot \omega)_j$, vztah (1.7) definuje levou akci grupy L_n^1 na $\mathbf{R}^{n*}$.

Uvažujme množinu $Q_q^p(n) = \otimes^p \mathbf{R}^{n*} \otimes^q \mathbf{R}^n$ všech zobrazení

$$\tau : \times^p \mathbf{R}^n \times^q \mathbf{R}^{n*} \to \mathbf{R}$$

lineárních ve všech argumentech s přirozenou strukturou hladké variety, přirozenou strukturou vektorového prostoru a působením grupy L_n^1 daným požadavkem

$$(A \cdot \tau)(A \cdot \xi_1, \ldots, A \cdot \xi_p, A \cdot \omega_1, \ldots, A \cdot \omega_q) = \tau(\xi_1, \ldots, \xi_p, \omega_1, \ldots, \omega_q) \tag{1.8}$$

pro libovolné $\omega_1, \ldots, \omega_q \in \mathbf{R}^{n*}$ a libovolné $\xi_1, \ldots, \xi_p \in \mathbf{R}^n$. V kanonických souřadnicích pak dostáváme

$$L_n^1 \times Q_q^p(n) \ni (A, \tau) \to \overline{\tau} = A \cdot \tau =$$

$$= (\overline{\tau}^{l_1 \dots l_q}_{k_1 \dots k_p}) = (b^{i_1}_{k_1} \dots b^{i_p}_{k_p} a^{l_1}_{j_1} \dots a^{l_q}_{j_q} \tau^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}) \in Q^p_q(n).$$

Vztah (1.8) definuje levou akci grupy L^1_n na $\otimes^p \mathbf{R}^{n*} \otimes^q \mathbf{R}^n$. Akce grupy L^1_n definované v tomto odstavci nazýváme *tenzorové*. Dále označme $\mathrm{Met}\mathbf{R}^n = \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*})$ podmnožinu množiny $Q^2_0(n)$ všech symetrických bilineárních a regulárních (tj. splňujících podmínku $f(\xi,\zeta) = 0 \ \forall\ \xi \in \mathbf{R}^n \ \Rightarrow\ \zeta = 0_{\mathbf{R}^n}$) zobrazení $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Ukážeme, že je invariantní vůči tenzorové akci grupy L^1_n.
Symetrie:
Nechť $\tau \in \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*})$ libovolné, pak

$$\tau(\xi,\zeta) = \tau(\zeta,\xi) \quad \forall \xi,\zeta \in \mathbf{R}^n \Rightarrow$$

$$(A\cdot\tau)(\xi,\zeta) = \tau(A^{-1}\cdot\xi, A^{-1}\cdot\zeta) = \tau(A^{-1}\cdot\zeta, A^{-1}\cdot\xi) = (A\cdot\tau)(\zeta,\xi).$$

Regulárnost:
Předpokládejme, že $(A\cdot\tau)(\xi,\zeta) = 0$ pro jisté $\zeta \neq 0_{\mathbf{R}^n}$ a všechna $\xi \in \mathbf{R}^n$. Pak $\tau(\xi, A^{-1}\cdot\zeta) = 0$ pro všechna $\xi \in \mathbf{R}^n$. Vzhledem k tomu, že $A^{-1}\cdot\zeta \neq 0_{\mathbf{R}^n}$ dostáváme spor s regulárností τ. Platí tedy implikace

$$\tau \in \mathrm{Met}\mathbf{R}^n \Rightarrow (A\cdot\tau) \in \mathrm{Met}\mathbf{R}^n$$

pro všechna $A \in L^1_n$. Množina $\mathrm{Met}\mathbf{R}^n$ s indukovanou topologií a hladkou strukturou je levou L^1_n-varietou.

Poznámka: Podobně můžeme ukázat, že prostor $P_n \subset (\mathbf{R}^{n*}\wedge\mathbf{R}^{n*})\otimes(\mathbf{R}^{n*}\wedge\mathbf{R}^{n*})$ zobrazení $\tau : \times^4\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ antisymetrických v prvních dvou argumentech, antisymetrických v posledních dvou argumentech a symetrických vůči záměně první a druhé dvojice argumentů, navíc splňujících v kanonických souřadnicích rovnost $\tau_{ijkl} + \tau_{iljk} + \tau_{iklj} = 0$ je invariantní vůči tenzorové akci grupy L^1_n. P_n s indukovanou topologií a hladkou strukturou je levou L^1_n-varietou.

Poznámka: Analogicky můžeme definovat tenzorové akce grupy G na prostorech zobrazení $P \to \mathbf{R}$, kde P je kartézským součinem konečného počtu vektorových $\mathbf{R}$-prostorů různých dimenzí $d_1,\dots,d_k$ a $G = L^1_{d_1}\times\dots\times L^1_{d_k}$.

Nechť $Q = Q^{p_1}_{q_1}(d_1)\otimes\dots\otimes Q^{p_k}_{q_k}(d_k)$ je množina zobrazení:

$$\tau : (\times^{p_1}\mathbf{R}^{d_1} \times^{q_1} \mathbf{R}^{d_1*} \times \dots \times^{p_k} \mathbf{R}^{d_k} \times^{q_k} \mathbf{R}^{d_k*}) \to \mathbf{R}$$

lineárních ve všech argumentech s přirozenou strukturou hladké variety a přirozenou strukturou vektorového prostoru. Tenzorovou akci grupy G pak definujeme požadavkem

$$((A_1,\dots,A_k)\cdot\tau)(A_1\cdot\xi^1_1,\dots,A_1\cdot\xi^1_{p_1}, A_1\cdot\omega^1_1,\dots,A_1\cdot\omega^1_{q_1},\dots,$$

$$\ldots, A_k \cdot \xi_1^k, \ldots, A_k \cdot \xi_{p_k}^k, A_k \cdot \omega_1^k \ldots, A_k \cdot \omega_{q_k}^k) =$$
$$= \tau((\xi_1^1, \ldots, \xi_{p_1}^1, \omega_1^1, \ldots, \omega_{q_1}^1, \ldots, \xi_1^k, \ldots, \xi_{p_k}^k, \omega_1^k, \ldots, \omega_{q_k}^k)$$

pro každé $(A_1, \ldots, A_k) \in G$ a každé $\omega_{i_j}^j \in \mathbf{R}^{d_j *}, \xi_{k_j}^j \in \mathbf{R}^{d_j}$, $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i_j \leq q_j$, $1 \leq k_j \leq p_j$. Souřadnicová vyjádření, definice symetrie a regularity jsou analogické.

1.5 Prodloužení tenzorové akce

Nechť $Q = Q_q^p(n)$ je prostor s tenzorovou akcí grupy L_n^1. *r-tým prodloužením* tohoto prostoru nazveme prostor $T_n^r Q = J_0^r(\mathbf{R}^n, Q)$ s akcí grupy L_n^{r+1}:

$$L_n^{r+1} \times Q \ni (j_0^{r+1}\alpha, j_0^r q) \to j_0^{r+1}\alpha \cdot j_0^r q = j_0^r(j_0^1\alpha \cdot q) \in T_n^r Q, \tag{1.9}$$

kde $j_0^1\alpha \cdot q$ je zobrazení z $\mathbf{R}^n$ do Q definované vztahem $(j_0^1\alpha \cdot q)(x) = j_0^1(t_x \alpha t_{-\alpha^{-1}(x)}) \cdot q(\alpha^{-1}(x))$, ve kterém násobením na pravé straně rozumíme tenzorovou akci grupy L_n^1 na Q, $t_y : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ je translace, která bodu $y \in \mathbf{R}^n$ přiřadí bod $0_{\mathbf{R}^n}$. Platí

$$j_0^{r+1}\alpha \cdot (j_0^{r+1}\beta \cdot j_0^r q) = j_0^{r+1}\alpha \cdot [j_0^r(j_0^1\beta \cdot q)] = j_0^r[j_0^1\alpha \cdot (j_0^1\beta \cdot q)]$$
$$j_0^r[(j_0^1\alpha \circ j_0^1\beta) \cdot q] = (j_0^{r+1}\alpha \circ j_0^{r+1}\beta) \cdot q,$$

neboť

$$j_0^1\alpha \cdot (j_0^1\beta \cdot q)(x) = j_0^1(t_x \alpha t_{-\alpha^{-1}(x)}) \cdot (j_0^1\beta \cdot q)(\alpha^{-1}(x)) =$$
$$= j_0^1(t_x \alpha t_{-\alpha^{-1}(x)}) \cdot [j_0^1(t_{\alpha^{-1}(x)} \beta t_{-\beta^{-1}(\alpha^{-1}(x))}) \cdot q(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(x))] =$$
$$= j_0^1(t_x(\alpha \circ \beta) t_{-(\alpha\circ\beta)^{-1}(x)}) \cdot q((\alpha \circ \beta)^{-1}(x)).$$

Jde tedy o levou akci.

Poznámka: Všimněme si fibrovaného prostoru $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times_{L_n^{r+1}} T_n^r Q_q^p(n)$ s typovou vrstvou $T_n^r Q_q^p(n)$ asociovaného s $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}$. Nechť $\mathcal{X}$ je n-rozměrná varieta, $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ jsou souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$ a $x \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$. Zobrazení $\varphi \circ \overline{\varphi}^{-1} : \overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}}) \to \varphi(\mathcal{U})$ je difeomorfismus. Označme

$$\begin{aligned} \zeta_x^r &= j_0^r(\varphi^{-1} t_{-\varphi(x)}), \\ \overline{\zeta}_x^r &= j_0^r(\overline{\varphi}^{-1} t_{-\overline{\varphi}(x)}), \end{aligned}$$

$\zeta_x^r, \overline{\zeta}_x^r \in \mathrm{Imm} J_0^r(\mathbf{R}^n, \mathcal{X})$. Platí

$$\overline{\zeta}_x^r = j_0^r(\varphi^{-1} t_{-\varphi(x)} t_{\varphi(x)} \varphi \overline{\varphi}^{-1} t_{-\overline{\varphi}(x)}) = \zeta_x^r \circ j_0^r(t_{\varphi(x)} \varphi \overline{\varphi}^{-1} t_{-\overline{\varphi}(x)}).$$

Označme $\alpha_x(y) = t_{\varphi(x)}\varphi\overline{\varphi}^{-1}t_{-\overline{\varphi}(x)}(y)$. Toto zobrazení přiřadí bodu $0_{\mathbf{R}^n}$ bod $0_{\mathbf{R}^n}$ a jeho derivace v nule jsou stejné, jako derivace difeomorfismu $\varphi\overline{\varphi}^{-1}$ v bodě $\overline{\varphi}(x)$. Dále označme $A^r_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x} = j^r_0\alpha_x$, $A^r_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x} \in L^r_n$. Uvažujme tenzorové rozvrstvení $\otimes^p_q\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ typu (p,q) na varietě $\mathcal{X}$. Nechť $\tau : \mathcal{X} \to \otimes^p_q\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ je hladké tenzorové pole definované na $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$, $\tau^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}$ resp. $\overline{\tau}^{i_1,\ldots,i_q}_{j_1,\ldots,j_p}$, $1 \leq i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \leq n$, jsou složky tohoto tenzorového pole v bodě x v asociovaném souřadnicovém systému $(\mathcal{U}^p_q,\varphi^p_q)$ resp. $(\overline{\mathcal{U}}^p_q,\overline{\varphi}^p_q)$ na $\otimes^p_q\mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Pro složky platí transformační vztah

$$\overline{\tau} = (A^1_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x})^{-1} \cdot \tau,$$

kde násobením rozumíme tenzorovou akci. Tenzorové rozvrstvení lze tedy chápat jako fibrovaný prostor s typovou vrstvou $Q^p_q(n)$ asociovaný s $\mathcal{F}^1\mathcal{X}$. Označme $\tau^{i_1,\ldots,i_q}_{j^1,\ldots,j_p,k_1,\ldots,k_s}$ resp. $\overline{\tau}^{i_1,\ldots,i_q}_{j^1,\ldots,j_p,k_1,\ldots,k_s}$, $1 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_s \leq n, 1 \leq s \leq r$, soubory derivací (do řádu r včetně) souřadnicového vyjádření v asociovaném souřadnicovém systému $(\mathcal{U}^p_q,\varphi^p_q)$ resp. $(\overline{\mathcal{U}}^p_q,\overline{\varphi}^p_q)$ tenzorového pole τ v bodě $\varphi(x)$ resp. $\overline{\varphi}(x)$. Soubory těchto čísel určují prvky $\overline{\tau}^r_x, \tau^r_x \in T^r_n(Q^p_q(n)) = J^r_0(\mathbf{R}^n, Q^p_q(n))$ a platí

$$\overline{\tau}^r_x = (A^{-1})^{r+1}_{\varphi\overline{\varphi}^{-1},x} \cdot \tau^r_x,$$

kde násobením rozumíme prodloužení tenzorové akce definované vztahem (1.9). Tímto získává struktura $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times_{L^{r+1}_n} T^r_nQ^p_q(n)$ názorný geometrický význam: Dvojice $[\tau^r_x,\zeta^r_x]$ a $[\overline{\tau}^r_x,\overline{\zeta}^r_x]$ nazveme ekvivalentními, jestliže existuje prvek $A \in L^{r+1}_n$ tak, že $\overline{\tau}^r_x = A^{-1} \cdot \tau^r_x$ a $\overline{\zeta}^r_x = \zeta^r_x \circ A$, tj., reprezentují-li soubory τ^r_x resp. $\overline{\tau}^r_x$ tentýž r-jet tenzorového pole v souřadnicových systémech $(\mathcal{U}^p_q,\varphi^p_q)$ resp. $(\overline{\mathcal{U}}^p_q,\overline{\varphi}^p_q)$.

1.6 Tenzorový součin modulů

V tomto odstavci zobecníme pojem tenzorového součinu modulů pro případ dvou modulů nad obecně různými okruhy. Nechť V_1 je modul nad okruhem R_1 resp. V_2 je modul nad okruhem R_2. Uvažujme libovolný homomorfismus okruhů $F : R_2 \to R_1$. *Tenzorovým součinem modulů* V_1 *a* V_2 *asociovaným s homomorfismem* F nazýváme modul $V_1 \otimes_F V_2$ nad okruhem R_1 společně se zobrazením $\otimes_F : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes_F V_2$ s vlastnostmi

1) $\otimes_F$ je R_1-lineární v prvním argumentu,

2) $v_1 \otimes_F (av_2 + bu_2) = F(a)(v_1 \otimes_F v_2) + F(b)(v_1 \otimes_F u_2)$ pro všechna $a,b \in R_2, v_1 \in V_1, v_2,u_2 \in V_2$,

3) *univerzální vlastnost*: buď W libovolný R_1-modul a $k : V_1 \times V_2 \to W$ libovolné zobrazení R_1-lineární v prvním argumentu a splňující $k(v_1, av_2 + bu_2) = F(a)k(v_1, v_2) + F(b)k(v_1, u_2)$, pro všechna $a, b \in R_2, v_1 \in V_1, v_2, u_2 \in V_2$, pak existuje jediné R_1-lineární zobrazení $\tilde{k} : V_1 \otimes_F V_2 \to W$ tak, že následující diagram komutuje.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\otimes_F"] \arrow[dr, "k"'] & V_1 \otimes_F V_2 \arrow[d, "\tilde{k}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Tenzorový součin $V_1 \otimes_F V_2$ je určen jednoznačně až na izomorfismus.

Příklad 2: Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření dvou hladkých variet. Nechť $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ je $C^\infty(\mathcal{X})$-modul vektorových polí na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ je $C^\infty(\mathcal{Y})$-modul vektorových polí na $\mathcal{Y}$. Zobrazení $f^* : C^\infty(\mathcal{Y}) \to C^\infty(\mathcal{X})$ dané vztahem $f^*\alpha = \alpha \circ f$ je homomorfismem okruhů. Můžeme tedy definovat tenzorový součin $\mathcal{Z}(\mathcal{X}) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$.

Tento $C^\infty(\mathcal{X})$-modul je volný a jeho báze (použijeme-li lokálních souřadnic) je tvořena prvky tvaru $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes_{f^*} \frac{\partial}{\partial y^\sigma}$, kde $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i \in \{1, \ldots, \dim \mathcal{X}\}$ je lokální báze $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ resp. $\frac{\partial}{\partial y^\sigma}$, $\sigma \in \{1, \ldots, \dim \mathcal{Y}\}$ je lokální báze $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$. Prvek $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ lze chápat jako zobrazení, které bodu $x \in \mathcal{X}$ přiřadí tenzor z tenzorového prostoru $T_x\mathcal{X} \otimes T_{f(x)}\mathcal{Y}$ vztahem

$$u(x) = u^{i\sigma}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma} \right)_{f(x)} .$$

Kapitola 2

Diferenciální invarianty z vnoření variet s metrickými poli

V této kapitole zavedeme základní struktury, jejichž diferenciální invarianty budeme studovat. Definujeme pojem diferenciálního invariantu z vnoření variet s metrikou. Dále bude nalezena báze invariantů prvního řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě, báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $L^2_n \times L^2_m$-varietě a báze invariantů druhého řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě. V posledních odstavcích se zabýváme invarianty obecného řádu a odvodíme rekurentní vztah pro jejich výpočet. Zmíníme se také o geometrickém významu těchto nových výsledků.

2.1 Základní struktury

Uvažujme množinu $L^r_n \times L^r_m$ s grupovou operací danou vztahem $(j^r_0\alpha, j^r_0\gamma) \cdot (j^r_0\beta, j^r_0\delta) = (j^r_0(\alpha \circ \beta), j^r_0(\gamma \circ \delta))$, hladkou varietu $\mathcal{X}$ dimenze n resp. hladkou varietu $\mathcal{Y}$ dimenze m. Dále $\pi_\mathcal{X}$ resp. $\pi_\mathcal{Y}$ je projekce hlavního fibrovaného L^r_n-prostoru $\mathcal{F}^r\mathcal{X}$ resp. hlavního fibrovaného L^r_m-prostoru $\mathcal{F}^r\mathcal{Y}$ a $\pi_\mathcal{X} \times \pi_\mathcal{Y}(Z, W) = (\pi_\mathcal{X}(Z), \pi_\mathcal{Y}(W)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, pro $(Z, W) \in \mathcal{F}^r\mathcal{X} \times \mathcal{F}^r\mathcal{Y}$.

Věta 2.1 *Nechť $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ jsou hladké variety dimenze n resp. m. Čtveřice $(\mathcal{F}^r\mathcal{X} \times \mathcal{F}^r\mathcal{Y},\ L^r_n \times L^r_m,\ \pi_\mathcal{X} \times \pi_\mathcal{Y},\ \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ tvoří pravý hlavní $L^r_n \times L^r_m$-prostor nad varietou $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.*

Důkaz: Označme $G = L^r_n \times L^r_m$, $\mathcal{P} = \mathcal{F}^r\mathcal{X} \times \mathcal{F}^r\mathcal{Y}$, $\pi = \pi_\mathcal{X} \times \pi_\mathcal{Y}$. Akce grupy

G na $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} \times G \ni (p, g) = [(j_0^r \xi, j_0^r \zeta), (j_0^r \alpha, j_0^r \gamma)] \to p \cdot g = (j_0^r(\xi \circ \alpha), j_0^r(\zeta \circ \gamma)) \in \mathcal{P}$$

je pravá, neboť zřejmě platí: $(p \cdot g_1) \cdot g_2 = p \cdot (g_1 \cdot g_2)$.

1. Akce L_n^r na $\mathcal{F}^r\mathcal{X}$ a L_m^r na $\mathcal{F}^r\mathcal{Y}$ jsou volné $\Rightarrow$ pro libovolné $p \in \mathcal{P}, g \in G : (p \cdot g = p \Rightarrow g = (j_0^r \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}, j_0^r \mathrm{id}_{\mathbf{R}^m}) = e)$, tedy akce G na $\mathcal{P}$ je volná.

2. Dokážeme, že $\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P} : \pi(p_1) = \pi(p_2) \Leftrightarrow \exists g \in G$ tak, že $p_1 = p_2 \cdot g$.
$\Rightarrow$:
$p_1 = (p_{1_\mathcal{X}}, p_{1_\mathcal{Y}})$, $p_2 = (p_{2_\mathcal{X}}, p_{2_\mathcal{Y}})$, $\pi(p_1) = (\pi_\mathcal{X}(p_{1_\mathcal{X}}), \pi_\mathcal{Y}(p_{1_\mathcal{Y}})) = (\pi_\mathcal{X}(p_{2_\mathcal{X}}), \pi_\mathcal{Y}(p_{2_\mathcal{Y}})) = \pi(p_2)$. Existují prvky $g_\mathcal{X} \in L_n^r$ a $g_\mathcal{Y} \in L_m^r$ tak, že $p_{1_\mathcal{X}} = p_{2_\mathcal{X}} \cdot g_\mathcal{X}$ a $p_{1_\mathcal{Y}} = p_{2_\mathcal{Y}} \cdot g_\mathcal{Y}$. Pro $g = (g_\mathcal{X}, g_\mathcal{Y})$ platí $p_1 = p_2 \cdot g$.
$\Leftarrow$:
Nechť existuje $g = (g_\mathcal{X}, g_\mathcal{Y}) \in G$ pro které platí $p_1 = p_2 \cdot g$, pak $p_1 = (p_{1_\mathcal{X}}, p_{1_\mathcal{Y}}) = p_2 \cdot g = (p_{2_\mathcal{X}} \cdot g_\mathcal{X}, p_{2_\mathcal{Y}} \cdot g_\mathcal{Y})$ a tedy $\pi(p_1) = \pi(p_2)$.

3. Dokážeme, že rozvrstvení $\mathcal{P}$ nad $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ je lokálně triviální. Vzhledem k lokální triviálnosti rozvrstvení $\mathcal{F}^r\mathcal{X}$ nad $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{F}^r\mathcal{Y}$ nad $\mathcal{Y}$ existuje pro každý bod $x \in \mathcal{X}$ okolí $\mathcal{U}_\mathcal{X}$ a difeomorfismus $\Psi_\mathcal{X} : \pi_\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{X}) \to \mathcal{U}_\mathcal{X} \times L_n^r$ splňující pro každé $p_\mathcal{X} \in \pi_\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{X})$ podmínku $\Psi_\mathcal{X}(p_\mathcal{X}) = (\pi_\mathcal{X}, \eta_\mathcal{X}(p_\mathcal{X}))$, $\Psi_\mathcal{X}(p_\mathcal{X} \cdot g_\mathcal{X}) = (\pi_\mathcal{X}, \eta_\mathcal{X}(p_\mathcal{X}) \cdot g_\mathcal{X})$ resp. pro každý bod $y \in \mathcal{Y}$ okolí $\mathcal{U}_\mathcal{Y}$ a difeomorfismus $\Psi_\mathcal{Y} : \pi_\mathcal{Y}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{Y}) \to \mathcal{U}_\mathcal{Y} \times L_m^r$ splňující pro každé $p_\mathcal{Y} \in \pi_\mathcal{Y}^{-1}(\mathcal{U}_\mathcal{Y})$ podmínku $\Psi_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y}) = (\pi_\mathcal{Y}, \eta_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y}))$, $\Psi_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y} \cdot g_\mathcal{Y}) = (\pi_\mathcal{Y}, \eta_\mathcal{Y}(p_\mathcal{Y}) \cdot g_\mathcal{Y})$. Pro každý bod $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ pak existuje okolí $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\mathcal{X} \times \mathcal{U}_\mathcal{Y}$ a difeomorfismus $\Psi = \Psi_\mathcal{X} \times \Psi_\mathcal{Y} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times G$ s požadovanou vlastností.

$\heartsuit$

Věta 2.2 *Množina $H = i_n^r(L_n^1) \times i_m^r(L_m^1)$ je Lieovou podgrupou grupy $G = L_n^r \times L_m^r$, množina $K = K_n^r \times K_m^r$ je její normální Lieovou podgrupou. Lieova grupa G je vnitřním semidirektním součinem Lieových podgrup H a K.*

Důkaz: Je zřejmé, že K a H jsou Lieovy podgrupy grupy G a platí $K \cap H = \{e\}$. Podgrupa K je normální, neboť je jádrem grupového homomorfismu $\pi_n^r \times \pi_m^r$. Nechť $g \in G$ je libovolný prvek. $\beta(g) = (i_n^r \times i_m^r)[(\pi_n^r \times \pi_m^r)(g)]$ a $\alpha(g) = g \cdot (i_n^r \times i_m^r)[((\pi_n^r \times \pi_m^r)(g))^{-1}]$, kde $\alpha : G \to K$ resp. $\beta : G \to H$ jsou zobrazení definovaná v kapitole 1.1. Platí $\alpha(g) \cdot \beta(g) = g$ a tedy $K \cdot H = G$. Zobrazení $\alpha \times \beta : G \to G$ je izomorfismem Lieových grup.

$\heartsuit$

Označme

$$Q_1 = \mathrm{Met}\mathbf{R}^n,$$

$$Q_2 = \mathrm{Met}\mathbf{R}^m.$$

Q_1 je levá L^1_n-varieta, Q_2 je levá L^1_m-varieta. Nechť

$$Q_3 = \mathrm{Imm}J^1_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

je množina s přirozenou strukturou hladké variety. Na této množině definujeme působení grupy $G = L^1_n \times L^1_m$ vztahem

$$(L^1_n \times L^1_m) \times Q_3 \ni ((A, C), j^1_0 f) \to (A, C) \cdot j^1_0 f = j^1_0(\gamma \circ f \circ \alpha^{-1}) \in Q_3,$$

kde $A = j^1_0\alpha, C = j^1_0\gamma$. Dokážeme, že se jedná o levou akci a že množina Q_3 je invariantní vůči působení grupy G:

$$(\tilde{A}, \tilde{C}) \cdot ((A, C) \cdot j^1_0 f) = (\tilde{A}, \tilde{C}) \cdot j^1_0(\gamma \circ f \circ \alpha^{-1}) =$$

$$j^1_0(\tilde{\gamma} \circ \gamma \circ f \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha}^{-1}) = (\tilde{A}A, \tilde{C}C) \cdot j^1_0 f.$$

Nechť $j^1_0 f \in Q_3$ je regulární jet, pak jet $j^1_0(\gamma \circ f \circ \alpha^{-1})$ je opět regulární pro libovolné $(j^1_0\alpha, j^1_0\gamma) \in (L^1_n \times L^1_m)$.

Nechť $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ jsou hladké variety dimenze n resp. m, $n \leq m$, opatřené metrickými poli h resp. g. Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření.

Označme $\mathcal{R} = Q(\mathcal{F}^1\mathcal{X} \times \mathcal{F}^1\mathcal{Y})$ fibrovaný prostor s typovou vrstvou $Q = Q_1 \times Q_2 \times Q_3$ asociovaný s hlavním $(L^1_n \times L^1_m)$-prostorem $\mathcal{F}^1\mathcal{X} \times \mathcal{F}^1\mathcal{Y}$. Levá akce grupy $L^1_n \times L^1_m$ na typové vrstvě je dána vztahem:

$$\begin{aligned}(L^1_n \times L^1_m) \times Q \ni ((A, C), (h, g, j^1_0 f)) \to (A, C) \cdot (h, g, j^1_0 f) =\\ = (A \cdot h, C \cdot g, (A, C) \cdot j^1_0 f) \in Q.\end{aligned} \tag{2.1}$$

r-tým prodloužením prostoru $\mathcal{R}$ nazveme fibrovaný prostor $\mathcal{R}^r$ s typovou vrstvou $Q^r = T^r_n Q_1 \times T^r_m Q_2 \times \mathrm{Imm}J^{r+1}_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ asociovaný s hlavním $(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)$-prostorem $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}$. Levá akce grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$ na typové vrstvě je dána vztahem:

$$(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m) \times Q^r \ni ((A, C), h, g, j^{r+1}_0 f) \to (A, C) \cdot (h, g, j^{r+1}_0 f) =$$

$$= (A \cdot h, C \cdot g, (A, C) \cdot j^{r+1}_0 f) \in Q,$$

kde

$$L^{r+1}_n \times T^r_n Q_1 \ni (A, h) \to A \cdot h \in T^r_n Q_1$$

resp.

$$L^{r+1}_m \times T^r_m Q_2 \ni (C, g) \to C \cdot g \in T^r_m Q_2$$

je prodloužení tenzorové akce,

$$(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m) \times \mathrm{Imm}J^{r+1}_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \ni ((A, C), j^{r+1}_0 f) \to (A, C) \cdot j^{r+1}_0 f =$$

$$= j_0^{r+1}(\gamma \circ f \circ \alpha^{-1}) \in \mathrm{Imm} J^{r+1}_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),$$

a $A = j_0^{r+1}\alpha$, $C = j_0^{r+1}\gamma$.

Nechť $\mathcal{P}$ je levá $(L_n^s \times L_m^s)$-varieta, $1 \le s \le r$. *Diferenciálním invariantem r-tého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v $\mathcal{P}$* nazveme zobrazení $F : Q^r \to \mathcal{P}$ s vlastností:

$$F((A, C) \cdot q) = (\pi_n^{r+1,s} A, \pi_m^{r+1,s} C) \cdot F(q)$$

pro všechna $q \in Q^r$ a všechna $(A, C) \in L_n^{r+1} \times L_m^{r+1}$.

2.2 Vnoření variet s metrikou

Nechť $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ jsou hladké variety dimenze n resp. m, $n \le m$, s metrikou h resp. g, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření. Uvažujme souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ na $\mathcal{X}$, $x \in \mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$, resp. souřadnicové systémy $(\mathcal{V}, \psi)$, $(\overline{\mathcal{V}}, \overline{\psi})$, $y = f(x) \in \mathcal{V} \cap \overline{\mathcal{V}}$, na $\mathcal{Y}$. Dále označujeme:

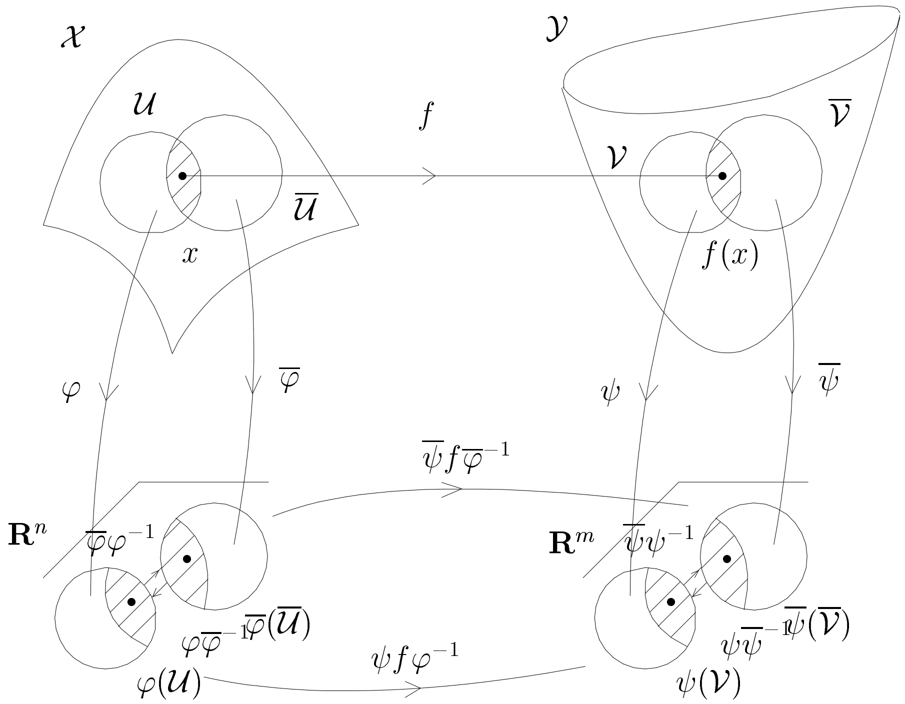
$$\begin{array}{lcl} \varphi(x) = (x^1\varphi(x), \dots, x^n\varphi(x)), & \multirow{2}{*}{resp.} & \psi(y) = (y^1\psi(y), \dots, y^m\psi(y)), \\ \overline{\varphi}(x) = (\overline{x}^1\overline{\varphi}(x), \dots, \overline{x}^n\overline{\varphi}(x)), & \text{resp.} & \overline{\psi}(y) = (\overline{y}^1\overline{\psi}(y), \dots, \overline{y}^m\overline{\psi}(y)). \end{array}$$

Souřadnicové přechody jsou dány rovnicemi

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \overline{x}^i\overline{\varphi}(x) &=& \overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1}\varphi(x), & \overline{y}^\sigma\overline{\psi}(y) &=& \overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1}\psi(y), \\ \overline{x}^i &=& \overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n), & \overline{y}^\sigma &=& \overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1}(y^1, \dots, y^m), \\ x^i\varphi(x) &=& x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1}\overline{\varphi}(x), & y^\sigma\psi(y) &=& y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1}\overline{\psi}(y), \\ x^i &=& x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1}(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n), & y^\sigma &=& y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1}(\overline{y}^1, \dots, \overline{y}^m). \end{array}$$

Jacobiho matice souřadnicových přechodů jsou

$$\begin{array}{ll} a^i_j(\overline{\varphi}(x)) = \mathrm{D}_j(x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x)), & c^\sigma_\nu(\overline{\psi}(y)) = \mathrm{D}_\nu(y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1})(\overline{\psi}(y)), \\ b^i_j(\varphi(x)) = \mathrm{D}_j(\overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1})(\varphi(x)), & d^\sigma_\nu(\psi(y)) = \mathrm{D}_\nu(\overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1})(\psi(y)), \\ 1 \le i, j \le n, & 1 \le \sigma, \nu \le m. \end{array}$$

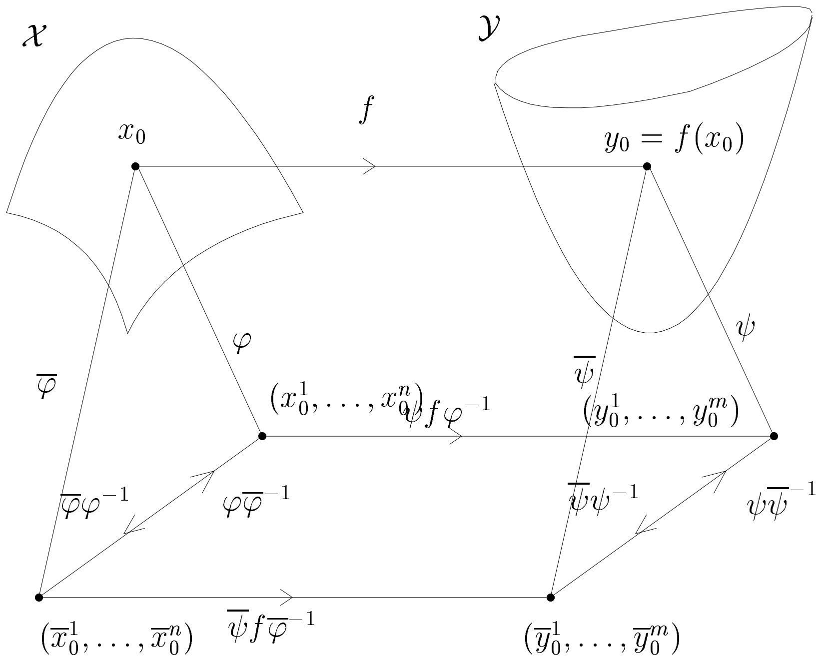


Označme

$$\begin{aligned}
(x_0^1, \dots, x_0^n) &= (x^1\varphi(x_0), \dots, x^n\varphi(x_0)),\\
(\overline{x}_0^1, \dots, \overline{x}_0^n) &= (\overline{x}^1\overline{\varphi}(x_0), \dots, \overline{x}^n\overline{\varphi}(x_0)),\\
(y_0^1, \dots, y_0^m) &= (y^1\psi(y_0), \dots, y^m\psi(y_0)),\\
(\overline{y}_0^1, \dots, \overline{y}_0^m) &= (\overline{y}^1\overline{\psi}(y_0), \dots, \overline{y}^m\overline{\psi}(y_0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_0^i &= x^i\varphi\overline{\varphi}^{-1}(\overline{x}_0^1, \dots, \overline{x}_0^n), & y_0^\sigma &= y^\sigma\psi\overline{\psi}^{-1}(\overline{y}_0^1, \dots, \overline{y}_0^m),\\
\overline{x}_0^i &= \overline{x}^i\overline{\varphi}\varphi^{-1}(x_0^1, \dots, x_0^n), & \overline{y}_0^\sigma &= \overline{y}^\sigma\overline{\psi}\psi^{-1}(y_0^1, \dots, y_0^m),
\end{aligned}$$

kde $y_0 = f(x_0)$.



Platí

$$\begin{aligned} y^\sigma &= y^\sigma \psi f \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n), \\ \overline{y}^\sigma &= \overline{y}^\sigma \overline{\psi} f \overline{\varphi}^{-1}(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n). \end{aligned}$$

Označme

$$f_i^\sigma = f_i^\sigma(x^1, \dots, x^n) = \mathrm{D}_i(y^\sigma \psi f \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n),$$

$$\overline{f}_i^\sigma = \overline{f}_i^\sigma(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n) = \mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma \overline{\psi} f \overline{\varphi}^{-1})(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n).$$

$$\begin{aligned} \overline{f}_i^\sigma(\overline{\varphi}(x_0)) &= \mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma \overline{\psi} f \overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0)) = \\ &= \mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma[(\overline{\psi}\psi^{-1} \circ (\psi f \varphi^{-1}) \circ (\varphi\overline{\varphi}^{-1})])(\overline{\varphi}(x_0)) = \\ &= \mathrm{D}_\nu(\overline{y}^\sigma \overline{\psi}\psi^{-1})(\psi(y_0)) \cdot \mathrm{D}_j(y^\nu \psi f \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \times \\ &\quad \times \mathrm{D}_i(x^j \varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0)), \\ \overline{f}_i^\sigma(\overline{\varphi}(x_0)) &= d_\nu^\sigma(\psi(f(x_0))) \cdot f_j^\nu(\varphi(x_0)) \cdot a_i^j(\overline{\varphi}(x_0)). \end{aligned}$$

Označme

$$f^\sigma_{ij} = f^\sigma_{ij}(x^1,\dots,x^n) = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(y^\sigma\psi f\varphi^{-1})(x^1,\dots,x^n),$$
$$\overline{f}^\sigma_{ij} = \overline{f}^\sigma_{ij}(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n) = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma\overline{\psi}f\overline{\varphi}^{-1})(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n).$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}^\sigma_{ij}(\overline{\varphi}(x_0)) &= \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma\overline{\psi}f\overline{\varphi}^{-1}))(\overline{\varphi}(x_0)) = \mathrm{D}_j(\overline{f}^\sigma_i)(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_j(d^\sigma_\nu\circ(\psi f\varphi^{-1})\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot f^\nu_k\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot a^k_i)(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_j(d^\sigma_\nu(\psi f\varphi^{-1})(\varphi\overline{\varphi}^{-1}))(\overline{\varphi}(x_0))\cdot f^\nu_k(\varphi(x_0))\cdot a^k_i(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_\nu(\psi(y_0))\cdot\mathrm{D}_j(f^\nu_k\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1}))(\overline{\varphi}(x_0))\cdot a^k_i(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_\nu(\psi(y_0))\cdot f^\nu_k(\varphi(x_0))\cdot\mathrm{D}_j(a^k_i)(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_\beta(d^\sigma_\nu)(\psi(y_0))\cdot\mathrm{D}_l(y^\beta\psi f\varphi^{-1})(\varphi(x_0))\times \\
&\quad \times\mathrm{D}_j(x^l\varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0))\cdot f^\nu_k(\varphi(x_0))\cdot a^k_i(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_\nu(\psi(y_0))\cdot f^\nu_{kl}(\varphi(x_0))\cdot a^k_i(\overline{\varphi}(x_0))\cdot a^l_j(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_\nu(\psi(y_0))\cdot f^\nu_k(\varphi(x_0))\cdot a^k_{ij}(\overline{\varphi}(x_0)), \\
\overline{f}^\sigma_{ij}(\overline{\varphi}(x_0)) &= d^\sigma_{\nu\beta}(\psi(f(x_0)))\cdot f^\beta_l(\varphi(x_0))\cdot f^\nu_k(\varphi(x_0))\times \\
&\quad \times a^k_i(\overline{\varphi}(x_0))\cdot a^l_j(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_\nu(\psi(f(x_0)))\cdot f^\nu_{kl}(\varphi(x_0))\cdot a^k_i(\overline{\varphi}(x_0))\cdot a^l_j(\overline{\varphi}(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_\nu(\psi(f(x_0)))\cdot f^\nu_k(\varphi(x_0))\cdot a^k_{ij}(\overline{\varphi}(x_0)).
\end{aligned}$$

Označme

$$f^\sigma_{ijk} = f^\sigma_{ijk}(x^1,\dots,x^n) = \mathrm{D}_k\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(y^\sigma\psi f\varphi^{-1})(x^1,\dots,x^n),$$
$$\overline{f}^\sigma_{ijk} = \overline{f}^\sigma_{ijk}(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n) = \mathrm{D}_k\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i(\overline{y}^\sigma\overline{\psi}f\overline{\varphi}^{-1})(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n).$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}^\sigma_{ijk}(\overline{\varphi}(x_0)) &= \mathrm{D}_k(\overline{f}^\sigma_{ij})(\overline{\varphi}(x_0)) = \\
&= \mathrm{D}_k(d^\sigma_\nu\circ(\psi f\varphi^{-1})\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot f^\nu_{pl}\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot a^p_i\cdot a^l_j + \\
&\quad + d^\sigma_{\nu\beta}\circ(\psi f\varphi^{-1})\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\times \\
&\quad \times f^\beta_l\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot f^\nu_p\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot a^p_i\cdot a^l_j + \\
&\quad + d^\sigma_\nu\circ(\psi f\varphi^{-1})\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot f^\nu_p\circ(\varphi\overline{\varphi}^{-1})\cdot a^p_{ij})(\overline{\varphi}(x_0)), \\
\overline{f}^\sigma_{ijk}(\overline{\varphi}(x_0)) &= d^\sigma_{\nu\kappa\alpha}(\psi(f(x_0)))a^s_i(\overline{\varphi}(x_0))a^q_j(\overline{\varphi}(x_0))a^r_k(\overline{\varphi}(x_0))\times \\
&\quad \times f^\nu_s(\varphi(x_0))f^\kappa_q(\varphi(x_0))f^\alpha_r(\varphi(x_0)) + \\
&\quad + d^\sigma_{\nu\kappa}(\psi(f(x_0)))[(f^\nu_{sq}(\varphi(x_0))f^\kappa_r(\varphi(x_0)) + \\
&\quad + f^\nu_{sr}(\varphi(x_0))f^\kappa_q(\varphi(x_0)) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+f^{\kappa}_{qr}(\varphi(x_0))f^{\nu}_{s}(\varphi(x_0)))a^s_i(\overline{\varphi}(x_0))a^q_j(\overline{\varphi}(x_0))a^r_k(\overline{\varphi}(x_0))+\\
&+f^{\nu}_{s}(\varphi(x_0))f^{\kappa}_{q}(\varphi(x_0))(a^s_{ik}(\overline{\varphi}(x_0))a^q_j(\overline{\varphi}(x_0))+\\
&+a^s_i(\overline{\varphi}(x_0))a^q_{jk}(\overline{\varphi}(x_0))+\\
&+a^s_{ij}(\overline{\varphi}(x_0))a^q_k(\overline{\varphi}(x_0)))]+\\
&+d^{\sigma}_{\alpha}(\psi(f(x_0)))[a^q_{ijk}(\overline{\varphi}(x_0))f^{\alpha}_q(\varphi(x_0))+\\
&+a^a_i(\overline{\varphi}(x_0))a^b_j(\overline{\varphi}(x_0))a^c_k(\overline{\varphi}(x_0))f^{\alpha}_{abc}(\varphi(x_0))+\\
&+(a^a_{ij}(\overline{\varphi}(x_0))a^b_k(\overline{\varphi}(x_0))+\\
&+a^a_{ik}(\overline{\varphi}(x_0))a^b_j(\overline{\varphi}(x_0))+\\
&+a^a_i(\overline{\varphi}(x_0))a^b_{jk}(\overline{\varphi}(x_0)))f^{\alpha}_{ab}(\varphi(x_0))].
\end{aligned}
$$

Ve výpočtu bylo využito vztahu

$$D_i(F\circ\psi f\varphi^{-1}\circ\varphi\overline{\varphi}^{-1})(\overline{\varphi}(x_0))=D_{\alpha}(F)(\psi(f(x_0)))\cdot f^{\alpha}_j(\varphi(x_0))\cdot a^j_i(\overline{\varphi}(x_0)),$$

kde

$$F=F(y^1,\ldots,y^m).$$

Zkráceně můžeme psát transformační vztahy takto:

$$
\begin{aligned}
\overline{f}^{\sigma}_i &= d^{\sigma}_{\alpha}a^a_i f^{\alpha}_a,\\
\overline{f}^{\sigma}_{ij} &= d^{\sigma}_{\nu\kappa}a^k_i a^l_j f^{\nu}_k f^{\kappa}_l + d^{\sigma}_{\nu}a^k_{ij}f^{\nu}_k + d^{\sigma}_{\nu}a^k_i a^l_j f^{\nu}_{kl},\\
\overline{f}^{\sigma}_{ijk} &= d^{\sigma}_{\nu\kappa\alpha}a^s_i a^q_j a^r_k f^{\nu}_s f^{\kappa}_q f^{\alpha}_r + d^{\sigma}_{\nu\kappa}[(f^{\nu}_{sq}f^{\kappa}_r + f^{\nu}_{sr}f^{\kappa}_q + f^{\kappa}_{qr}f^{\nu}_s)a^s_i a^q_j a^r_k +\\
&\quad +f^{\nu}_s f^{\kappa}_q(a^s_{ik}a^q_j + a^s_i a^q_{jk} + a^s_{ij}a^q_k)] + d^{\sigma}_{\alpha}[a^q_{ijk}f^{\alpha}_q +\\
&\quad +a^a_i a^b_j a^c_k f^{\alpha}_{abc} + (a^a_{ij}a^b_k + a^a_{ik}a^b_j + a^a_i a^b_{jk})f^{\alpha}_{ab}].
\end{aligned}
$$

V dalších kapitolách budeme užívat také značení $f^{\sigma}_i(x)$ místo $f^{\sigma}_i(\varphi(x))$ atd., tam, kde nemůže dojít k nedorozumění.

A. Invarianty prvního řádu

2.3 Akce grupy $L^2_n \times L^2_m$ na typové vrstvě Q^1 v kanonických souřadnicích

V tomto odstavci uvádíme vzorce pro přímé výpočty akce grupy $L^2_n \times L^2_m$ na typové vrstvě Q^1 v kanonickém globálním souřadnicovém systému (Q^1,ϕ), $\phi=(h_{jk},g_{\nu\eta},h_{jk,i},g_{\nu\eta,\sigma},f^{\sigma}_i,f^{\sigma}_{jk})$. Pro zjednodušení označujeme $\overline{q}=(A^{-1},C^{-1})\cdot q$ pro $q\in Q^1$, $A=(a^i_j,a^i_{jk})$ $C=(c^{\sigma}_{\nu},c^{\sigma}_{\nu\eta})$, $A^{-1}=(b^i_j,b^i_{jk})$, $C^{-1}=(d^{\sigma}_{\nu},d^{\sigma}_{\nu\eta})$

a při značení souřadnic bodu q: $\phi(q) = (h_{jk}(q),\ g_{\sigma\nu}(q),\ \ldots,\ f^{\sigma}_{jk}(q))$ budeme vyznačení bodu q vynechávat, tj. $h_{ij}(q) = h_{ij}$ resp. $h_{ij}(\overline{q}) = \overline{h}_{ij}$, atd., $1 \leq i, j \leq k \leq n$; $1 \leq \sigma, \nu \leq \eta \leq m$.

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a^a_i a^b_j h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^{\alpha}_{\sigma} c^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}^{\sigma}_{i} &= d^{\sigma}_{\alpha} a^a_i f^{\alpha}_{a}, \\
\overline{h}_{ij,k} &= (a^a_{ik} a^b_j + a^a_i a^b_{jk}) h_{ab} + a^a_i a^b_j a^c_k h_{ab,c}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu,\eta} &= (c^{\alpha}_{\sigma\eta} c^{\beta}_{\nu} + c^{\alpha}_{\sigma} c^{\beta}_{\eta\nu}) g_{\alpha\beta} + c^{\alpha}_{\sigma} c^{\beta}_{\nu} c^{\gamma}_{\eta} g_{\alpha\beta,\gamma}, \\
\overline{f}^{\sigma}_{ik} &= d^{\sigma}_{\nu\kappa} a^j_i a^l_k f^{\nu}_j f^{\kappa}_l + d^{\sigma}_{\nu} a^j_{ik} f^{\nu}_j + d^{\sigma}_{\nu} a^j_i a^l_k f^{\nu}_{jl}.
\end{aligned}
$$

Vztahy pro souřadnice $f^{\sigma}_i, f^{\sigma}_{ij}$, byly odvozeny v kapitole 2.2. Určíme dimenzi prostoru Q^1.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dim} T^1_n Q_1 &= N_1 = \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \\
&= \frac{n}{2} n(n+1)^2, \\
\mathrm{dim} T^1_m Q_2 &= M_1 = \frac{m(m+1)}{2} + m \cdot \frac{m(m+1)}{2} = \\
&= \frac{m}{2} m(m+1)^2, \\
\mathrm{dim} J^2_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) &= P_1 = m \left(n + \frac{n(n+1)}{2} \right), \\
\mathcal{D}_1 = \mathrm{dim} Q^1 &= N_1 + M_1 + P_1.
\end{aligned}
$$

2.4 Diferenciální invarianty prvního řádu s hodnotami v levé $(L^1_n \times L^1_m)$-varietě

Místo souřadnic

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^{\sigma}_i, h_{ij,k}, g_{\sigma\nu,\eta}, f^{\sigma}_{jk})$$

zvolme nové souřadnice

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^{\sigma}_i, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}, K^{\sigma}_{jk})$$

definované transformačními rovnicemi

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_i^\sigma &= f_i^\sigma, \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}), \\
\Gamma^\sigma_{\nu\eta} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha}), \\
K^\sigma_{jk} &= \Gamma^i_{jk}f_i^\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\eta}f_j^\nu f_k^\eta - f^\sigma_{jk}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Ukážeme, že nové souřadnice definují na typové vrstvě Q^1 globální sořadnicový systém (Q^1, Ψ^1). Souřadnice Γ^i_{jk},$\Gamma^\sigma_{\nu\eta}$, K^σ_{jk} jsou symetrické v dolních indexech.

Dále platí

$$h^{ij}h_{jk} = \delta^i_k,$$

$$g^{\sigma\nu}g_{\nu\eta} = \delta^\sigma_\eta.$$

Inverzní transformace je dána rovnicemi:

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f_i^\sigma &= f_i^\sigma, \\
h_{ij,k} &= h_{qi}\Gamma^q_{jk} + h_{qj}\Gamma^q_{ik}, \\
g_{\sigma\nu,\eta} &= g_{\alpha\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\eta} + g_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\eta}, \\
f^\sigma_{jk} &= \Gamma^i_{jk}f_i^\sigma - \Gamma^\sigma_{\nu\eta}f_j^\nu f_k^\eta - K^\sigma_{jk}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Přechody mezi souřadnicemi jsou hladké, složením vztahů (2.2) a (2.3) lze prověřit, že se jedná o transformaci souřadnic. Zkontrolujeme počet nezávislých souřadnic:

$$
\begin{aligned}
\dim(h_{ij}, \Gamma^i_{jk}) &= \frac{1}{2}n(n+1)^2, \\
\dim(g_{\sigma\nu}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}) &= \frac{1}{2}m(m+1)^2, \\
\dim(f_i^\sigma) &= m \cdot n, \\
\dim(K^\sigma_{ij}) &= m \cdot \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Je vidět, že součet těchto dimenzí je shodný s dimenzí $\mathcal{D}_1$.

Označme

$$q = \{h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, K^\sigma_{jk}\},$$

$$\overline{q} = \{\overline{h}_{ij}, \overline{g}_{\sigma\nu}, \overline{f}^\sigma_i, \overline{\Gamma}^i_{jk}, \overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta}, \overline{K}^\sigma_{jk}\}.$$

Akce grupy $L^2_n \times L^2_m$: $\overline{q} = (A^{-1}, C^{-1}) \cdot q$ v nových souřadnicích je dána rovnicemi:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a^a_i a^b_j h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= b^i_a a^b_j a^c_k \Gamma^a_{bc} + b^i_l a^l_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= d^\sigma_\alpha c^\beta_\nu c^\gamma_\eta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= d^\sigma_\alpha a^p_j a^l_k K^\alpha_{pl}.
\end{aligned}$$

Odvodíme zde poslední ze vztahů.

$$\begin{aligned}
\overline{K}^\sigma_{jk} &= \overline{\Gamma}^i_{jk}\overline{f}^\sigma_i - \overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta}\overline{f}^\nu_j\overline{f}^\eta_k - \overline{f}^\sigma_{jk} = (b^i_c a^a_j a^b_k \Gamma^c_{ab} + a^a_{jk} b^i_a) d^\sigma_\alpha a^t_i f^\alpha_t - \\
&\quad (d^\sigma_\alpha c^\delta_\nu c^\epsilon_\eta \Gamma^\alpha_{\delta\epsilon} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}) d^\nu_\beta a^a_j d^\eta_\gamma a^b_k f^\beta_a f^\gamma_b - \\
&\quad -(d^\sigma_{\beta\gamma} a^a_j a^b_k f^\beta_a f^\gamma_b + d^\sigma_\alpha a^a_{jk} f^\alpha_a + d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k f^\alpha_{ab}) = \\
&= d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k \Gamma^c_{ab} f^\alpha_c + d^\sigma_\alpha a^a_{jk} f^\alpha_a - \\
&\quad -d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} f^\beta_a f^\gamma_b - c^\alpha_{\nu\eta} d^\sigma_\alpha d^\nu_\beta d^\eta_\gamma a^a_j a^b_k f^\beta_a f^\gamma_b - \\
&\quad (-d^\sigma_{\beta\gamma} a^a_j a^b_k f^\beta_a f^\gamma_b + d^\sigma_\alpha a^a_{jk} f^\alpha_a + d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k f^\alpha_{ab}) = \\
&= d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k [\Gamma^c_{ab} f^\alpha_c - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} f^\beta_a f^\gamma_b - f^\alpha_{ab}] = d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k K^\alpha_{ab}.
\end{aligned}$$

Ve výpočtu bylo využito následujících rovností:

$$\begin{aligned}
d^\sigma_{\nu\eta} &= -c^\alpha_{\beta\gamma} d^\sigma_\alpha d^\beta_\nu d^\gamma_\eta, \\
a^i_k b^k_j &= \delta^i_j, \\
c^\alpha_\beta d^\beta_\gamma &= \delta^\alpha_\gamma.
\end{aligned}$$

Zúžením akce na podgrupu $K^2_n \times K^2_m$(tj. pro $a^i_j = \delta^i_j$, $c^\sigma_\nu = \delta^\sigma_\nu$) dostáváme:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= h_{ij}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= f^\sigma_i, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + a^i_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= \Gamma^\sigma_{\nu\eta} + c^\sigma_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= K^\sigma_{jk}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Popíšeme množinu $Q^1/(K^2_n \times K^2_m)$. Prvky $q, \overline{q} \in Q^1$ nazveme $(K^2_n \times K^2_m)$-*ekvivalentními* a píšeme $q \sim_{(K^2_n \times K^2_m)} \overline{q}$, jestliže existuje prvek $k \in (K^2_n \times K^2_m)$

tak, že $\overline{q} = k \cdot q$. Pro souřadnice dvou $(K_n^2 \times K_m^2)$-ekvivalentních prvků $\overline{q}, q$ v globálním souřadnicovém systému (Q^1, Ψ^1) platí vztahy (2.4). Z těchto vztahů je vidět, že každé dva ekvivalentní prvky mají stejný soubor souřadnic $h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma$ a naopak, mají-li dva prvky stejný soubor těchto souřadnic, pak jsou ekvivalentní. Příslušný prvek $k \in (K_n^2 \times K_m^2)$ má v kanonických souřadnicích tvar

$$k = ((\delta_j^i, \overline{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i), (\delta_\nu^\sigma, \overline{\Gamma}_{\nu\eta}^\sigma - \Gamma_{\nu\eta}^\sigma)).$$

Každý prvek množiny $Q^1/(K^2 \times K_m^2)$ lze tedy jednoznačně reprezentovat souborem souřadnic $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma)$.

Věta 2.3 *Množina $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ má strukturu orbit-variety. Hladká struktura je dána globálním souřadnicovým systémem $(Q^1/(K_n^2 \times K_m^2), \Phi)$, $\Phi = (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma)$, $1 \leq i \leq j \leq n$, $1 \leq \sigma \leq \nu \leq m$ a faktorová projekce $\pi : Q^1 \to Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$,*

$$\pi : (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{\nu\eta}^\sigma, K_{ij}^\sigma) \to (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma)$$

je submerze.

Důkaz: $K_n^2 \times K_m^2$-asociovanost globálního souřadnicového systému (Q^1, Ψ^1) plyne přímo z jeho definice. Z definice ekvivalence $q_1 \sim q_2$ plyne, že ke každému $q_1, q_2 \in Q^1$, $[q_1] \neq [q_2]$ existují $(K_n^2 \times K_m^2)$-invariantní otevřené množiny $W_{q_1}, W_{q_2} \subset Q^1$ takové, že $q_1 \in W_{q_1}$, $q_2 \in W_{q_2}$ a $W_{q_1} \cap W_{q_2} = \emptyset$, neboť topologie na Q^1 je euklidovská. Tvrzení tedy plyne z věty 1.3.

$\heartsuit$

Vztah (1.1) definuje na $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ levou akci grupy $H = i_n^2(L_n^1) \times i_m^2(L_m^1)$. Tato grupa je izomorfní s $L_n^1 \times L_m^1$, izomorfismus je dán vtahem $\kappa : H \ni ((a_j^i, 0), (c_\nu^\sigma, 0)) \to ((a_j^i), (c_\nu^\sigma)) \in L_n^1 \times L_m^1$. Souřadnicové vyjádření akce je hladké, množina $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ má tedy strukturu levé $L_n^1 \times L_m^1$-variety.

Uvažujme varietu

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 = \mathrm{Met}\mathbf{R}^n \times \mathrm{Met}\mathbf{R}^m \times \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m) \times \\ \times (\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m) \end{aligned} \tag{2.5}$$

s tenzorovou akcí grupy $L_n^1 \times L_m^1$.

Platí následující tvrzení:

Věta 2.4 *Levá $(L_n^1 \times L_m^1)$-varieta $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ je izomorfní s $\mathcal{P}_1$.*

Důkaz: Uvažujme globální souřadnicový systém $(Q^1/(K_n^2 \times K_m^2), \Phi)$ na $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ a kanonický globální souřadnicový systém na $\mathcal{P}_1$. Hledaný izomorfismus ι získáme, přiřadíme-li prvku $[q] \in Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$ prvek prostoru $\mathcal{P}_1$ o stejných souřadnicích. Zobrazení ι je difeomorfismem, neboť jeho souřadnicové vyjádření je $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^{\dim \mathcal{P}_1}}$, $(L_n^1 \times L_m^1)$-ekvivariantnost zobrazení ι plyne ze skutečnosti, že souřadnicové vyjádření levé akce grupy $L_n^1 \times L_m^1$ je pro obě variety totožné.

$\heartsuit$

Věta 2.5 *Každý diferenciální invariant prvního řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé $(L_n^1 \times L_m^1)$-varietě lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic $h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma$.*

Důkaz: Tvrzení plyne ze vztahů (2.4), věty 2.2 a věty 1.1 následovně: Podle věty 2.2 je grupa $G = L_n^2 \times L_m^2$, působící zleva na varietě Q^1 vnitřním semidirektním součinem svých podgrup $H = i_n^2(L_n^1) \times i_m^2(L_m^1)$ a $K = K_n^2 \times K_m^2$. Nechť $g = (A, C) \in G$, v souřadnicích $g = ((a_j^i, a_{jk}^i), (c_\nu^\sigma, c_{\nu\eta}^\sigma))$. Pro zobrazení α, β definovaná v odstavci 1.1 platí $\alpha(g) = ((\delta_j^i, a_{jk}^i), (\delta_\nu^\sigma, c_{\nu\eta}^\sigma))$, $\beta(g) = ((a_j^i, 0)(c_\nu^\sigma, 0)) = (i_n^2 \circ \pi_n^2(A), i_m^2 \circ \pi_m^2(C)) = ((i_n^2 \circ \pi_n^2) \times (i_m^2 \circ \pi_m^2))(g)$. Nechť $\mathcal{P}$ je libovolná levá $(L_n^1 \times L_m^1)$-varieta. Grupa H je izomorfní s $L_n^1 \times L_m^1$, lze tedy definovat její levou akci na $\mathcal{P}$ vztahem $((a_j^i, 0), (c_\nu^\sigma, 0)) \cdot p = (a_j^i, c_\nu^\sigma) \cdot p$, pro všechna $p \in \mathcal{P}$ a všechna $(a_j^i, c_\nu^\sigma) \in L_n^1 \times L_m^1$. Dále, pro každý diferenciální invariant $L : Q^1 \to \mathcal{P}$ platí

$$L(g \cdot q) = L((A, C) \cdot q) = (\pi_n^2(A), \pi_m^2(C)) \cdot L(q) =$$

$$((i_n^2 \circ \pi_n^2) \times (i_m^2 \circ \pi_m^2))(g) \cdot L(q) = \beta(g) \cdot L(q)$$

pro libovolné $g = (A, C) \in G$ a libovolné $q \in Q^1$. Pro Q^1, $\mathcal{P}$, L jsou tedy splňeny předpoklady věty 1.1. Jednoznačně určené H-ekvivariantní zobrazení $l : Q^1/(K_n^2 \times K_m^2) \to \mathcal{P}$, zaručené větou 1.1, ovšem závisí pouze na souřadnicích na $Q^1/(K_n^2 \times K_m^2)$, tj. na $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, K_{ij}^\sigma)$.

$\heartsuit$

Souřadnice h_{ij}, $g_{\sigma\nu}$, K_{ij}^σ, f_i^σ tvoří tzv. *bázi invariantů prvního řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé $L_n^1 \times L_m^1$-varietě.*

2.5 Geometrický význam souřadnice K_{ij}^σ

V tomto odstavci se zabýváme geometrickým významem invariantů prvního řádu. V první části dokazujeme, že souřadnice K_{ij}^σ jsou komponentami jistého geometrického objektu v daných souřadnicových systémech, v druhé části jsou uvedeny jednoduché konkrétní příklady. Jako dosud budeme uvažovat varietu $\mathcal{X}$ dimenze n s metrikou h, varietu $\mathcal{Y}$ dimenze m, $m \geq n$, s metrikou g a vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. V této kapitole předpokládáme, že zobrazení f je injektivní. Případ obecně neinjektivního vnoření bude řešen v kapitole 2.7.

Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$ resp. $(\mathcal{V}, \psi)$ jsou souřadnicová okolí bodu $x \in \mathcal{X}$ resp. $f(x) \in \mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}(\mathcal{X})$ resp. $\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ značí modul vektorových polí na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}^*(\mathcal{X})$ resp. $\mathcal{Z}^*(\mathcal{Y})$ značí modul diferenciálních 1-forem na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$. Nechť

$$\nabla^h : \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \ni (u, v) \to \nabla^h_u v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$$

resp.

$$\nabla^g : \mathcal{Z}(\mathcal{Y}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{Y}) \ni (\alpha, \beta) \to \nabla^g_\alpha \beta \in \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$$

je kovariantní derivace na varietě $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$ daná v souřadnicích Levi–Civitovou konexí:

$$\begin{aligned} \Gamma(h)^i_{jk} &= \frac{1}{2} h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}), \\ \Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta} &= \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha}). \end{aligned}$$

Pro zavedení dalších pojmů využejeme následujícího pomocného tvrzení:

Lemma: Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je injektivní vnoření. Ke každému vektorovému poli u podél $f(\mathcal{X})$ existuje otevřená množina $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ taková, že $f\mathcal{X}) \subset \mathcal{V}$ a vektorové pole $\tilde{u}$ na $\mathcal{V}$ tak, že $\tilde{u}|_{f(\mathcal{X})} = u$.

Důkaz: Dále budeme uvažovat pouze souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$, adaptované k vnoření f, tj. takové, pro které je souřadnicové vyjádření $z = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ vnoření f vložením kartézských prostorů. Nechť $(\mathcal{V}_i, \psi_i)$, $\psi_i = (y^\sigma_i)$, $i \in I$, jsou souřadnicová okolí na varietě $\mathcal{Y}$ taková, že $f(\mathcal{X}) \subset \cup_{i \in I} \mathcal{V}_i$. Nechť $u|_{\mathcal{V}_i \cap f(\mathcal{X})} = u^\sigma_i \frac{\partial}{\partial y^\sigma_i}$. Pro každé $i \in I$ definujeme vektorové pole v_i na $\mathcal{V}_i$ vztahem $v_i = v^\sigma_i \frac{\partial}{\partial y^\sigma_i}$, kde

$$v^\sigma_i(y) = u^\sigma_i(f \circ \varphi_i^{-1} \circ \mathrm{pr} \circ \psi_i(y)),$$

kde $y \in \mathcal{V}_i$ a pr značí projekci na prvních n komponent. Nechť χ_i je rozklad jednotky asociovaný s pokrytím $\mathcal{V}_i$. Pak vztahem

$$\tilde{u} = \sum_{i \in I} \chi_i u^\sigma_i \frac{\partial}{\partial y^\sigma_i}$$

je definováno vektorové pole na $\mathcal{Y}$. Je zřejmé, že $\tilde{u}|_{f(\mathcal{X})} = u$ neboť $v^\sigma_i(f(x)) = u^\sigma_i(f(x))$ pro všechna $i \in I$.

$\heartsuit$

Vektorové pole $\tilde{u}$ není určeno jednoznačně. Každé vektorové pole $\tilde{u}$, pro které $\tilde{u}|_{f(\mathcal{X})} = u$, budeme nazývat *rozšířením* vektorového pole u.

Nechť $u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ jsou hladká vektorová pole na $\mathcal{X}$, f_*u, f_*v jejich tečné obrazy vnořením f. Označme $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ (nějaké) rozšíření vektorových polí f_*u, f_*v na otevřené okolí množiny $f(\mathcal{X})$ v $\mathcal{Y}$. Vzhledem k injektivnosti zobrazení f můžeme definovat objekt $K_f \in (\mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \odot \mathcal{Z}^*(\mathcal{X})) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ vztahem

$$K_f(u, v, \omega) = \omega(f_*(\nabla^h_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v}).$$

Definice je nezávislá na konkrétní volbě rozšíření vektorových polí f_*u, f_*v.

Věta 2.6 *Objekt K_f má lokální souřadnicové vyjádření*

$$K_f = K^\sigma_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes_{f^*} \frac{\partial}{\partial y^\sigma}, \tag{2.6}$$

kde

$$K^\sigma_{jk}(x) = \Gamma(h)^i_{jk}(x) f^\sigma_i(x) - \Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta}(f(x)) f^\nu_j(x) f^\eta_k(x) - f^\sigma_{jk}(x). \tag{2.7}$$

Důkaz: Nechť $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ resp. $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ a nechť $\omega = \omega_\nu \mathrm{d}y^\nu$. Platí

$$\begin{aligned}
\nabla^h_u v &= (u^i v^j \Gamma(h)^k_{ij} + u^i \frac{\partial v^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^k}, \\
f_*(\nabla^h_u v) &= (f^\sigma_k u^i v^j \Gamma(h)^k_{ij} + f^\sigma_k u^i \frac{\partial v^k}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial y^\sigma}, \\
\nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v} &= (f^\gamma_i u^i f^\alpha_j v^j \Gamma(g)^\sigma_{\gamma\alpha} + f^\gamma_i u^i \frac{\partial}{\partial y^\gamma}(f^\sigma_j v^j)) \frac{\partial}{\partial y^\sigma}.
\end{aligned}$$

S využitím vztahu:

$$f^\gamma_i \frac{\partial}{\partial y^\gamma}(f^\sigma_j v^j) = \frac{\partial y^\gamma f(x)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial (f^\sigma_j v^j)(f(x))}{\partial y^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^i}(f^\sigma_j v^j) = f^\sigma_{ij} v^j + f^\sigma_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$$

dostáváme

$$f_*(\nabla^h_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}} \tilde{v} = (\Gamma(h)^k_{ij} f^\sigma_k - \Gamma(g)^\sigma_{\gamma\alpha} f^\gamma_i f^\alpha_j - f^\sigma_{ij}) u^i v^j \frac{\partial}{\partial y^\sigma} =$$

$$= K^\sigma_{ij} u^i v^j \frac{\partial}{\partial y^\sigma}.$$

Pak $K_f(u, v, \omega) = K^\sigma_{ij} u^i v^j \omega_\sigma$, tj. $K^\sigma_{ij} = K_f(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \mathrm{d}y^\sigma)$.

♡

Poznámka: K_f můžeme chápat jako symetrické bilineární zobrazení $\mathcal{Z}(\mathcal{X})\times\mathcal{Z}(\mathcal{X})\to\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$,

$$K_f(u,v)=K^\sigma_{ij}u^iv^j\frac{\partial}{\partial y^\sigma},$$

kde $u=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $v=v^j\frac{\partial}{\partial x^j}$. V dalším textu budeme pro názornost užívat právě tuto interpretaci objektu K_f.

Poznámka: Speciálně platí:

$$K^\sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial y^\sigma}=f_*(\nabla^h_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})-\nabla^g_{f_*\tilde{\frac{\partial}{\partial x^i}}}f_*\tilde{\frac{\partial}{\partial x^j}}.$$

Zobrazení $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ se nazývá *afinní*, jestliže pro každou geodetiku $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{X}$ na varietě $\mathcal{X}$ je křivka $f\circ\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{Y}$ geodetikou na varietě $\mathcal{Y}$.

Věta 2.7 *Nechť křivka $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{X}$ je libovolná geodetika, pak křivka $\beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{Y}$, $\beta=f\circ\alpha$ je geodetikou právě tehdy, když $K^\sigma_{jk}\equiv 0$.*

Důkaz: Z předpokladu věty vyplývá:

$$\Gamma(h)^i_{jk}\dot\alpha^j\dot\alpha^k+\ddot\alpha^q=0,\quad 1\le i\le n.$$

Křivka $\beta=f\circ\alpha$ je geodetikou právě tehdy když jsou splněny rovnice geodetiky:

$$\Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta}\dot\beta^\nu\dot\beta^\eta+\ddot\beta^\sigma=0,\quad 1\le\sigma\le m,$$

tj.

$$\Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta}f^\nu_jf^\eta_k\dot\alpha^j\dot\alpha^k+f^\sigma_{jk}\dot\alpha^j\dot\alpha^k+f^\sigma_i\ddot\alpha^i=0.$$

S využitím předpokladu platnosti rovnice geodetiky pro α nabývají předchozí rovnice tvaru:

$$(\Gamma(h)^i_{jk}f^\sigma_i-\Gamma(g)^\sigma_{\nu\eta}f^\nu_jf^\eta_k-f^\sigma_{jk})\dot\alpha^j\dot\alpha^k=0,\ \text{ tj. }\ K^\sigma_{jk}\dot\alpha^j\dot\alpha^k=0.$$

Vzhledem k libovolnosti geodetiky α je křivka $f\circ\alpha$ geodetikou právě tehdy, je-li $K^\sigma_{jk}=0$, $1\le j\le k\le n$, $1\le\sigma\le m$.

♡

Věta 2.8 *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $K^\sigma_{jk}\equiv 0$,

2. Zobrazení f je afinní,

3. $f_* \circ \nabla^h = \nabla^g \circ (f_* \times f_*)$.

Zobrazením $f_* \times f_*$ přitom rozumíme přiřazení
$\mathcal{Z}(\mathcal{X}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \ni (u,v) \to (f_* u, f_* v) \in \mathcal{Z}(\mathcal{Y}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$.

Důkaz: Věta je důsledkem vět 2.6 a 2.7 .

♡

Příklad 1: Uvažujme $\mathcal{X} = \mathbf{R}$ s kanonickým globálním souřadnicovým systémem a metrikou $h = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x$, $\mathcal{Y}$ nechť je libovolná m-rozměrná varieta s metrikou, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ vnoření. Pak vztahy $K^\sigma_{11} = 0$, $\sigma = 1, \ldots, m$ jsou rovnicemi geodetiky na varietě $\mathcal{Y}$. Skutečně, zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ představuje křivku v $\mathcal{Y}$. Označme proto $f^\sigma_1 = \dot{f}^\sigma$, $f^\sigma_{11} = \ddot{f}^\sigma$. Platí $\Gamma(h)^1_{11} = 0$, tj.

$$-K^\sigma_{11} = \Gamma(\mathcal{Y})^\sigma_{\nu\eta} \dot{f}^\nu \dot{f}^\eta + \ddot{f}^\sigma.$$

$-K^\sigma_{11}$ je tedy přímo levou stranou rovnic geodetiky na $\mathcal{Y}$. Příklad tak názorně dokumentuje speciální případ věty 2.7.

Příklad 2: Nechť $\mathcal{X} = S^2$, $(\mathcal{U}, \phi)$, $\phi = (\varphi, \vartheta)$, $\mathcal{U} \subset S^2$ je systém sférických souřadnic. $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^3$ uvažujeme s kanonickým globálním souřadnicovým systémem a metrikou danou v těchto souřadnicích vztahem $g_{\sigma\nu} = \delta_{\sigma\nu}$. Vnoření $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ nechť je dáno vztahy:

$$\begin{aligned}
f^1(\varphi,\vartheta) &= \cos\varphi \sin\vartheta, \\
f^2(\varphi,\vartheta) &= \sin\varphi \sin\vartheta, \\
f^3(\varphi,\vartheta) &= \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Na $\mathcal{X}$ uvažujme indukovanou metriku $h = f^* g$, tj. $h_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta, h_{\varphi\vartheta} = 0, h_{\vartheta\vartheta} = 1$. Platí: $\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = \Gamma^\vartheta_{\varphi\vartheta} = \Gamma^\varphi_{\vartheta\vartheta} = 0$, $\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta$, $\Gamma^\varphi_{\varphi\vartheta} = \cot\vartheta$. Dostáváme:

$$\begin{aligned}
K^1_{\varphi\varphi} &= \cos\varphi \sin^3\vartheta, \\
K^1_{\varphi\vartheta} &= 0, \\
K^1_{\vartheta\vartheta} &= \cos\varphi \sin\vartheta, \\
K^2_{\varphi\varphi} &= \sin\varphi \sin^3\vartheta, \\
K^2_{\varphi\vartheta} &= 0, \\
K^2_{\vartheta\vartheta} &= -\sin\varphi \sin\vartheta, \\
K^3_{\varphi\varphi} &= \sin^2\theta \cos\vartheta, \\
K^3_{\varphi\vartheta} &= 0, \\
K^3_{\vartheta\vartheta} &= -\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Vnoření f tedy není afinní.

Příklad 3: Uvažujeme-li vnoření f dvou variet s plochou metrikou, pak $K^\sigma_{ij} = -f^\sigma_{ij}$. V takovém případě je totiž $\Gamma(h)^i_{jk} = 0$, $\Gamma(\mathcal{Y})^\sigma_{\nu\eta} = 0$ pro $1 \leq i, j, k \leq n$, $1 \leq \sigma, \nu, \eta \leq m$.

Příklad 4: Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření, g je metrika na $\mathcal{Y}$, $h = f^*g$ indukovaná metrika na $\mathcal{X}$. V souřadnicích platí: $h_{ij} = f^\sigma_i f^\nu_j g_{\sigma\nu}$. Dále nechť h^{ab} je kontravariantní metrika na $\mathcal{X}$, splňující vztah $h^{ab} f^\sigma_a f^\nu_c g_{\sigma\nu} = \delta^b_c$. Pak

$$K^\sigma_{jk} = (h^{iq} f^\alpha_q f^\sigma_i - g^{\alpha\sigma}) f^\beta_j f^\gamma_k \Gamma_{\alpha,\beta\gamma} + h^{iq} f^\alpha_i f^\sigma_q f^\beta_{jk} g_{\alpha\beta} - f^\sigma_{jk},$$

kde $\Gamma_{\alpha,\beta\gamma} = g_{\alpha\delta}\Gamma^\delta_{\beta\gamma}$.

Příklad 5: Nechť $\mathcal{X} = S^1$, $\mathcal{Y} = S^2$, na $\mathcal{X}$ uvažujeme souřadnicový systém $(\mathcal{U}, t)$, $t \in (0, 2\pi)$ a metriku $h = \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$, na $\mathcal{Y}$ uvažujeme sférické souřadnice, g je metrika na S^2 z příkladu 2, tj. $g_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta$, $g_{\varphi\vartheta} = 0$, $g_{\vartheta\vartheta} = 1$. Uvažujme vnoření $f : S^1 \to S^2$:

$$\begin{aligned} f^\varphi &= t, \\ f^\vartheta &= \vartheta_0 = \text{konst.} \end{aligned}$$

kde $\vartheta_0 \in (0, \pi)$. Pak

$$\begin{aligned} K^\varphi_{11} &= 0, \\ K^\vartheta_{11} &= -\sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Požadujeme-li, aby zobrazení f bylo afinní, dostáváme očekávaný závěr $K^\vartheta_{11} = 0 \Leftrightarrow \vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$.

2.6 Druhá fundamentální forma

Ukážeme souvislost K_f s tzv. druhou fundamentální formou, která představuje běžný geometrický pojem v případě riemannovských metrik. Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je injektivní vnoření, $\dim\mathcal{X} = n$, $\dim\mathcal{Y} = m$, g resp. ∇^g je metrika resp. kovariantní derivace na $\mathcal{Y}$ příslušná Levi–Civitově konexi. Předpokládejme, že metrika g je riemannovská. Na $\mathcal{X}$ uvažujeme indukovanou metriku

$$\tilde{h} = f^*g.$$

Lze ukázat, že metrika h je rovněž riemannovská. Pro libovolné $\xi \in T_{f(x)}\mathcal{Y}$ označme $\xi^\top$ resp. $\xi^\perp$ ortogonální průmět na podprostor $f_*(T_x\mathcal{X}) \subset T_{f(x)}\mathcal{Y}$, resp. jeho ortogonální doplněk $f_*(T_x\mathcal{X})^\perp \subset T_{f(x)}\mathcal{Y}$, vzhledem ke skalárnímu součinu zadanému na $T_{f(x)}\mathcal{Y}$ metrikou g. Dále definujme indukovanou kovariantní derivaci na $\mathcal{X}$ vztahem

$$\tilde{\nabla}_u v = f_*^{-1}(\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\top.$$

Definice je korektní, neboť zobrazení f_* je injektivní. Výpočtem v souřadnicích lze ukázat, že indukovaná kovariantní derivace je totožná s kovariantní derivací určenou Levi–Civitovou konexí příslušnou indukované metrice $\tilde{h}$. Pro případ, kdy na varietě $\mathcal{X}$ uvažujeme indukovanou konexi a indukovanou metriku, budeme objekt K_f označovat symbolem $\tilde{K}_f$. Platí

$$\begin{aligned} \tilde{K}_f(u,v) &= f_*(\tilde{\nabla}_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v} = \\ &= f_*(\tilde{\nabla}_u v) - (\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\top - (\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\perp = \\ &= -(\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\perp. \end{aligned}$$

Nechť $\nu \in \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ je vektorové pole, splňující $g(\nu(f(x)), (f_*u)(f(x))) = 0$ pro všechna $u \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$ a všechna $x \in \mathcal{X}$. Takové pole nazýváme *transverzální k* $f(\mathcal{X})$. Definujeme *druhou fundamentální formu příslušnou* ν vztahem

$$l_\nu(u,v) = \tilde{h}(f_*^{-1}(\nabla^g_{\tilde{u}}\nu)^\top, v),$$

kde $u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Platí

$$\begin{aligned} l_\nu(u,v) &= g((\nabla^g_{\tilde{u}}\nu)^\top, f_*v) = g(\nabla^g_{\tilde{u}}\nu, f_*v) = \\ &= -g(\nu, \nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v}) = -g(\nu, (\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\perp) = \\ &= g(\nu, \tilde{K}_f(u,v)). \end{aligned}$$

Poznámka: Pro libovolné transverzální pole ν je $l_\nu(u,v) = g(\nu, \tilde{K}_f(u,v))$, $\forall u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Dále pro libovolné pole η, pro které $\exists w \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$, tak, že $\eta|_{f(\mathcal{X})} = f_*w$, platí $g(\eta, \tilde{K}_f(u,v)) = 0$, $\forall u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Objekt $\tilde{K}_f$ tedy jednoznačně určuje soubor druhých fundamentálních forem l_ν a sám je tímto souborem jednoznačně určen.

Pro $m = n + 1$ a pro normované vektorové pole ν, tj. takové, pro něž $|g(\nu,\nu)| = 1$ se druhé fundamentální formě l_ν říká také *vnější křivost*. Pro dimenze $m > n$ libovolné a $|g(\nu,\nu)| = 1$ budeme druhým fundamentálním formám říkat *zobecněné vnější křivosti*.

Nyní se zabývejme případem, kdy na $\mathcal{X}$ uvažujeme zcela obecnou metriku h a příslušnou kovariantní derivací ∇^h, určenou Levi–Civitovou konexí. Pak

$$\begin{aligned} K_f(u,v) &= f_*(\nabla^h_u v) - \nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v} = \\ &= f_*(\nabla^h_u v) - (\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\top - (\nabla^g_{\tilde{u}}\tilde{v})^\perp, \\ K_f(u,v) &= f_*(\nabla^h_u v - \tilde{\nabla}_u v) + \tilde{K}_f(u,v). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi)$ na $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V}, \psi)$ na $\mathcal{Y}$ nazýváme *adaptované k vnoření* f jestliže zobrazení $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je kanonické vložení. Potom pro komponenty f v těchto souřadnicích platí $f_i^\sigma = \delta_i^\sigma$ pro $\sigma, i, j = 1, \ldots, n$, $f_i^\sigma = 0$ pro $\sigma = n+1, \ldots, m; i, j = 1, \ldots, n$ a $f_{ij}^\sigma = 0$ pro $\sigma = 1, \ldots, m; i, j = 1, \ldots n$. Pro K_f v adaptovaných souřadnicích dostáváme

$$\begin{aligned} K_{ij}^\sigma &= \Gamma(h)_{ij}^\sigma - \Gamma(g)_{ij}^\sigma \quad \text{pro } \sigma = 1, \ldots, n, \\ K_{ij}^\sigma &= -\Gamma(g)_{ij}^\sigma \quad \text{pro } \sigma = n+1, \ldots, m \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ij}^\sigma &= 0 \quad \text{pro } \sigma = 1, \ldots, n, \\ \tilde{K}_{ij}^\sigma &= -\Gamma(g)_{ij}^\sigma \quad \text{pro } \sigma = n+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Existují-li na varietách $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ takové souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi)$ a $(\mathcal{V}, \psi)$ adaptované k vnoření f, které jsou zároveň geodetickými souřadnicovými systémy, pak zobrazení f je afinní na množině $\mathcal{U}$, neboť $K_f \equiv 0$.

Věta 2.9 *Injektivní vnoření* $f : (\mathcal{X}, \nabla^h) \to (\mathcal{Y}, \nabla^g)$ *je afinní právě tehdy, když*

(i) všechny druhé fundamentální formy jsou identicky rovny nule,

(ii) zobrazení $id : (\mathcal{X}, \nabla^h) \to (\mathcal{X}, \tilde{\nabla})$ *je afinní transformace, tj.* $\nabla^h = \tilde{\nabla}$.

Důkaz: Podmínky (i) a (ii) platí současně právě tehdy, je-li $K_f = 0$. Tvrzení tedy plyne z věty 2.8.

♡

Důsledkem tohoto tvrzení je např. známá skutečnost, že izometrické vnoření je afinní právě tehdy, když všechny druhé fundamentální formy jsou identicky rovny nule.

2.7 Případ obecně neinjektivního vnoření

Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření. Zvolme atlas $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$, $i \in I$ na $\mathcal{X}$ tak, že $f|_{\mathcal{U}_i}$ je injektivní. Definujme zobrazení $K_{f|_{\mathcal{U}_i}} : \mathcal{Z}(\mathcal{U}_i) \times \mathcal{Z}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$ vztahem

$$K_{f|_{\mathcal{U}_i}}(u, v) = f_*(\nabla_u^h v) - \nabla_{\tilde{u}}^g \tilde{v},$$

kde $u, v \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}_i)$, $\tilde{u}, \tilde{v}$ jsou rozšíření polí $f_* u, f_* v$ na otevřené okolí $f(\mathcal{U}_i)$ v $\mathcal{Y}$. Zobrazení $K_{f|_{\mathcal{U}_i}}$ má lokální souřadnicové vyjádření dané vztahem (2.6).

Věta 2.10 *Zobrazení f je afinní právě tehdy, když $K_{f|_{\mathcal{U}_i}} \equiv 0 \;\; \forall i \in I$.*

Důkaz: Věta je důsledkem věty 2.7.

♡

Poznámka: Objekt K_f nemůže být definován globálně, neboť v případě neinjektivního vnoření není obecně $f_* u$ resp. $f_* v$ vektorovým polem na $f(\mathcal{X})$.

B. Invarianty druhého řádu

2.8 Akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ na typové vrstvě Q^2 v kanonických souřadnicích

V tomto odstavci uvádíme vzorce pro přímé výpočty akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ na typové vrstvě Q^2 v kanonickém globálním souřadnicovém systému (Q^2, ϕ), $\phi = (h_{jk}, g_{\nu\eta}, h_{jk,i}, h_{jk,il}, g_{\nu\eta,\sigma}, g_{\nu\eta,\sigma\omega}, f^\sigma_i, f^\sigma_{jk}, f^\sigma_{jkl})$. Pro zjednodušení označujeme, obdobně jako v odstavci A, $\overline{q} = (A^{-1}, C^{-1}) \cdot q$ pro $q \in Q^2$, $A = (a^i_j, a^i_{jk}, a^i_{jkl})$ $C = (c^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta}, c^\sigma_{\nu\eta\omega})$, $A^{-1} = (b^i_j, b^i_{jk}, b^i_{jkl})$, $C^{-1} = (d^\sigma_\nu, d^\sigma_{\nu\eta}, d^\sigma_{\nu\eta\omega})$ a při označení souřadnic bodu q: $\phi(q) = (h_{jk}(q), \ldots, f^\sigma_{jkl}(q))$ budeme vyznačení bodu q vynechávat, tj. $h_{ij}(q) = h_{ij}$ resp. $h_{ij}(\overline{q}) = \overline{h}_{ij}$, atd., latinské indexy nabývají hodnot $1, \ldots, n$, řecké $1, \ldots, m$.

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a^a_i a^b_j h_{ab}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a, \\
\overline{h}_{ij,k} &= (a^a_{ik} a^b_j + a^a_i a^b_{jk}) h_{ab} + a^a_i a^b_j a^c_k h_{ab,c}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu,\eta} &= (c^\alpha_{\sigma\eta} c^\beta_\nu + c^\alpha_\sigma c^\beta_{\eta\nu}) g_{\alpha\beta} + c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_\eta g_{\alpha\beta,\gamma}, \\
\overline{f}^\sigma_{ik} &= d^\sigma_{\nu\kappa} a^j_i a^l_k f^\nu_j f^\kappa_l + d^\sigma_\nu a^j_{ik} f^\nu_j + d^\sigma_\nu a^j_i a^l_k f^\nu_{jl}, \\
\overline{h}_{ah,oj} &= (a^p_{aoj} a^q_h + a^p_{ao} a^q_{hj} + a^p_{aj} a^q_{oh} + a^p_a a^q_{hoj}) h_{pq} + a^v_a a^l_h a^k_o a^u_j h_{vl,ku} \\
&\quad + (a^v_a a^l_h a^k_{oj} + a^v_{aj} a^l_h a^k_o + a^v_a a^l_{jh} a^k_o + a^v_{ao} a^l_h a^k_j + a^v_a a^l_{ho} a^k_j) h_{vl,k}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu,\eta\omega} &= (c^\alpha_{\sigma\eta\omega} c^\beta_\nu + c^\alpha_{\sigma\eta} c^\beta_{\nu\omega} + c^\alpha_{\sigma\omega} c^\beta_{\eta\nu} + c^\alpha_\sigma c^\beta_{\nu\eta\omega}) g_{\alpha\beta} + c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_\eta c^\delta_\omega g_{\alpha\beta,\gamma\delta} \\
&\quad + (c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_{\eta\omega} + c^\alpha_{\sigma\omega} c^\beta_\nu c^\gamma_\eta + c^\alpha_\sigma c^\beta_{\omega\nu} c^\gamma_\eta + c^\alpha_{\sigma\eta} c^\beta_\nu c^\gamma_\omega + c^\alpha_\sigma c^\beta_{\nu\eta} c^\gamma_\omega) g_{\alpha\beta,\gamma}, \\
\overline{f}^\sigma_{hop} &= d^\sigma_{\nu\kappa\alpha} a^s_h a^q_o a^r_p f^\nu_s f^\kappa_q f^\alpha_r + d^\sigma_{\nu\kappa} [(f^\nu_{sq} f^\kappa_r + f^\nu_{sr} f^\kappa_q + f^\kappa_{qr} f^\nu_s) a^s_h a^q_o a^r_p + \\
&\quad + f^\nu_s f^\kappa_q (a^s_{hp} a^q_o + a^s_h a^q_{op} + a^s_{ho} a^q_p)] + d^\sigma_\alpha [a^i_{hop} f^\alpha_i + \\
&\quad + a^a_h a^b_o a^c_p f^\alpha_{abc} + (a^a_{ho} a^b_p + a^a_{hp} a^b_o + a^a_h a^b_{op}) f^\alpha_{ab}].
\end{aligned}
$$

Vztahy pro souřadnice $f_i^\sigma, f_{ij}^\sigma, f_{ijk}^\sigma$ byly odvozeny v kapitole 2.2. Určíme dimenzi prostoru Q^2.

$$\begin{aligned}
\dim T_n^2 Q_1 &= N_2 = \frac{n(n+1)}{2} + n\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \\
&= \frac{n}{4}(n+2)(n+1)^2, \\
\dim T_m^2 Q_2 &= M_2 = \frac{m(m+1)}{2} + m\cdot\frac{m(m+1)}{2} + \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 = \\
&= \frac{m}{4}(m+2)(m+1)^2, \\
\dim J^3_{(0,0)}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) &= P_2 = m\left(n + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right), \\
\mathcal{D}_2 = \dim Q^2 &= N_2 + M_2 + P_2.
\end{aligned}$$

2.9 Diferenciální invarianty druhého řádu s hodnotami v levé $L_n^2 \times L_m^2$-varietě

Místo souřadnic

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, h_{ij,k}, g_{\sigma\nu,\eta}, f_{jk}^\sigma, h_{ij,kl}, g_{\sigma\nu,\eta\omega}, f_{jkl}^\sigma)$$

zvolme na Q^2 nové souřadnice

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{\nu\eta}^\sigma, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S_{jkl}^i, S_{\nu\eta\omega}^\sigma, K_{jk}^\sigma, Q_{jkl}^\sigma),$$

přičemž transformační vztahy jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f_i^\sigma &= f_i^\sigma, \\
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}), \\
R_{ijkl} &= \frac{1}{2}(h_{il,jk} + h_{jk,il} - h_{ik,jl} - h_{jl,ik}) + h_{bc}(\Gamma_{jk}^b\Gamma_{il}^c - \Gamma_{jl}^b\Gamma_{ik}^c), \\
S_{jkl}^i &= h^{iq}[\frac{1}{3}(h_{qj,kl} + h_{ql,jk} + h_{qk,lj}) - \frac{1}{6}(h_{jk,lq} + h_{lj,kq} + h_{kl,jq})], \\
\Gamma_{\nu\eta}^\sigma &= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha}), \\
R_{\sigma\nu\eta\omega} &= \frac{1}{2}(g_{\sigma\omega,\nu\eta} + g_{\nu\eta,\sigma\omega} - g_{\sigma\eta,\nu\omega} - g_{\nu\omega,\sigma\eta}) + g_{\alpha\beta}(\Gamma_{\nu\eta}^\alpha\Gamma_{\sigma\omega}^\beta - \Gamma_{\nu\omega}^\alpha\Gamma_{\sigma\eta}^\beta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{\sigma}_{\nu\eta\omega} &= g^{\alpha\sigma}[\frac{1}{3}(g_{\alpha\nu,\eta\omega}+g_{\alpha\omega,\nu\eta}+g_{\alpha\eta,\omega\nu})-\frac{1}{6}(g_{\nu\eta,\omega\alpha}+g_{\omega\nu,\eta\alpha}+g_{\eta\omega,\nu\alpha})],\\
K^{\sigma}_{jk} &= \Gamma^{i}_{jk}f^{\sigma}_{i}-\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}f^{\nu}_{j}f^{\eta}_{k}-f^{\sigma}_{jk},\\
Q^{\sigma}_{jkl} &= S^{i}_{jkl}f^{\sigma}_{i}-S^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}f^{\beta}_{j}f^{\gamma}_{k}f^{\delta}_{l}-f^{\sigma}_{jkl}.
\end{aligned}$$

Souřadnice Γ^{i}_{jk},$\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}$, K^{σ}_{jk}, Q^{σ}_{jkl}, S^{i}_{jkl}, $S^{\sigma}_{\nu\eta\omega}$ jsou symetrické v dolních indexech, souřadnice R_{ijkl}, resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega}$ jsou antisymetrické v prvních dvou indexech, antisymetrické v posledních dvou indexech a symetrické vůči záměně první a druhé dvojice indexů, navíc splňují rovnost $R_{ijkl}+R_{iljk}-R_{kilj}=0$ resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega}+R_{\sigma\omega\eta\nu}-R_{\eta\sigma\omega\nu}=0$. Ukážeme, že nové souřadnice definují na typové vrstvě Q^2 globální souřadnicový systém (Q^2,Ψ^2). Platí

$$h^{ij}h_{jk}=\delta^{i}_{k},$$

$$g^{\sigma\nu}g_{\nu\eta}=\delta^{\sigma}_{\eta}.$$

Inverzní transformace je dána rovnicemi:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij},\\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu},\\
f^{\sigma}_{i} &= f^{\sigma}_{i},\\
h_{ij,k} &= h_{iq}\Gamma^{q}_{jk}+h_{jq}\Gamma^{q}_{ik},\\
g_{\sigma\nu,\eta} &= g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\eta}+g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\eta},\\
f^{\sigma}_{jk} &= \Gamma^{i}_{jk}f^{\sigma}_{i}-\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}f^{\nu}_{j}f^{\eta}_{k}-K^{\sigma}_{jk},\\
h_{ij,kl} &= h_{iq}S^{q}_{jkl}+h_{jq}S^{q}_{ikl}-\frac{1}{3}(R_{ikjl}+R_{jkil})+\\
&\quad +\frac{1}{3}h_{rq}(\Gamma^{q}_{il}\Gamma^{r}_{kj}+\Gamma^{q}_{jl}\Gamma^{r}_{ki}-2\Gamma^{q}_{ij}\Gamma^{r}_{kl}),\\
g_{\sigma\nu,\eta\omega} &= g_{\sigma\alpha}S^{\alpha}_{\nu\eta\omega}+g_{\nu\alpha}S^{\alpha}_{\sigma\eta\omega}-\frac{1}{3}(R_{\sigma\eta\nu\omega}+R_{\nu\eta\sigma\omega})+\\
&\quad +\frac{1}{3}g_{\alpha\beta}(\Gamma^{\alpha}_{\sigma\omega}\Gamma^{\beta}_{\eta\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\nu\omega}\Gamma^{\beta}_{\eta\sigma}-2\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\beta}_{\eta\omega}),\\
f^{\sigma}_{jkl} &= S^{i}_{jkl}f^{\sigma}_{i}-S^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}f^{\beta}_{j}f^{\gamma}_{k}f^{\delta}_{l}-Q^{\sigma}_{jkl}.
\end{aligned}$$

Přechody mezi souřadnicemi jsou hladké, složením obou vztahů lze prověřit, že se jedná o transformaci souřadnic. Zkontrolujeme počet nezávislých souřadnic:

$$\begin{aligned}
\dim(h_{ij},\Gamma^{i}_{jk}) &= \frac{1}{2}n(n+1)^2,\\
\dim(R_{ijkl}) &= \frac{n^2}{12}(n^2-1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim(S^i_{jkl}) &= \frac{n^2}{6}(n+1)(n+2),\\
N_2 &= \dim(h_{ij}, \Gamma^i_{jk}, R_{ijkl}, S^i_{jkl}),
\end{aligned}$$

analogicky

$$M_2 = \dim(g_{\sigma\nu}, \Gamma^\sigma_{\nu\eta}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S^\sigma_{\nu\eta\omega}),$$

$$\begin{aligned}
\dim(f^\sigma_i) &= m \cdot n,\\
\dim(K^\sigma_{ij}) &= m \cdot \frac{n(n+1)}{2},\\
\dim(Q^\sigma_{ijk}) &= m\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right),\\
P_2 &= \dim(f^\sigma_i, K^\sigma_{ij}, Q^\sigma_{ijk}).
\end{aligned}$$

Akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ v nových souřadnicích je dána rovnicemi:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= a^a_i a^b_j h_{ab},\\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu g_{\alpha\beta},\\
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a,\\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= b^i_a a^b_j a^c_k \Gamma^a_{bc} + b^i_l a^l_{jk},\\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= d^\sigma_\alpha c^\beta_\nu c^\gamma_\eta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta},\\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= d^\sigma_\alpha a^p_j a^l_k K^\alpha_{pl},\\
\overline{R}_{ijkl} &= a^a_i a^b_j a^c_k a^d_l R_{abcd}, \qquad (2.9)\\
\overline{S}^i_{jkl} &= a^a_j a^b_k a^c_l b^i_d S^d_{abc} + a^r_{jkl} b^i_r +\\
&+ (a^s_j a^r_{kl} + a^s_k a^r_{jl} + a^s_l a^r_{kj}) b^i_u \Gamma^u_{sr} +\\
&+ \frac{1}{3}(a^s_{kj} a^r_l + a^s_{lj} a^r_k + a^s_{kl} a^r_j) b^i_u \Gamma^q_{pr} h_{sq} h^{up} +\\
&+ \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^s_j a^r_l + a^p_{jq} a^s_k a^r_l + a^p_{lq} a^s_j a^r_k) b^i_u b^q_v h^{uv} h_{pt} \Gamma^t_{sr} +\\
&+ \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^r_{jl} + a^p_{lq} a^r_{jk} + a^p_{jq} a^r_{kl}) b^i_a b^q_b h_{pr} h^{ab},\\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_\eta c^\delta_\omega R_{\alpha\beta\gamma\delta},\\
\overline{S}^\sigma_{\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\nu c^\beta_\eta c^\gamma_\omega d^\sigma_\delta S^\delta_{\alpha\beta\gamma} + c^\varrho_{\nu\eta\omega} d^\sigma_\varrho +\\
&+ (c^\phi_\nu c^\varrho_{\eta\omega} + c^\phi_\eta c^\varrho_{\nu\omega} + c^\phi_\omega c^\varrho_{\eta\nu}) d^\sigma_\varepsilon \Gamma^\varepsilon_{\phi\varrho} +\\
&+ \frac{1}{3}(c^\phi_{\eta\nu} c^\varrho_\omega + c^\phi_{\omega\nu} c^\varrho_\eta + c^\phi_{\eta\omega} c^\varrho_\nu) d^\sigma_\varepsilon \Gamma^\zeta_{\pi\varrho} g_{\phi\zeta} g^{\varepsilon\pi} +\\
&+ \frac{1}{3}(c^\pi_{\eta\xi} c^\phi_\nu c^\varrho_\omega + c^\pi_{\nu\xi} c^\phi_\eta c^\varrho_\omega + c^\pi_{\omega\xi} c^\phi_\nu c^\varrho_\eta) d^\sigma_\varepsilon d^\xi_\chi g^{\varepsilon\chi} g_{\pi\zeta} \Gamma^\zeta_{\phi\varrho} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{3}(c^{\pi}_{\eta\xi}c^{\varrho}_{\nu\omega}+c^{\pi}_{\omega\xi}c^{\varrho}_{\nu\eta}+c^{\pi}_{\nu\xi}c^{\varrho}_{\eta\omega})d^{\sigma}_{\alpha}d^{\xi}_{\beta}g_{\pi\varrho}g^{\alpha\beta},\\
\overline{Q}^{\sigma}_{jkl} \;=\; & d^{\sigma}_{\alpha}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}Q^{\alpha}_{abc}+\\
& +d^{\sigma}_{\alpha}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}c^{\alpha}_{\nu\eta}(d^{\nu}_{\pi\xi}d^{\eta}_{\phi}+d^{\nu}_{\pi\phi}d^{\eta}_{\xi}+d^{\nu}_{\phi\xi}d^{\eta}_{\pi})f^{\pi}_{a}f^{\xi}_{b}f^{\phi}_{c}+\\
& +d^{\sigma}_{\alpha}(a^{s}_{j}a^{r}_{kl}+a^{s}_{k}a^{r}_{lj}+a^{s}_{l}a^{r}_{kj})f^{\alpha}_{c}\Gamma^{c}_{sr}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{s}_{kj}a^{r}_{l}+a^{s}_{lj}a^{r}_{k}+a^{s}_{kl}a^{r}_{j})f^{\alpha}_{c}\Gamma^{t}_{pr}h_{st}h^{cp}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{p}_{kq}a^{s}_{j}a^{r}_{l}+a^{p}_{jq}a^{s}_{k}a^{r}_{l}+a^{p}_{lq}a^{s}_{j}a^{r}_{k})f^{\alpha}_{c}h^{cv}b^{q}_{v}h_{pt}\Gamma^{t}_{sr}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{p}_{kq}a^{r}_{jl}+a^{p}_{lq}a^{r}_{jk}+a^{p}_{jq}a^{r}_{kl})f^{\alpha}_{c}h^{cv}b^{q}_{v}h_{pr}-\\
& -[(c^{\delta}_{\nu}d^{\beta}_{\eta\omega}+c^{\delta}_{\eta}c^{\beta}_{\nu\omega}+c^{\delta}_{\omega}c^{\beta}_{\nu\eta})\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\delta}_{\nu\eta}c^{\beta}_{\omega}+c^{\delta}_{\nu\omega}c^{\beta}_{\eta}+c^{\delta}_{\eta\omega}c^{\beta}_{\nu})\Gamma^{\zeta}_{\gamma\beta}g_{\delta\zeta}g^{\alpha\gamma}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\delta}_{\eta\varepsilon}c^{\beta}_{\nu}c^{\gamma}_{\omega}+c^{\delta}_{\nu\varepsilon}c^{\beta}_{\eta}c^{\gamma}_{\omega}+c^{\delta}_{\omega\varepsilon}c^{\beta}_{\nu}c^{\gamma}_{\eta})d^{\varepsilon}_{\varrho}g^{\alpha\varrho}g_{\delta\zeta}\Gamma^{\zeta}_{\beta\gamma}+\\
& +\frac{1}{3}(c^{\delta}_{\eta\varepsilon}c^{\beta}_{\nu\omega}+c^{\delta}_{\omega\varepsilon}c^{\beta}_{\nu\eta}+c^{\delta}_{\nu\varepsilon}c^{\beta}_{\eta\omega})d^{\varepsilon}_{\varrho}g^{\alpha\varrho}g_{\delta\beta}]\times\\
& \times d^{\sigma}_{\alpha}d^{\nu}_{\pi}d^{\eta}_{\xi}d^{\omega}_{\phi}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}f^{\pi}_{a}f^{\xi}_{b}f^{\phi}_{c}-\\
& -d^{\sigma}_{\alpha\beta}[(f^{\alpha}_{ab}f^{\beta}_{c}+f^{\alpha}_{ac}f^{\beta}_{b}+f^{\alpha}_{bc}f^{\beta}_{a})a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}+\\
& +f^{\alpha}_{a}f^{\beta}_{b}(a^{a}_{jl}a^{b}_{k}+a^{a}_{j}a^{b}_{kl}+a^{a}_{jk}a^{b}_{l})]-\\
& -d^{\sigma}_{\alpha}(a^{a}_{jk}a^{b}_{l}+a^{a}_{jl}a^{b}_{k}+a^{a}_{j}a^{b}_{kl})f^{\alpha}_{ab}.
\end{aligned}
$$

Odvodíme zde pouze vztah pro souřadnici Q^{σ}_{jkl}. Vztah pro K^{σ}_{jk} byl odvozen v kapitole 2.4.

$$
\begin{aligned}
\overline{Q}^{\sigma}_{jkl} \;=\; & \overline{S}^{i}_{jkl}\overline{f}^{\sigma}_{i}-\overline{S}^{\sigma}_{\nu\eta\omega}\overline{f}^{\nu}_{j}\overline{f}^{\eta}_{k}\overline{f}^{\omega}_{l}-\overline{f}^{\sigma}_{jkl}=\\
=\; & a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}b^{i}_{p}d^{\sigma}_{\alpha}a^{d}_{i}S^{p}_{abc}f^{\alpha}_{d}+a^{r}_{jkl}b^{i}_{r}a^{c}_{i}d^{\sigma}_{\alpha}f^{\alpha}_{c}+\\
& +d^{\sigma}_{\alpha}(a^{s}_{j}a^{r}_{kl}+a^{s}_{k}a^{r}_{lj}+a^{s}_{l}a^{r}_{kj})b^{i}_{u}a^{c}_{i}f^{\alpha}_{c}\Gamma^{u}_{sr}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{s}_{kj}a^{r}_{l}+a^{s}_{lj}a^{r}_{k}+a^{s}_{kl}a^{r}_{j})b^{i}_{u}a^{c}_{i}f^{\alpha}_{c}\Gamma^{t}_{pr}h_{st}h^{up}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{p}_{kq}a^{s}_{j}a^{r}_{l}+a^{p}_{jq}a^{s}_{k}a^{r}_{l}+a^{p}_{lq}a^{s}_{j}a^{r}_{k})b^{i}_{u}a^{c}_{i}f^{\alpha}_{c}h^{uv}b^{q}_{v}h_{pt}\Gamma^{t}_{sr}+\\
& +\frac{1}{3}d^{\sigma}_{\alpha}(a^{p}_{kq}a^{r}_{jl}+a^{p}_{lq}a^{q}_{jk}+a^{p}_{jq}a^{q}_{kl})b^{i}_{u}a^{c}_{i}f^{\alpha}_{c}h^{uv}b^{q}_{v}h_{pr}-\\
& -c^{\alpha}_{\nu}c^{\beta}_{\eta}c^{\gamma}_{\omega}d^{\sigma}_{\delta}d^{\nu}_{\pi}d^{\eta}_{\xi}d^{\omega}_{\phi}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}S^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}f^{\pi}_{a}f^{\xi}_{b}f^{\phi}_{c}-\\
& -c^{\alpha}_{\nu\eta\omega}d^{\sigma}_{\alpha}d^{\nu}_{\pi}d^{\eta}_{\xi}d^{\omega}_{\phi}a^{a}_{j}a^{b}_{k}a^{c}_{l}f^{\pi}_{a}f^{\xi}_{b}f^{\phi}_{c}-\\
& -[(c^{\delta}_{\nu}c^{\beta}_{\eta\omega}+c^{\delta}_{\eta}c^{\beta}_{\nu\omega}+c^{\delta}_{\omega}c^{\beta}_{\nu\eta})\Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{3}(c^\delta_{\nu\eta}c^\beta_\omega + c^\delta_{\nu\omega}c^\beta_\eta + c^\delta_{\eta\omega}c^\beta_\nu)\Gamma^\zeta_{\gamma\beta}g_{\delta\zeta}g^{\alpha\gamma} + \\
& +\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon}c^\beta_\nu c^\gamma_\omega + c^\delta_{\nu\varepsilon}c^\beta_\eta c^\gamma_\omega + c^\delta_{\omega\varepsilon}c^\beta_\nu c^\gamma_\eta)d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho}g_{\delta\zeta}\Gamma^\zeta_{\beta\gamma} + \\
& +\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon}c^\beta_{\nu\omega} + c^\delta_{\omega\varepsilon}c^\beta_{\nu\eta} + c^\delta_{\nu\varepsilon}c^\beta_{\eta\omega})d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho}g_{\delta\beta}] \times \\
& \times d^\sigma_\alpha d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi a^a_j a^b_k a^c_l f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c - d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k a^c_l f^\alpha_{abc} - \\
& -d^\sigma_{\alpha\beta\gamma}a^a_j a^b_k a^c_l f^\alpha_a f^\beta_b f^\gamma_c - d^\sigma_\alpha a^q_{jkl}f^\alpha_q - \\
& -d^\sigma_{\alpha\beta}[(f^\alpha_{ab}f^\beta_c + f^\alpha_{ac}f^\beta_b + f^\alpha_{bc}f^\beta_a)a^a_j a^b_k a^c_l + \\
& +f^\alpha_a f^\beta_b(a^a_{jl}a^b_k + a^a_j a^b_{kl} + a^a_{jk}a^b_l)] - \\
& -d^\sigma_\alpha(a^a_{jk}a^b_l + a^a_{jl}a^b_k + a^a_j a^b_{kl})f^\alpha_{ab} = \\
= \quad & d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k a^c_l(S^q_{abc}f^\alpha_q - S^\alpha_{\delta\beta\gamma}f^\delta_a f^\beta_b f^\gamma_c - f^\alpha_{abc}) + \\
& +d^\sigma_\alpha a^a_j a^b_k a^c_l c^\alpha_{\nu\eta}(d^\nu_{\pi\xi}d^\eta_\phi + d^\nu_{\pi\phi}d^\eta_\xi + d^\nu_{\phi\xi}d^\eta_\pi)f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c + \\
& +d^\sigma_\alpha(a^s_j a^r_{kl} + a^s_k a^r_{lj} + a^s_l a^r_{kj})f^\alpha_c\Gamma^c_{sr} + \\
& +\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^s_{kj}a^r_l + a^s_{lj}a^r_k + a^s_{kl}a^r_j)f^\alpha_c\Gamma^t_{pr}h_{st}h^{cp} + \\
& +\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^p_{kq}a^s_j a^r_l + a^p_{jq}a^s_k a^r_l + a^p_{lq}a^s_j a^r_k)f^\alpha_c h^{cv}b^q_v h_{pt}\Gamma^t_{sr} + \\
& +\frac{1}{3}d^\sigma_\alpha(a^p_{kq}a^r_{jl} + a^p_{lq}a^r_{jk} + a^p_{jq}a^r_{kl})f^\alpha_c h^{cv}b^q_v h_{pr} - \\
& -[(c^\delta_\nu d^\beta_{\eta\omega} + c^\delta_\eta c^\beta_{\nu\omega} + c^\delta_\omega c^\beta_{\nu\eta})\Gamma^\alpha_{\delta\beta} + \\
& +\frac{1}{3}(c^\delta_{\nu\eta}c^\beta_\omega + c^\delta_{\nu\omega}c^\beta_\eta + c^\delta_{\eta\omega}c^\beta_\nu)\Gamma^\zeta_{\gamma\beta}g_{\delta\zeta}g^{\alpha\gamma} + \\
& +\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon}c^\beta_\nu c^\gamma_\omega + c^\delta_{\nu\varepsilon}c^\beta_\eta c^\gamma_\omega + c^\delta_{\omega\varepsilon}c^\beta_\nu c^\gamma_\eta)d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho}g_{\delta\zeta}\Gamma^\zeta_{\beta\gamma} + \\
& +\frac{1}{3}(c^\delta_{\eta\varepsilon}c^\beta_{\nu\omega} + c^\delta_{\omega\varepsilon}c^\beta_{\nu\eta} + c^\delta_{\nu\varepsilon}c^\beta_{\eta\omega})d^\varepsilon_\varrho g^{\alpha\varrho}g_{\delta\beta}] \times \\
& \times d^\sigma_\alpha d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi a^a_j a^b_k a^c_l f^\pi_a f^\xi_b f^\phi_c - \\
& -d^\sigma_{\alpha\beta}[(f^\alpha_{ab}f^\beta_c + f^\alpha_{ac}f^\beta_b + f^\alpha_{bc}f^\beta_a)a^a_j a^b_k a^c_l + \\
& +f^\alpha_a f^\beta_b(a^a_{jl}a^b_k + a^a_j a^b_{kl} + a^a_{jk}a^b_l)] - \\
& -d^\sigma_\alpha(a^a_{jk}a^b_l + a^a_{jl}a^b_k + a^a_j a^b_{kl})f^\alpha_{ab}.
\end{aligned}
$$

Ve výpočtu bylo využito následujících rovností:

$$
\begin{aligned}
d^\sigma_{\pi\xi\phi} &= -d^\sigma_\alpha d^\nu_\pi d^\eta_\xi d^\omega_\phi c^\alpha_{\nu\eta\omega} - d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}(d^\nu_{\pi\xi}d^\eta_\phi + d^\nu_{\pi\phi}d^\eta_\xi + d^\nu_{\xi\phi}d^\eta_\pi), \\
d^\sigma_{\nu\eta} &= -c^\alpha_{\beta\gamma}d^\sigma_\alpha d^\beta_\nu d^\gamma_\eta, \\
a^i_k b^k_j &= \delta^i_j,
\end{aligned}
$$

$$c^{\alpha}_{\beta} d^{\beta}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Nechť $\pi^{3,2}_n$ resp. $\pi^{3,2}_m$ je projekce $L^3_n \to L^2_n$ resp. $L^3_m \to L^2_m$. Označme $K^{3,2}_n$ resp. $K^{3,2}_m$ jádro této projekce. Množina $(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m) \subset (L^3_n \times L^3_m)$ je tvořena prvky $((\delta^i_j, 0, a^i_{jkl}), (\delta^{\sigma}_{\nu}, 0, c^{\sigma}_{\nu\eta\omega}))$ a je normální podgrupou grupy $L^3_n \times L^3_m$. Zúžením akce grupy na tuto podgrupu dostáváme:

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= h_{ij},\\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu},\\
\overline{f}^{\sigma}_i &= f^{\sigma}_i,\\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk},\\
\overline{R}_{ijkl} &= R_{ijkl},\\
\overline{S}^i_{jkl} &= S^i_{jkl} + a^i_{jkl},\\
\overline{\Gamma}^{\sigma}_{\nu\eta} &= \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta},\\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= R_{\sigma\nu\eta\omega},\\
\overline{S}^{\sigma}_{\nu\eta\omega} &= S^{\sigma}_{\nu\eta\omega} + c^{\sigma}_{\nu\eta\omega},\\
\overline{K}^{\sigma}_{jk} &= K^{\sigma}_{jk},\\
\overline{Q}^{\sigma}_{jkl} &= Q^{\sigma}_{jkl}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Analogicky jako v kapitole 2.4 je ze vztahů (2.10) vidět, že každou třídu $Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$ lze jednoznačně reprezentovat souborem souřadnic (h_{ij},$g_{\sigma\nu}$, f^{σ}_j, K^{σ}_{jk}, Γ^i_{jk}, $\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}$, R_{ijkl}, $R_{\sigma\nu\eta\omega}$, Q^{σ}_{jkl}). Na množině $Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$ definujeme levou akci grupy $L^2_n \times L^2_m$ vztahem:

$$(A, C) \cdot [q] = [(i^{2,3}_n A, i^{2,3}_m C) \cdot q],$$

kde $i^{2,3}_n : L^2_n \to L^3_n$ resp. $i^{2,3}_m : L^2_m \to L^3_m$ je kanonické vložení. Dokážeme, že akce je korektně definována, t.j. nezávisí na volbě reprezentanta q a platí

$$(A, C)((S, T) \cdot [q]) = (AS, CT) \cdot [q]. \tag{2.11}$$

Nezávislost na volbě reprezentanta je zřejmá ze vztahů (2.10) a (2.9), dále platí

$$(\pi^{3,2}_n(i^{2,3}_n A \cdot i^{2,3}_n S), \pi^{3,2}_m(i^{2,3}_m C \cdot i^{2,3}_m T)) = (\pi^{3,2}_n i^{2,3}_n (AS), (\pi^{3,2}_m i^{2,3}_m (CT)),$$

tedy

$$[(i^{2,3}_n A \cdot i^{2,3}_n S, i^{2,3}_m C \cdot i^{2,3}_m T) \cdot q] = [(i^{2,3}_n (AS), i^{2,3}_m (CT)) \cdot q],$$

což implikuje vztah (2.11).

Vztah (1.4) definuje levou akci grupy $(L^3_n \times L^3_n)/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$ na množině $Q^2/(K^{3,2}_n \times K^{3,2}_m)$.

Věta 2.11 *Nechť* $\pi : Q^2 \to Q^2/(K_n^{3,2} \times K_m^{3,2})$ *je faktorová projekce. Ke každému diferenciálnímu invariantu* L *druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé* $(L_n^2 \times L_m^2)$ *varietě* $\mathcal{P}$ *existuje právě jedno* $(L_n^2 \times L_m^2)$*-ekvivariantní zobrazení* $l : Q^2/(K_n^{3,2} \times K_m^{3,2}) \to \mathcal{P}$ *splňující* $L = l \circ \pi$.

Důkaz: Věta je důsledkem vět 1.2 a 1.5. Zde značíme $G = L_n^3 \times L_m^3$, $Q = Q^2$, $F = L$, $f = l$, $\beta = \pi_n^{3,2} \times \pi_m^{3,2}$ a podle věty 1.5 $G/K = (L_n^3 \times L_m^3)/(K_n^{3,2} \times K_m^{3,2}) \sim L_n^2 \times L_m^2$. Předpoklady věty 1.2 jsou tedy splněny.

♡

Věta 2.12 *Každý diferenciální invariant druhého řádu z vnoření variet s metrikou lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic* $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_j^\sigma, K_{jk}^\sigma, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{\nu\eta}^\sigma, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, Q_{jkl}^\sigma)$.

Důkaz: Věta je přímým důsledkem věty 2.11.

♡

Souřadnice h_{ij}, $g_{\sigma\nu}$, K_{ij}^σ, f_i^σ, Γ_{jk}^i, $\Gamma_{\nu\eta}^\sigma$, R_{ijkl}, $R_{\sigma\nu\eta\omega}$, Q_{jkl}^σ) tvoří tzv. *bázi invariantů druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé* $L_n^2 \times L_m^2$*-varietě.*

2.10 Diferenciální invarianty druhého řádu s hodnotami v levé $L_n^1 \times L_m^1$-varietě

Místo souřadnic

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, h_{ij,k}, g_{\sigma\nu,\eta}, f_{jk}^\sigma, h_{ij,kl}, g_{\sigma\nu,\eta\omega}, f_{jkl}^\sigma)$$

zvolme na Q^2 nové souřadnice

$$(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f_i^\sigma, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{\nu\eta}^\sigma, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S_{jkl}^i, S_{\nu\eta\omega}^\sigma, K_{jk}^\sigma, P_{jkl}^\sigma),$$

přičemž transformační vztahy jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij}, \\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
f_i^\sigma &= f_i^\sigma, \\
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} h^{iq}(h_{qj,k} + h_{qk,j} - h_{jk,q}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{ijkl} &= \frac{1}{2}(h_{il,jk}+h_{jk,il}-h_{ik,jl}-h_{jl,ik})+h_{bc}(\Gamma^b_{jk}\Gamma^c_{il}-\Gamma^b_{jl}\Gamma^c_{ik}),\\
S^i_{jkl} &= h^{iq}[\frac{1}{3}(h_{qj,kl}+h_{ql,jk}+h_{qk,lj})-\frac{1}{6}(h_{jk,lq}+h_{lj,kq}+h_{kl,jq})],\\
\Gamma^\sigma_{\nu\eta} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\alpha\nu,\eta}+g_{\alpha\eta,\nu}-g_{\nu\eta,\alpha}),\\
R_{\sigma\nu\eta\omega} &= \frac{1}{2}(g_{\sigma\omega,\nu\eta}+g_{\nu\eta,\sigma\omega}-g_{\sigma\eta,\nu\omega}-g_{\nu\omega,\sigma\eta})+g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\nu\eta}\Gamma^\beta_{\sigma,\omega}-\Gamma^\alpha_{\nu\omega}\Gamma^\beta_{\sigma\eta}),\\
S^\sigma_{\nu\eta\omega} &= g^{\alpha\sigma}[\frac{1}{3}(g_{\alpha\nu,\eta\omega}+g_{\alpha\omega,\nu\eta}+g_{\alpha\eta,\omega\nu})-\frac{1}{6}(g_{\nu\eta,\omega\alpha}+g_{\omega\nu,\eta\alpha}+g_{\eta\omega,\nu\alpha})],\\
K^\sigma_{jk} &= \Gamma^i_{jk}f^\sigma_i-\Gamma^\sigma_{\nu\eta}f^\nu_j f^\eta_k-f^\sigma_{jk},\\
P^\sigma_{ijk} &= \frac{1}{3}[\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(f^\alpha_k K^\beta_{ij}+f^\alpha_j K^\beta_{ik}+f^\alpha_i K^\beta_{jk})-\\
&\quad -2(K^\sigma_{qj}\Gamma^q_{ki}+K^\sigma_{qk}\Gamma^q_{ji}+K^\sigma_{qi}\Gamma^q_{kj})+\\
&\quad +K^\sigma_{ij,k}+K^\sigma_{ik,j}+K^\sigma_{jk,i}].
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
K^\sigma_{ij,k} &= \Gamma^q_{ij,k}f^\sigma_q+\Gamma^q_{ij}f^\sigma_{qk}-\Gamma^\sigma_{\alpha\beta,\gamma}f^\alpha_i f^\beta_j f^\gamma_k-\\
&\quad -\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(f^\alpha_{ik}f^\beta_j+f^\alpha_i f^\beta_{jk})-f^\sigma_{ijk},\\
\Gamma^q_{ij,k} &= -h_{ab,k}h^{bq}\Gamma^a_{ij}+\frac{1}{2}h^{cq}(h_{ci,jk}+h_{cj,ik}-h_{ij,ck}),\\
\Gamma^\sigma_{\alpha\beta,\gamma} &= -g_{\nu\eta,\gamma}g^{\nu\sigma}\Gamma^\eta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}g^{\kappa\sigma}(g_{\kappa\alpha,\beta\gamma}+g_{\kappa\beta,\alpha\gamma}-g_{\alpha\beta,\kappa\gamma}).
\end{aligned}
$$

Souřadnice Γ^i_{jk},$\Gamma^\sigma_{\nu\eta}$, K^σ_{jk}, P^σ_{jkl}, S^i_{jkl}, $S^\sigma_{\nu\eta\omega}$ jsou symetrické v dolních indexech, souřadnice R_{ijkl}, resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega}$ jsou antisymetrické v prvních dvou indexech, antisymetrické v posledních dvou indexech a symetrické vůči záměně první a druhé dvojice indexů, navíc splňují rovnost $R_{ijkl}+R_{iljk}-R_{kilj}=0$ resp. $R_{\sigma\nu\eta\omega}+R_{\sigma\omega\eta\nu}-R_{\eta\sigma\omega\nu}=0$. Ukážeme, že nové souřadnice definují na Q^2 globální souřadnicový systém (Q^2,Ψ). Platí

$$h^{ij}h_{jk}=\delta^i_k,$$

$$g^{\sigma\nu}g_{\nu\eta}=\delta^\sigma_\eta.$$

Inverzní transformace je dána rovnicemi:

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= h_{ij},\\
g_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu},\\
f^\sigma_i &= f^\sigma_i,\\
h_{ij,k} &= h_{iq}\Gamma^q_{jk}+h_{jq}\Gamma^q_{ik},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{\sigma\nu,\eta} &= g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\eta} + g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\eta},\\
f^{\sigma}_{jk} &= \Gamma^{i}_{jk} f^{\sigma}_{i} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} f^{\nu}_{j} f^{\eta}_{k} - K^{\sigma}_{jk},\\
h_{ij,kl} &= h_{iq} S^{q}_{jkl} + h_{jq} S^{q}_{ikl} - \frac{1}{3}(R_{ikjl} + R_{jkil}) +\\
&\quad + \frac{1}{3} h_{rq}(\Gamma^{q}_{il}\Gamma^{r}_{kj} + \Gamma^{q}_{jl}\Gamma^{r}_{ki} - 2\Gamma^{q}_{ij}\Gamma^{r}_{kl}),\\
g_{\sigma\nu,\eta\omega} &= g_{\sigma\alpha} S^{\alpha}_{\nu\eta\omega} + g_{\nu\alpha} S^{\alpha}_{\sigma\eta\omega} - \frac{1}{3}(R_{\sigma\eta\nu\omega} + R_{\nu\eta\sigma\omega}) +\\
&\quad + \frac{1}{3} g_{\alpha\beta}(\Gamma^{\alpha}_{\sigma\omega}\Gamma^{\beta}_{\eta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\omega}\Gamma^{\beta}_{\eta\sigma} - 2\Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\beta}_{\eta\omega}),\\
f^{\sigma}_{ijk} &= \frac{1}{3}[\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(f^{\alpha}_{k} K^{\beta}_{ij} + f^{\alpha}_{j} K^{\beta}_{ik} + f^{\alpha}_{i} K^{\beta}_{jk}) -\\
&\quad -2(K^{\sigma}_{qj}\Gamma^{q}_{ki} + K^{\sigma}_{qk}\Gamma^{q}_{ji} + K^{\sigma}_{qi}\Gamma^{q}_{kj}) +\\
&\quad + f^{\sigma}_{q}(\Gamma^{q}_{ij,k} + \Gamma^{q}_{ik,j} + \Gamma^{q}_{jk,i}) + \Gamma^{q}_{ij} f^{\sigma}_{qk} + \Gamma^{q}_{ik} f^{\sigma}_{qj} +\\
&\quad + \Gamma^{q}_{jk} f^{\sigma}_{iq} - (\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma,\alpha} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\alpha,\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma,\beta}) f^{\alpha}_{k} f^{\beta}_{i} f^{\gamma}_{j} -\\
&\quad -2\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}(f^{\beta}_{ik} f^{\gamma}_{j} + f^{\beta}_{ij} f^{\gamma}_{k} + f^{\beta}_{kj} f^{\gamma}_{i})] - P^{\sigma}_{ijk}.
\end{aligned}
$$

Přechody mezi souřadnicemi jsou hladké, složením obou vztahů lze prověřit, že se jedná o transformaci souřadnic. Zkontrolujeme počet nezávislých souřadnic:

$$
\begin{aligned}
\dim(h_{ij}, \Gamma^{i}_{jk}) &= \frac{1}{2} n(n+1)^2,\\
\dim(R_{ijkl}) &= \frac{n^2}{12}(n^2-1),\\
\dim(S^{i}_{jkl}) &= \frac{n^2}{6}(n+1)(n+2),\\
N_2 &= \dim(h_{ij}, \Gamma^{i}_{jk}, R_{ijkl}, S^{i}_{jkl}),
\end{aligned}
$$

analogicky

$$M_2 = \dim(g_{\sigma\nu}, \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, S^{\sigma}_{\nu\eta\omega}),$$

$$
\begin{aligned}
\dim(f^{\sigma}_{i}) &= m \cdot n,\\
\dim(K^{\sigma}_{ij}) &= m \cdot \frac{n(n+1)}{2},\\
\dim(P^{\sigma}_{ijk}) &= m\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right),\\
P_2 &= \dim(f^{\sigma}_{i}, K^{\sigma}_{ij}, P^{\sigma}_{ijk}).
\end{aligned}
$$

Akce grupy $L^3_n \times L^3_m$ v nových souřadnicích je dána rovnicemi:

$$\overline{h}_{ij} = a^{a}_{i} a^{b}_{j} h_{ab},$$

$$
\begin{aligned}
\overline{g}_{\sigma\nu} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu g_{\alpha\beta}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= d^\sigma_\alpha a^a_i f^\alpha_a, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= b^i_a a^b_j a^c_k \Gamma^a_{bc} + b^i_l a^l_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= d^\sigma_\alpha c^\beta_\nu c^\gamma_\eta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + d^\sigma_\alpha c^\alpha_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= d^\sigma_\alpha a^p_j a^l_k K^\alpha_{pl}, \\
\overline{R}_{ijkl} &= a^a_i a^b_j a^c_k a^d_l R_{abcd}, \qquad (2.12)\\
\overline{S}^i_{jkl} &= a^a_j a^b_k a^c_l b^i_d S^d_{abc} + a^r_{jkl} b^i_r + \\
&+ (a^s_j a^r_{kl} + a^s_k a^r_{jl} + a^s_l a^r_{kj}) b^i_u \Gamma^u_{sr} + \\
&+ \frac{1}{3}(a^s_{kj} a^r_l + a^s_{lj} a^r_k + a^s_{kl} a^r_j) b^i_u \Gamma^q_{pr} h_{sq} h^{up} + \\
&+ \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^s_j a^r_l + a^p_{jq} a^s_k a^r_l + a^p_{lq} a^s_j a^r_k) b^i_u b^q_v h^{uv} h_{pt} \Gamma^t_{sr} + \\
&+ \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^r_{jl} + a^p_{lq} a^r_{jk} + a^p_{jq} a^r_{kl}) b^i_a b^q_b h_{pr} h^{ab}, \\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\sigma c^\beta_\nu c^\gamma_\eta c^\delta_\omega R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\
\overline{S}^\sigma_{\nu\eta\omega} &= c^\alpha_\nu c^\beta_\eta c^\gamma_\omega d^\sigma_\delta S^\delta_{\alpha\beta\gamma} + c^\varrho_{\nu\eta\omega} d^\sigma_\varrho + \\
&+ (c^\phi_\nu c^\varrho_{\eta\omega} + c^\phi_\eta c^\varrho_{\nu\omega} + c^\phi_\omega c^\varrho_{\eta\nu}) d^\sigma_\varepsilon \Gamma^\varepsilon_{\phi\varrho} + \\
&+ \frac{1}{3}(c^\phi_{\eta\nu} c^\varrho_\omega + c^\phi_{\omega\nu} c^\varrho_\eta + c^\phi_{\eta\omega} c^\varrho_\nu) d^\sigma_\varepsilon \Gamma^\zeta_{\pi\varrho} g_{\phi\zeta} g^{\varepsilon\pi} + \\
&+ \frac{1}{3}(c^\pi_{\eta\xi} c^\phi_\nu c^\varrho_\omega + c^\pi_{\nu\xi} c^\phi_\eta c^\varrho_\omega + c^\pi_{\omega\xi} c^\phi_\nu c^\varrho_\eta) d^\sigma_\varepsilon d^\xi_\chi g^{\varepsilon\chi} g_{\pi\zeta} \Gamma^\zeta_{\phi\varrho} + \\
&+ \frac{1}{3}(c^\pi_{\eta\xi} c^\varrho_{\nu\omega} + c^\pi_{\omega\xi} c^\varrho_{\nu\eta} + c^\pi_{\nu\xi} c^\varrho_{\eta\omega}) d^\sigma_\alpha d^\xi_\beta g_{\pi\varrho} g^{\alpha\beta}, \\
\overline{P}^\sigma_{ijk} &= d^\sigma_\alpha a^a_i a^b_j a^c_k P^\alpha_{abc}.
\end{aligned}
$$

Odvodíme vztah pro souřadnici P^σ_{ijk}. Označme

$$T^\sigma_{ijk} = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} f^\alpha_k K^\beta_{ij} - K^\sigma_{ai} \Gamma^a_{kj} - K^\sigma_{aj} \Gamma^a_{ki} + K^\sigma_{ij,k}.$$

Dále platí

$$
\begin{aligned}
\overline{K}^\sigma_{ij,k} &= a^a_i a^b_j a^c_k d^\sigma_\alpha K^\alpha_{ab,c} + a^a_i a^b_j a^c_k d^\sigma_{\alpha\beta} f^\beta_c K^\alpha_{ab} + \\
&+ (a^a_{ik} a^b_j + a^a_i a^b_{jk}) d^\sigma_\alpha K^\alpha_{ab}.
\end{aligned}
$$

Dostáváme tedy

$$
\begin{aligned}
\overline{T}^\sigma_{ijk} &= (c^\xi_\alpha c^\nu_\beta d^\sigma_\omega \Gamma^\omega_{\xi\nu} + c^\omega_{\alpha\beta} d^\sigma_\omega)(a^a_k d^\alpha_\epsilon f^\epsilon_a)(a^c_i a^d_j d^\beta_\varrho K^\varrho_{cd}) - \\
&- (a^t_k a^r_i b^a_s \Gamma^s_{tr} + a^t_{ki} b^a_t)(a^l_a a^f_j d^\sigma_\varrho K^\varrho_{lf})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(a^t_k a^r_j b^a_s \Gamma^s_{tr} + a^t_{kj} b^a_t)(a^l_a a^f_i d^\sigma_\varrho K^\varrho_{lf}) + \\
& a^a_i a^b_j a^c_k d^\sigma_\alpha K^\alpha_{ab,c} + a^a_i a^b_j a^c_k d^\sigma_{\alpha\beta} f^\beta_c K^\alpha_{ab} + \\
& +(a^a_{ik} a^b_j + a^a_i a^b_{jk}) d^\sigma_\alpha K^\alpha_{ab} = \\
= \; & d^\sigma_\alpha a^a_k a^c_i a^d_j (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} f^\beta_a K^\gamma_{cd} - \Gamma^q_{ac} K^\alpha_{qd} - \Gamma^q_{ad} K^\alpha_{qc} + K^\alpha_{cd,a}) + \\
& + a^a_k a^c_i a^d_j d^\alpha_\kappa d^\beta_\nu d^\sigma_\omega c^\omega_{\alpha\beta} f^\kappa_a K^\nu_{cd} - a^l_{ki} a^f_j d^\sigma_\alpha K^\alpha_{lf} - a^l_{kj} a^f_i d^\sigma_\alpha K^\alpha_{lf} + \\
& +(a^l_{ki} a^f_j + a^l_{kj} a^f_i) d^\sigma_\alpha K^\alpha_{lf} + d^\sigma_{\alpha\beta} a^c_i a^d_j a^a_k f^\alpha_a K^\beta_{cd} = \\
= \; & d^\sigma_\alpha a^a_k a^c_i a^d_j T^\alpha_{cda}.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu bylo využito vztahů

$$
\begin{aligned}
a^i_k b^k_j &= \delta^i_j, \\
c^\alpha_\beta d^\beta_\gamma &= \delta^\alpha_\gamma, \\
d^\sigma_{\nu\eta} &= -c^\alpha_{\beta\gamma} d^\sigma_\alpha d^\beta_\nu d^\gamma_\eta.
\end{aligned}
$$

Platí $T^\sigma_{ijk} = T^\sigma_{jik}$ a $P^\sigma_{ijk} = \frac{1}{3}(T^\sigma_{ijk} + T^\sigma_{ikj} + T^\sigma_{kji})$, tedy

$$\overline{P}^\sigma_{ijk} = a^a_i a^b_j a^c_k d^\sigma_\alpha P^\alpha_{abc}.$$

Zúžením akce na podgrupu $K^3_n \times K^3_m$ (tj. pro $a^i_j = \delta^i_j$, $c^\sigma_\nu = \delta^\sigma_\nu$) dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\overline{h}_{ij} &= h_{ij}, \\
\overline{g}_{\sigma\nu} &= g_{\sigma\nu}, \\
\overline{f}^\sigma_i &= f^\sigma_i, \\
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \Gamma^i_{jk} + a^i_{jk}, \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\nu\eta} &= \Gamma^\sigma_{\nu\eta} + c^\sigma_{\nu\eta}, \\
\overline{K}^\sigma_{jk} &= K^\sigma_{jk}, \\
\overline{R}_{ijkl} &= R_{ijkl}, \\
\overline{S}^i_{jkl} &= S^i_{jkl} + a^i_{jkl} + \\
& + (\delta^s_j a^r_{kl} + \delta^s_k a^r_{jl} + \delta^s_l a^r_{kj}) \delta^i_u \Gamma^u_{sr} + \\
& + \frac{1}{3}(a^s_{kj}\delta^r_l + a^s_{lj}\delta^r_k + a^s_{kl}\delta^r_j) \delta^i_u \Gamma^q_{pr} h_{sq} h^{up} + \\
& + \frac{1}{3}(a^p_{kq}\delta^s_j\delta^r_l + a^p_{jq}\delta^s_k\delta^r_l + a^p_{lq}\delta^s_j\delta^r_k) \delta^i_u \delta^q_v h^{uv} h_{pt} \Gamma^t_{sr} + \\
& + \frac{1}{3}(a^p_{kq} a^r_{jl} + a^p_{lq} a^r_{jk} + a^p_{jq} a^r_{kl}) \delta^i_a \delta^q_b h_{pr} h^{ab}, \\
\overline{R}_{\sigma\nu\eta\omega} &= R_{\sigma\nu\eta\omega}, \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{\sigma}_{\nu\eta\omega} &= S^{\sigma}_{\nu\eta\omega} + c^{\sigma}_{\nu\eta\omega} + \\
&+(\delta^{\phi}_{\nu} c^{\varrho}_{\eta\omega} + \delta^{\phi}_{\eta} c^{\varrho}_{\nu\omega} + \delta^{\phi}_{\omega} c^{\varrho}_{\eta\nu})\delta^{\sigma}_{\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\phi\varrho} + \\
&+\frac{1}{3}(c^{\phi}_{\eta\nu}\delta^{\varrho}_{\omega} + c^{\phi}_{\omega\nu}\delta^{\varrho}_{\eta} + c^{\phi}_{\eta\omega}\delta^{\varrho}_{\nu})\delta^{\sigma}_{\varepsilon}\Gamma^{\zeta}_{\pi\varrho} g_{\phi\zeta} g^{\varepsilon\pi} + \\
&+\frac{1}{3}(c^{\pi}_{\eta\xi}\delta^{\phi}_{\nu}\delta^{\varrho}_{\omega} + c^{\pi}_{\nu\xi}\delta^{\phi}_{\eta}\delta^{\varrho}_{\omega} + c^{\pi}_{\omega\xi}\delta^{\phi}_{\nu}\delta^{\varrho}_{\eta})\delta^{\sigma}_{\varepsilon}\delta^{\xi}_{\chi} g^{\varepsilon\chi} g_{\pi\zeta}\Gamma^{\zeta}_{\phi\varrho} + \\
&+\frac{1}{3}(c^{\pi}_{\eta\xi} c^{\varrho}_{\nu\omega} + c^{\pi}_{\omega\xi} c^{\varrho}_{\nu\eta} + c^{\pi}_{\nu\xi} c^{\varrho}_{\eta\omega})\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\xi}_{\beta} g_{\pi\varrho} g^{\alpha\beta}, \\
\overline{P}^{\sigma}_{ijk} &= P^{\sigma}_{ijk}.
\end{aligned}$$

Na základě platnosti vztahů (2.13), dospějeme analogickou úvahou jako v kapitole 2.4 k závěru, že každou třídu $[q]_{(K^3_n \times K^3_m)} \in Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ lze jednoznačně reprezentovat souborem souřadnic $(h_{ij},\ g_{\sigma\nu},\ f^{\sigma}_i,\ K^{\sigma}_{ij},\ R_{ijkl},\ R_{\sigma\nu\eta\omega},\ P^{\sigma}_{ijk})$.

Věta 2.13 *Množina $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ má strukturu orbit-variety. Hladká struktura je dána globálním souřadnicovým systémem $(Q^2/(K^3_n \times K^3_m), \Theta)$, $\Theta = (h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^{\sigma}_i, K^{\sigma}_{ij}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, P^{\sigma}_{ijk})$ a faktorová projekce $\pi : Q^2 \to Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ je submerze.*

Důkaz: $(K^3_n \times K^3_m)$-asociovanost globální souřadnicového systému (Q^2, Ψ) plyne přímo z jeho definice. Z definice ekvivalence $q_1 \sim q_2$ plyne, že ke každému $q_1, q_2 \in Q^2$, $[q_1] \neq [q_2]$ existují $(K^3_n \times K^3_m)$-invariantní otevřené množiny $W_{q_1}, W_{q_2} \subset Q^2$ takové, že $q_1 \in W_{q_1}$, $q_2 \in W_{q_2}$ a $W_{q_1} \cap W_{q_2} = \emptyset$, neboť topologie na Q^2 je euklidovská. Tvrzení tedy vyplývá z věty 1.3.

♡

Vztah (1.1) definuje na $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ levou akci grupy $H = i^3_n(L^1_n) \times i^3_m(L^1_m)$. Tato grupa je izomorfní s $L^1_n \times L^1_m$, izomorfismus je dán vtahem $\kappa : H \ni ((a^i_j, 0, 0), (c^{\sigma}_{\nu}, 0, 0)) \to ((a^i_j), (c^{\sigma}_{\nu})) \in L^1_n \times L^1_m$. Souřadnicové vyjádření akce je hladké, množina $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ má tedy strukturu levé $L^1_n \times L^1_m$-variety.

Uvažujme varietu

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}_2 = \mathrm{Met}(\mathbf{R}^n \times \mathrm{Met}(\mathbf{R}^m \times \mathrm{reg}(\mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m) \times \\
\times (\mathbf{R}^n \odot \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^{m*}) \times P_n \times P_m \times (\mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*} \odot \mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m)
\end{gathered} \tag{2.14}$$

s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$, kde P_k je podprostor tenzorového prostoru $(\mathbf{R}^{k*} \wedge \mathbf{R}^{k*}) \odot (\mathbf{R}^{k*} \wedge \mathbf{R}^{k*})$ určený v kanonických souřadnicích rovnicí $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$, $i, j, k, l \in \{1, \ldots, k\}$.

Platí následující tvrzení:

Věta 2.14 *Levá $(L^1_n \times L^1_m)$-varieta $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ je izomorfní s $\mathcal{P}_2$.*

Důkaz: Uvažujme globální souřadnicový systém $(Q^2/(K^3_n \times K^3_m), \Theta)$ na $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ a kanonický globální souřadnicový systém na $\mathcal{P}_2$. Hledaný izomorfismus ι získáme, přiřadíme-li prvku $[q] \in Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$ prvek prostoru $\mathcal{P}_2$ o stejných souřadnicích. Zobrazení ι je difeomorfismem, neboť jeho souřadnicové vyjádření je $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^{\dim \mathcal{P}_2}}$, $(L^1_n \times L^1_m)$-ekvivariantnost zobrazení ι plyne ze skutečnosti, že souřadnicové vyjádření levé akce grupy $L^1_n \times L^1_m$ je pro obě variety totožné.

$\heartsuit$

Věta 2.15 *Každý diferenciální invariant druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé $(L^1_n \times L^1_m)$-varietě lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic h_{ij}, $g_{\sigma\nu}$, f^σ_i, K^σ_{ij}, R_{ijkl}, $R_{\sigma\nu\eta\omega}$, P^σ_{ijk}.*

Důkaz: Tvrzení plyne ze vztahů (2.13), věty 2.2 a věty 1.1 následovně: Podle věty 2.2 je grupa $G = L^3_n \times L^3_m$, působící zleva na varietě Q^2 vnitřním semidirektním součinem svých podgrup $H = i^3_n(L^1_n) \times i^3_m(L^1_m)$ a $K = K^3_n \times K^3_m$. Nechť $g = (A, C) \in G$, v souřadnicích $g = ((a^i_j, a^i_{jk}, a^i_{jkl}), (c^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta}, c^\sigma_{\nu\eta\omega}))$. Pro zobrazení α, β definovaná v odstavci 1.1 platí $\alpha(g) = ((\delta^i_j, a^i_{jk}, a^i_{jkl}), (\delta^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta}, c^\sigma_{\nu\eta\omega}))$, $\beta(g) = ((a^i_j, 0, 0)(c^\sigma_\nu, 0, 0)) = (i^3_n \circ \pi^3_n(A), i^3_m \circ \pi^3_m(C)) = ((i^3_n \circ \pi^3_n) \times (i^3_m \circ \pi^3_m))(g)$. Nechť $\mathcal{P}$ je libovolná levá $(L^1_n \times L^1_m)$-varieta. Grupa H je izomorfní s $L^1_n \times L^1_m$, lze tedy definovat její levou akci na $\mathcal{P}$ vztahem $((a^i_j, 0, 0), (c^\sigma_\nu, 0, 0)) \cdot p = (a^i_j, c^\sigma_\nu) \cdot p$, pro všechna $p \in \mathcal{P}$ a všechna $(a^i_j, c^\sigma_\nu) \in L^1_n \times L^1_m$. Dále, pro každý diferenciální invariant $L : Q^2 \to \mathcal{P}$ platí

$$L(g \cdot q) = L((A, C) \cdot q) = (\pi^3_n(A), \pi^3_m(C)) \cdot L(q) =$$

$$((i^3_n \circ \pi^3_n) \times (i^3_m \circ \pi^3_m))(g) \cdot L(q) = \beta(g) \cdot L(q)$$

pro libovolné $g = (A, C) \in G$ a libovolné $q \in Q^2$. Pro Q^2, $\mathcal{P}$, L jsou tedy splněny předpoklady věty 1.1. Jednoznačně určené H-ekvivariantní zobrazení $l : Q^2/(K^3_n \times K^3_m) \to \mathcal{P}$, zaručené větou 1.1, ovšem závisí pouze na souřadnicích na $Q^2/(K^3_n \times K^3_m)$, tj. na $(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, f^\sigma_i, K^\sigma_{ij}, R_{ijkl}, R_{\sigma\nu\eta\omega}, P^\sigma_{ijk})$.

$\heartsuit$

Souřadnice $(h_{ij}$, $g_{\sigma\nu}$, K^σ_{ij}, f^σ_i, R_{ijkl}, $R_{\sigma\nu\eta\omega}$, $P^\sigma_{jkl})$ tvoří tzv. *bázi invariantů druhého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě.*

2.11 Geometrický význam souřadnice P^σ_{ijk}

V tomto odstavci používáme stejného značení, jako v kapitole 2.5, f je injektivní vnoření, $\tilde{w}$ je rozšíření vektorového pole $f_* w$ na otevřené okolí množiny $f(\mathcal{X})$, pro $w \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$.

Definujme objekty

$$T_f, P_f \in \mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \odot \mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{Z}^*(\mathcal{X}) \otimes_{f^*} \mathcal{Z}(\mathcal{Y})$$

vztahem

$$T_f(x)(u,v,w,\omega) = \omega(f(x))[\nabla^g_{\tilde{w}}(K_f(u,v)) - K_f(\nabla^h_w u, v) - K_f(\nabla^h_w v, u)],$$

$$P_f(x)(u,v,w,\omega) = \frac{1}{3}(T_f(u,v,w,\omega) + T_f(u,w,v,\omega) + T_f(w,v,u,\omega)),$$

kde $u, v, w \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}), \omega \in \mathcal{Z}^*\mathcal{Y}$.

Věta 2.16 *Objekt P_f má lokální souřadnicové vyjádření*

$$P_f = P^\sigma_{ijk} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \otimes_{f^*} \frac{\partial}{\partial y^\sigma},$$

kde

$$\begin{aligned} P^\sigma_{ijk}(x) &= \frac{1}{3}[\Gamma(g)^\sigma_{\alpha\beta}(f(x))(f^\alpha_k(x)K^\beta_{ij}(x) + f^\alpha_j(x)K^\beta_{ik}(x) + f^\alpha_i(x)K^\beta_{jk}(x)) - \\ &\quad -2(K^\sigma_{qj}(x)\Gamma(h)^q_{ki}(x) + K^\sigma_{qk}(x)\Gamma(h)^q_{ji}(x) + K^\sigma_{qi}(x)\Gamma(h)^q_{kj}(x)) + \\ &\quad +K^\sigma_{ij,k}(x) + K^\sigma_{ik,j}(x) + K^\sigma_{jk,i}(x)]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Důkaz: Zřejmě $P^\sigma_{ijk} = T^\sigma_{ijk} + T^\sigma_{ikj} + T^\sigma_{kij}$, kde T^σ_{ijk} jsou komponenty objektu T_f. Nechť $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $w = w^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Nechť $\omega = \omega_\sigma \mathrm{d}y^\sigma$. Platí

$$\begin{aligned} \nabla^g_{\tilde{w}}(K(u,v)) &= \nabla^g_{f^\alpha_k w^k \frac{\partial}{\partial y^\alpha}}(K^\sigma_{ij} u^i v^j \frac{\partial}{\partial y^\sigma}) = \\ &= (K^\sigma_{ij,k} + f^\alpha_k \Gamma(g)^\sigma_{\alpha\beta} K^\beta_{ij}) u^i v^j w^k + K^\sigma_{ij}(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} v^j + u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^k}) w^k, \\ K(\nabla^h_w v, u) &= K^\sigma_{aj}\Gamma(h)^a_{ik} u^i v^j w^k + K^\sigma_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} v^j w^k, \\ K(\nabla^h_w u, v) &= K^\sigma_{ai}\Gamma(h)^a_{jk} u^i v^j w^k + K^\sigma_{ij} u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^k} w^k, \end{aligned}$$

Získáváme tedy $T_f(u,v,w,\omega) = T^\sigma_{ijk} u^i v^j w^k \omega_\sigma$, kde

$$T^\sigma_{ijk} = K^\sigma_{ij,k} + f^\alpha_k \Gamma(g)^\sigma_{\alpha\beta} K^\beta_{ij} - K^\sigma_{aj}\Gamma(h)^a_{ik} - K^\sigma_{ai}\Gamma(h)^a_{jk}.$$

A pro P^σ_{ijk} platí vztah (2.15).

♡

Poznámka: P_f můžeme chápat jako symetrické trilineární zobrazení $\mathcal{Z}(\mathcal{X})\times\mathcal{Z}(\mathcal{X})\times\mathcal{Z}(\mathcal{X})\to\mathcal{Z}(\mathcal{Y})$,

$$P_f(u,v,w)=P^\sigma_{ijk}u^iv^jw^k\frac{\partial}{\partial y^\sigma},$$

kde $u=u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $v=v^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, $w=w^k\frac{\partial}{\partial x^k}$.

C. Invarianty obecného řádu

2.12 Akce grupy $L^{r+1}_n\times L^{r+1}_m$ na typové vrstvě Q^r v kanonických souřadnicích

Kanonické souřadnice na Q^r označujeme

$$h_{ij},h_{ij,k_1},\dots,h_{ij,k_1\dots k_r},g_{\sigma\nu},g_{\sigma\nu,\eta_1},\dots,g_{\sigma\nu,\eta_1,\dots,\eta_r},f^\sigma_{k_1},\dots,f^\sigma_{k_1,\dots,k_{r+1}},$$

latinské indexy probíhají soubor hodnot $\{1,\dots,n\}$, řecké indexy probíhají soubor hodnot $\{1,\dots,m\}$. Akci grupy $L^{r+1}_n\times L^{r+1}_m$ v kanonických souřadnicích získáme následujícím rekurentním výpočtem.

Nechť pro $1<s\le r+1$ platí

$$\overline{f}^\sigma_{k_1\dots k_{s-1}} = p(a^i_{k_1},\dots,a^i_{k_1\dots k_{s-1}},d^\sigma_{\nu_1},\dots,d^\sigma_{\nu_1\dots\nu_{s-1}},f^\nu_{i_1},\dots,f^\nu_{i_1\dots i_{s-1}}),$$

pak

$$\overline{f}^\sigma_{k_1\dots k_s} = \sum_{t=1}^{s-1}\left(\frac{\partial p}{\partial a^i_{j_1\dots j_t}}a^i_{j_1\dots j_tk_s}+\frac{\partial p}{\partial d^\alpha_{\nu_1\dots\nu_t}}d^\alpha_{\nu_1\dots\nu_t\beta}f^\beta_c a^c_{k_s}+\frac{\partial p}{\partial f^\alpha_{i_1\dots i_t}}f^\alpha_{i_1\dots i_tc}a^c_{k_s}\right).$$

Nechť pro $1\le s\le r$ platí

$$\begin{aligned}\overline{h}_{ij,k_1\dots k_{s-1}} &= p^{ab}(a^i_j,a^i_{jk_1},\dots,a^i_{jk_1,\dots k_{s-1}})h_{ab}+\dots+\\ &\quad +p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}(a^i_j,a^i_{jk_1},\dots,a^i_{jk_1,\dots k_{s-1}})h_{ab,i_1\dots i_{s-1}},\end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned}\overline{h}_{ij,k_1\dots k_s} &= \left(\frac{\partial p^{ab}}{\partial a^i_j}a^i_{jk_s}+\dots+\frac{\partial p^{ab}}{\partial a^i_{jk_1\dots k_{s-1}}}a^i_{jk_1\dots k_{s-1}k_s}\right)h_{ab}+\\ &\quad +p^{ab}a^c_{k_s}h_{ab,c}+\dots+\left(\frac{\partial p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}}{\partial a^i_j}a^i_{jk_s}+\right.\\ &\quad \left.+\dots+\frac{\partial p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}}{\partial a^i_{jk_1\dots k_{s-1}}}a^i_{jk_1\dots k_{s-1}k_s}\right)h_{ab,i_1\dots i_{s-1}}+\\ &\quad +p^{ab,i_1\dots i_{s-1}}a^{i_s}_{k_s}h_{ab,i_1\dots i_{s-1}i_s}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Analogicky nechť pro $1 < s \leq r$ platí

$$\begin{aligned}\overline{g}_{\sigma\nu,\eta_1\ldots\eta_{s-1}} &= p^{\alpha\beta}(c^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta_1}, \ldots, c^\sigma_{\nu\eta_1,\ldots\eta_{s-1}})g_{\alpha\beta} + \ldots + \\ &+p^{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}}(c^\sigma_\nu, c^\sigma_{\nu\eta_1}, \ldots, c^\sigma_{\nu\eta_1,\ldots\eta_{s-1}})g_{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}},\end{aligned}$$

pak

$$\begin{aligned}\overline{g}_{\sigma\nu,\eta_1\ldots\eta_s} &= \left(\frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial c^\sigma_\nu}c^\sigma_{\nu\eta_s} + \ldots + \frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}}}c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}\eta_s}\right)g_{\alpha\beta} + \\ &+p^{\alpha\beta}c^\gamma_{\eta_s}g_{\alpha\beta,\gamma} + \ldots + \left(\frac{\partial p^{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}}}{\partial c^\sigma_\nu}c^\sigma_{\nu\eta_s} + \right.\\ &\left.+ \ldots + \frac{\partial p^{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}}}{\partial c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}}}c^\sigma_{\nu\eta_1\ldots\eta_{s-1}\eta_s}\right)g_{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}} + \\ &+p^{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}}c^{\sigma_s}_{\eta_s}g_{\alpha\beta,\sigma_1\ldots\sigma_{s-1}\sigma_s}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

2.13 Invarianty obecného řádu s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě

Místo kanonicých souřadnic $f^\sigma_{i_1\ldots i_s}$, $s \in \{1, \ldots, r+1\}$, $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_s \leq n$, $\sigma \in \{1, \ldots, m\}$ zavedeme nové souřadnice rekurentními transformačními vztahy

$$\begin{aligned}K^\sigma_{i_1} &= f^\sigma_{i_1}, \\ K^\sigma_{i_1 i_2} &= S[K^\sigma_{i_1,i_2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}K^\alpha_{i_2}K^\beta_{i_1} - \Gamma^a_{i_2 i_1}K^\sigma_a], \\ &\vdots \\ K^\sigma_{i_1\ldots i_{r+1}} &= S[K^\sigma_{i_1\ldots i_r,i_{r+1}} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}K^\alpha_{i_{r+1}}K^\beta_{i_1\ldots i_r} - \\ &-\Gamma^a_{i_{r+1}i_1}K^\sigma_{ai_2\ldots i_r} - \Gamma^a_{i_{r+1}i_2}K^\sigma_{ai_1i_3\ldots i_r} - \\ &- \ldots - \Gamma^a_{i_{r+1}i_r}K^\sigma_{ai_1\ldots i_{r-1}}].\end{aligned} \tag{2.18}$$

Nechť I_s je multiindex délky s, $s \in \{2, \ldots, r+1\}$. S použitím multiindexů můžeme vztahy (2.18) napsat ve tvaru

$$K^\sigma_{I_{s-1}i_s} = S[K^\sigma_{I_{s-1},i_s} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}K^\alpha_{i_s}K^\beta_{I_{s-1}} - \sum_{i\in I_{s-1}}\Gamma^a_{i_s i}K^\sigma_{a(I_{s-1}\setminus\{i\})}].$$

S značí symetrizaci ve všech dolních indexech, $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}h^{im}(h_{mj,k} + h_{mk,j} - h_{jk,m})$, $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$. Ještě je potřeba říci, co značíme symbolem K_{I_{s-1},i_s}. Nechť $K = K(h_{ij,I_t}, g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}, f^\sigma_{I_{t+1}})$, kde I_t, Υ_t jsou multiindexy délky t, $t \in \{0,\ldots,r-1\}$. Pak symbolem $K_{,u}$ značíme funkci danou vztahem

$$K_{,u} = \sum_{t=0}^{r-1}\left(\frac{\partial K}{\partial h_{ij,I_t}} h_{ij,I_t u} + \frac{\partial K}{\partial g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}} g_{\sigma\nu,\Upsilon_t\eta} f^\eta_u + \frac{\partial K}{\partial f^\sigma_{I_{t+1}}} f^\sigma_{I_{t+1}u}\right).$$

Z uvedené konstrukce je zřejmé, jak lze získat inverzní transformaci pro libovolné konečné r, přechody mezi souřadnicemi jsou hladké a jedná se o transformaci souřadnic. Souřadnice $K^\sigma_{i_1\ldots i_{t+1}}$ jsou symetrické v dolních indexech. Vybereme-li ze souřadnic $h_{ij,I_t}, g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}, K^\sigma_{I_{t+1}})$, $t \in \{1,\ldots,r\}$ nezávislé, získáme globální souřadnicový systém (Q^r, Ψ'^r).

Nyní přepíšeme působení grupy $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$ na Q^r v nových souřadnicích. Souřadnice h_{ij,I_t}, $g_{\sigma\nu,\Upsilon_t}$ jsou totožné s kanonickými, platí pro ně tedy vztahy uvedené v kapitole 2.12. Odvodíme vztah pro působení grupy na souřadnici $K^\sigma_{I_{t+1}}$. Platí $\overline{K}^\sigma_i = a^a_i d^\sigma_\nu K^\nu_a$. Předpokládejme, že platí $\overline{K}^\sigma_{i_1\ldots i_t} = a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_t}_{i_t} d^\sigma_\nu K^\nu_{j_1\ldots j_t}$ pro nějaké $t \geq 1$ pak

$$\begin{aligned}
\overline{K}^\sigma_{i_1\ldots i_t,i_{t+1}} &= a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu K^\nu_{j_1\ldots j_t,j_{t+1}} + \\
&\quad + d^\sigma_\nu (a^{j_1}_{i_1 i_{t+1}} a^{j_2}_{i_2}\ldots a^{j_t}_{i_t} + \ldots + \\
&\quad + a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_{t-1}}_{i_{t-1}} a^{j_t}_{i_t i_{t+1}}) K^\nu_{i_1\ldots i_t} + \\
&\quad + d^\sigma_{\nu\eta} f^\eta_c a^c_{i_{t+1}} a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_t}_{i_t} K^\nu_{j_1\ldots j_t} \\
-\overline{\Gamma}^a_{i_{t+1}i_1}\overline{K}^\sigma_{a i_2\ldots i_t} &= -a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu \Gamma^a_{j_{t+1}j_1} K^\nu_{a j_2\ldots j_t} - \\
&\quad - a^a_{i_{t+1}i_1} a^{j_2}_{i_2}\ldots a^{j_t}_{i_t} d^\sigma_\nu K^\nu_{a j_2\ldots j_t} \\
&\;\;\vdots \\
-\overline{\Gamma}^a_{i_{t+1}i_t}\overline{K}^\sigma_{a i_1\ldots i_{t-1}} &= -a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu \Gamma^a_{j_{t+1}j_t} K^\nu_{a j_1\ldots j_{t-1}} - \\
&\quad - a^a_{i_{t+1}i_t} a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_{t-1}}_{i_{t-1}} d^\sigma_\nu K^\nu_{a j_1\ldots j_{t-1}} \\
\overline{\Gamma}^\sigma_{\alpha\beta}\overline{K}^\alpha_{i_{t+1}}\overline{K}^\beta_{i_1\ldots i_t} &= a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu \Gamma^\nu_{\alpha\beta} K^\alpha_{j_{t+1}} K^\beta_{j_1\ldots j_t} + \\
&\quad + a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_t}_{i_t} a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} c^\gamma_{\nu\eta} d^\sigma_\gamma d^\nu_\alpha d^\eta_\beta K^\alpha_{j_{t+1}} K^\beta_{j_1\ldots j_t}.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic a symetrizací v dolních indexech získáváme s využitím vztahu $d^\sigma_{\nu\eta} = -c^\gamma_{\alpha\beta} d^\sigma_\gamma d^\alpha_\nu d^\beta_\eta$:

$$\overline{K}^\sigma_{i_1\ldots i_{t+1}} = a^{j_1}_{i_1}\ldots a^{j_{t+1}}_{i_{t+1}} d^\sigma_\nu K^\nu_{j_1\ldots j_{t+1}}$$

pro libovolné $t \in \{0\ldots r\}$. Zúžením akce na podgrupu $K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m$ dostáváme pro tyto nové souřadnice $\overline{K}^\sigma_{i_1\ldots i_{t+1}} = K^\sigma_{i_1\ldots i_{t+1}}$.

Nechť $\mathcal{F}^{r+1}_{T^r_n \mathrm{Met}\mathbf{R}^n}\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{F}^{r+1}_{T^r_m \mathrm{Met}\mathbf{R}^m}\mathcal{Y}$ je fibrovaný prostor metrik r-tého řádu na varietě $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$. Na typové vrstvě $T^r_n\mathrm{Met}\mathbf{R}^n$ působí grupa L^{r+1}_n, na typové vrstvě $T^r_m\mathrm{Met}\mathbf{R}^m$ působí grupa L^{r+1}_m. V kanonických souřadnicích je toto působení dáno vztahy (2.16) a (2.17).

Množiny $T^r_n\mathrm{Met}\mathbf{R}^n/K^{r+1}_n$ resp. $T^r_m\mathrm{Met}\mathbf{R}^m/K^{r+1}_m$ mají strukturu orbitvariety s globálním souřadnicovým systémem, viz. [13]. Tyto globální souřadnicové systémy označíme $(T^r_n\mathrm{Met}\mathbf{R}^n/K^{r+1}_n, \Phi^r_n)$, $\Phi^r_n = (R_I)$, $I = \{1, \dots, \dim(T^r_n(\mathrm{Met}\mathbf{R}^n/K^{r+1}_n)$ resp. $(T^r_m(\mathrm{Met}\mathbf{R}^m/K^{r+1}_m, \Phi^r_m)$, $\Phi^r_m = (R_\Sigma)$, $\Sigma = \{1, \dots, \dim(T^r_m(\mathrm{Met}\mathbf{R}^m/K^{r+1}_m)$. Souřadnice R_I resp. R_Σ tvoří bázi invariantů r-tého řádu z metrického tenzoru na n-rozměrné resp. $m-$rozměrné varietě.

Věta 2.17 *Množina $Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$ má strukturu orbitvariety, která je dána globálním souřadnicovým systémem $(Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m), \Phi^r)$, $\Phi^r = (R_I, R_\Sigma, K^\sigma_{i_1 \dots i_{t+1}})$, $t \in \{0, \dots r\}$, $\sigma \in \{1, \dots, m\}$, $1 \le i_1 \le \dots \le i_{t+1} \le n$, kde souřadnice R_I resp. R_Σ tvoří bázi invariantů r-tého řádu z metrického tenzoru na n-rozměrné resp. m-rozměrné varietě.*

Důkaz: Z předpokladů věty vyplývá, že každá třída $[q] \in Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$ je jednoznačně reprezentována souřadnicemi $R_I, R_\Sigma, K^\sigma_{i_1 \dots i_{t+1}}$, existuje tedy pokrytí množiny Q^r G-asociovanými souřadnicovými systémy a důkaz je analogický důkazu vět 2.3 a 2.13.

♡

Vztahem (1.1) je na množině $Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$ definována struktura levé $L^1_n \times L^1_m$-variety. Ze souřadnicového vyjádření této akce je zřejmé, že pro každé r existuje vektorový prostor $\mathcal{P}_r$ s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$, který je izomorfní s $Q^r/(K^{r+1}_n \times K^{r+1}_m)$.

Věta 2.18 *Každý diferenciální invariant r tého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v libovolné levé $L^1_n \times L^1_m$ varietě lze jednoznačně zapsat jako funkci souřadnic R_I, R_Σ, $K^\sigma_{i_1 \dots i_{t+1}}$.*

Důkaz: Důkaz je analogický důkazu vět 2.5 a 2.15.

♡

Souřadnice R_I, R_Σ, $K^\sigma_{i_1 \dots i_{t+1}}$ tvoří tzv. *bázi invariantů r-tého řádu z vnoření variet s metrikou s hodnotami v levé $L^1_n \times L^1_m$-varietě.*

2.14 Geometrický význam souřadnic $K^\sigma_{i_1\dots i_{t+1}}$

V této kapitole používáme stejného značení, jako v kapitole 2.5. Nechť funkce $K^\sigma_{I_t}(x)$ reprezentují v nějakých lokálních souřadnicích lineární zobrazení

$$K^t_f : \times^t \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y}).$$

Pak funkce $K^\sigma_{I_{t+1}}(x)$ zavedené vztahy (2.18) reprezentují v těchto souřadnicích lineární zobrazení

$$K^{t+1}_f : \times^{t+1} \mathcal{Z}(\mathcal{X}) \to \mathcal{Z}(\mathcal{Y}),$$

které je dáno vztahem

$$K^{t+1}_f(u_1,\dots,u_{t+1}) = S[\nabla^g_{\tilde{u_{t+1}}} K^t_f(u_1,\dots,u_t) - K^t_f(\nabla^h_{u_{t+1}}u_1,u_2,\dots,u_t)-$$
$$-K^t_f(u_1,\nabla^h_{u_{t+1}}u_2,u_3,\dots,u_t) - \dots - K^t_f(u_1,\dots,u_{t-1},\nabla^h_{u_{t+1}}u_t)],$$

kde S značí symetrizaci ve všech argumentech, $u_1,\dots,u_{t+1} \in \mathcal{Z}(\mathcal{X})$. Dokážeme toto tvrzení.

$$\begin{aligned}
\nabla^g_{\tilde{u_{t+1}}} K^t_f(u_1,\dots,u_t) &= \nabla^g_{f^\alpha_c u^c_{t+1}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}(K^\sigma_{i_1\dots i_t}u^{i_1}_1\dots u^{i_t}_t)\\
&= (K^\sigma_{i_1\dots i_t,i_{t+1}} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}f^\alpha_{i_{t+1}}K^\beta_{i_1\dots i_t})u^{i_1}_1\dots u^{i_t}_1 u^{i_{t+1}}_{t+1} +\\
&\quad +K^\sigma_{i_1\dots i_t}\left(\frac{\partial u^{i_1}_1}{\partial x^c}u^{i_2}_2\dots u^{i_t}_t u^c_{t+1} + \dots +\right.\\
&\quad \left. +u^{i_1}_1\dots u^{i_{t-1}}_{t-1}\frac{\partial u^{i_t}_t}{\partial x^c}u^c_{t+1}\right),\\
-K^t_f(\nabla^h_{u_{t+1}}u_1,\dots,u_t) &= -\Gamma^a_{i_{t+1}i_1}K^\sigma_{ai_2\dots i_t}u^{i_1}_1\dots u^{i_t}_t u^{i_{t+1}}_{t+1} -\\
&\quad -K^\sigma_{i_1\dots i_t}\frac{\partial u^{i_1}_1}{\partial x^c}u^{i_2}_2\dots u^{i_t}_t u^c_{t+1},\\
&\vdots\\
-K^t_f(u_1,\dots,\nabla^h_{u_{t+1}}u_t) &= -\Gamma^a_{i_{t+1}i_t}K^\sigma_{ai_1i_2\dots i_{t-1}}u^{i_1}_1\dots u^{i_t}_t u^{i_{t+1}}_{t+1} -\\
&\quad -K^\sigma_{i_1\dots i_t}u^{i_2}_2\dots u^{i_{t-1}}_{t-1}\frac{\partial u^{i_t}_t}{\partial x^c}u^c_{t+1}.
\end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic a symetrizací dostáváme

$$K^{t+1}_f(u_1,\dots,u_{t+1}) = S[\nabla^g_{f_* u_{t+1}} K^t_f(u_1,\dots,u_t) - K^t_f(\nabla^h_{u_{t+1}}u_1,u_2,\dots,u_t)-$$
$$-K^t_f(u_1,\nabla^h_{u_{t+1}}u_2,u_3,\dots,u_t) - \dots - K^t_f(u_1,\dots,u_{t-1},\nabla^h_{u_{t+1}})] =$$

$$S[K^{\sigma}_{i_1\dots i_t,i_{t+1}}+\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}K^{\alpha}_{i_{t+1}}K^{\beta}_{i_1\dots i_t}-\Gamma^{a}_{i_{t+1}i_1}K^{\sigma}_{ai_2\dots i_t}-\dots-$$
$$-\Gamma^{a}_{i_{t+1}i_t}K^{\sigma}_{ai_1\dots i_{t-1}}]u_1^{i_1}\dots u_{t+1}^{i_{t+1}}=K^{\sigma}_{i_1\dots i_{t+1}}u_1^{i_1}\dots u_{t+1}^{i_{t+1}}.$$

Zobrazení $K^1_f=f_*$, funkce K^{σ}_i reprezentují v souřadnicích tečné zobrazení. Zobrazení K^2_f je až na znaménko totožné se zobrazením K_f zavedeným v kapitole 2.5 a K^3_f je totožné se zobrazením P_f zavedeným v kapitole 2.11.

Kapitola 3

Využití invariantů ve fyzikálních teoriích

V této kapitole definujeme přirozenou Lagrangeovu strukturu a uvedeme tento pojem do souvislosti s diferenciálními invarianty, které byly studovány v kapitole 2. Ukáže se, že problém hledání přirozených Lagrangeových struktur se redukuje na hledání diferenciálních invariantů příslušných typových vrstev. Zavedeme pojem funkcionálu akce, dále se stručně zmíníme o konstrukci Lagrangiánů z báze invariantů nalezené v kapitole 2.4 a 2.10.

3.1 Přirozené Lagrangeovy struktury

Nechť $\mathcal{D}_n = (\mathrm{Ob}\mathcal{D}_n, \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n, \circ)$ je kategorie hladkých variet dimenze n a jejich vložení. Uvažujme kategorii $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m = (\mathrm{Ob}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Ob}\mathcal{D}_m, \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n, \circ \times \circ)$, $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Ob}\mathcal{D}_m$, $\alpha \times \beta \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Mor}\mathcal{D}_m$ a levou $L_n^{r+1} \times L_m^{r+1}$-varietu Q^r, $r \geq 0$ ($Q^0 = Q$). $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}$ je pravý hlavní L_n^r-prostor reperů na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}$ je pravý hlavní L_m^r-postor reperů na $\mathcal{Y}$. Symbolem $\mathcal{F}^{r+1}\alpha$ resp. $\mathcal{F}^{r+1}\beta$ rozumíme $\mathcal{F}^{r+1}$-lifting zobrazení $\alpha : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ resp. $\beta : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$. Definujme následující přiřazení:

$$\mathcal{F}_{mn}^{r+1}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y},$$

$$\mathcal{F}_{mn}^{r+1}(\alpha \times \beta) \to \mathcal{F}^{r+1}\alpha \times \mathcal{F}^{r+1}\beta,$$

kde $\mathcal{F}^{r+1}$-lifting zobrazení $\alpha : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ je dán vztahem

$$\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_1 \ni j_0^{r+1}\zeta \to \mathcal{F}^{r+1}\alpha(j_0^{r+1}\zeta) = j_0^{r+1}(\alpha \circ \zeta) \in \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_2,$$

analogicky pro β. $\mathcal{F}^{r+1}_{mn}$ je kovariantní funktor z kategorie $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_n$ do kategorie pravých hlavních $L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m$-prostorů. Definujme přiřazení

$$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r.$$

Pro morfismy $\alpha : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$, $\beta : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$ definujme $\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}$-lifting zobrazení $\alpha \times \beta$

$$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta) : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_1 \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}_1) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to$$
$$\to (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}_2 \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}_2) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r,$$

vztahem

$$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta)([j^{r+1}_0\zeta, j^{r+1}_0\xi, q]) = [j^{r+1}_0(\alpha \circ \zeta), j^{r+1}_0(\beta \circ \xi), q]$$

pro libovolné $j^{r+1}_0\zeta \in \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}$, $j^{r+1}_0\xi \in \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}$, $q \in Q^r$.

$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}$ je kovariantní funktor z kategorie $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ do kategorie asociovaných $(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)$-prostorů. Projekce označujeme následovně

$$\pi^{r+1}_{mn} = \pi^{r+1}_{\mathcal{X}} \times \pi^{r+1}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y} \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

$$\pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

$$p_1 \circ \pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to \mathcal{X}.$$

$$p_2 \circ \pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X} \times \mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y}) \times_{(L^{r+1}_n \times L^{r+1}_m)} Q^r \to \mathcal{Y}.$$

Definujme působení grupy $L^1_n \times L^1_m = GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})$ na $\mathbf{R}$ vztahem

$$(GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m, \mathbf{R})) \times \mathbf{R} \ni ((A, C), t) \to |\det A|^{-1} \cdot t \in \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

Působení druhé komponenty grupy $L^1_n \times L^1_m$ je triviální. Množina $\mathbf{R}$ s touto akcí má strukturu levé $L^1_n \times L^1_m$-variety, kterou budeme označovat $\tilde{\mathbf{R}}$.

Přirozenou Lagrangeovou strukturou r-tého řádu budeme rozumět dvojici $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \lambda)$, $r \geq 0$, kde λ je zobrazení definované na otevřené podmnožině $\mathcal{W} \subset \mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$:

$$\lambda : \mathcal{W} \to \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$$

a splňující pro každé $\alpha \times \beta \in \mathrm{Mor}\mathcal{D}_n \times \mathrm{Mor}\mathcal{D}_m$, $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\beta : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$

1.
$$\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta)(\mathcal{W}) = \mathcal{W}, \tag{3.2}$$

2.
$$\lambda \circ \mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta) = \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha \times \beta) \circ \lambda. \tag{3.3}$$

Poznámka: Vzhledem k tomu, že druhá komponenta grupy $L^1_n \times L^1_m$ působí na $\mathbf{R}$ triviálně a pro libovolné $y \in \mathcal{Y}$ a $j^1_0\zeta \in \mathcal{F}^1\mathcal{X}$ je její působení na $\{j^1_0\zeta\} \times \pi^{-1}_{\mathcal{Y}}(y)$ tranzitivní, můžeme množinu $\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ ztotožnit s množinou $\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}'}\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, kde $\tilde{\mathbf{R}}'$ je levá L^1_n-varieta s akcí $L^1_n \times \mathbf{R} \ni (A, t) \to |\det A|^{-1} \cdot t \in \mathbf{R}$ a $\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}'}$ je $\tilde{\mathbf{R}}'$-lifting asociovaný $\mathcal{F}^1$-liftingem. Dále platí, že $\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}'}\mathcal{X} \sim \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}'}\mathcal{X} \otimes \Lambda^n T^*\mathcal{X}$ je prostor lichých n-forem na varietě $\mathcal{X}$. Jak se dále ukáže, zobrazení λ zachovává bázi, může být tedy zapsáno jako $\lambda = \lambda_{\mathcal{X}} \times (p_2 \circ \pi^{r+1}_{Q^r})$, kde $\lambda_{\mathcal{X}}$ přiřazuje každé třídě $[j^{r+1}_0\zeta, j^{r+1}_0\xi, q] \in \mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ lichou n-formu na $\mathcal{X}$, je tedy lagrangiánem v běžně užívaném smyslu.

Nechť $L : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$ je diferenciální invariant. *Realizací diferenciálního invariantu L na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$* nazveme zobrazení

$$\lambda_L : \mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \to \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$$

definované vztahem

$$\lambda_L([j^{r+1}_0\zeta, j^{r+1}_0\xi, q] = [j^1_0\zeta, j^1_0\xi, L(q)].$$

Věta 3.1 *Platí*

1. *Každá přirozená Lagrangeova struktura $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \lambda)$ je realizací jednoznačně určeného diferenciálního invariantu $L : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$.*

2. *Dvojice $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}), \lambda_L)$, kde λ_L je realizace diferenciálního invariantu $L : Q^r \to \tilde{\mathbf{R}}$, je přirozenou Lagrangeovou strukturou.*

Důkaz: 1. Nejprve ukážeme, že zobrazení λ splňující vztah (3.3) zachovává bázi, tj. zobrazení λ_0 definované následujícím diagramem

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\pi^{r+1}_{Q^r}"'] & \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \arrow[d, "\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}"] \\
\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \arrow[r, "\lambda_0"] & \mathcal{X} \times \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

je identita. Z definice jednotlivých zobrazení a komutativity odpovídajících diagramů plyne: $\pi^{r+1}_{Q^r} \circ \mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha \times \beta) = (\alpha \times \beta) \circ \pi^{r+1}_{Q^r}$, $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}} \circ \mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha \times \beta) =$

$(\alpha\times\beta)\circ\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}$, $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda=\lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r}$ (definice λ_0). Ze vztahu (3.3) dostáváme (působením projekce $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}$ zleva): $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha\times\beta)\circ\lambda=\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta)$. Užitím předchozích vztahů nabudou pravá resp. levá strana poslední rovnosti tvaru: $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta)=\lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r}\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta)=\lambda_0\circ(\alpha\times\beta)\circ\pi^{r+1}_{Q^r}$ resp. $\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha\times\beta)\circ\lambda=(\alpha\times\beta)\circ\pi^1_{\tilde{\mathbf{R}}}\circ\lambda=(\alpha\times\beta)\circ\lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r}$. Odtud $(\alpha\times\beta)\circ\lambda_0\circ\pi^{r+1}_{Q^r}=\lambda_0\circ(\alpha\times\beta)\circ\pi^{r+1}_{Q^r}\Rightarrow(\alpha\times\beta)\circ\lambda_0=\lambda_0\circ(\alpha\times\beta)$, tj. $\lambda_0=\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\times\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$.

Nyní zkonstruujeme k dané přirozené Lagrangeově struktuře diferenciální invariant $L:Q^r\to\tilde{R}$. Definujeme zobrazení $L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}:Q^r\to\tilde{\mathbf{R}}$ následovně

$$\lambda[j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi,q]=[j_0^1\zeta,j_0^1\xi,L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}(q)]$$

Ukážeme, že zobrazení $L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}$ nezávisí na volbě $j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi$. Pro $\alpha\times\beta\in\mathrm{Mor}\mathcal{D}_n\times\mathrm{Mor}\mathcal{D}_m$ platí

$$\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}(\alpha\times\beta)\circ\lambda([j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi,q])=\mathcal{F}^1_{\tilde{\mathbf{R}}}([j_0^1\zeta,j_0^1\xi,L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}(q)])=$$

$$=[j_0^1(\alpha\circ\zeta),j_0^1(\beta\circ\xi),L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}(q)]=\lambda\circ\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\alpha\times\beta)([j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi,q])=$$

$$=\lambda([j^{r+1}(\alpha\circ\zeta),j^{r+1}(\beta\circ\xi),q])=[j_0^1(\alpha\circ\zeta),j_0^1(\beta\circ\xi),L_{j_0^{r+1}(\alpha\circ\zeta),j_0^{r+1}(\beta\circ\xi)}(q)].$$

V předchozím výpočtu jsme mj. užili vztah (3.3).

Položíme-li nyní $\alpha=\zeta\mu\zeta^{-1}$ a $\beta=\xi\sigma\xi^{-1}$, kde $\mu:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ resp. $\sigma:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ s počátkem a koncem v $0_{\mathbf{R}^n}$ resp $0_{\mathbf{R}^m}$, dostáváme $L_{\overline{j_0^{r+1}\zeta},\overline{j_0^{r+1}\xi}}=L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}$, kde $\overline{j_0^{r+1}\zeta}=j_0^{r+1}\zeta\cdot j_0^{r+1}\mu$ resp. $\overline{j_0^{r+1}\xi}=j_0^{r+1}\xi\cdot j_0^{r+1}\sigma$. Můžeme tedy psát $L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}=L_{\zeta(0),\xi(0)}$, neboť zobrazení $L_{j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi}$ nezávisí na bázích v daných bodech $\zeta(0)=x,\xi(0)=y$.

Zvolíme-li $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ a morfismus $\alpha\times\beta$ tak, že $(\alpha\times\beta)(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, $\zeta(0)=x_1$, $\xi(0)=y_1$, dostáváme $L_{x_1,y_1}=L_{x_2,y_2}$,tj. zobrazení nezávisí na bodu (x,y). Položíme tedy $L_{x,y}=L$.

Ukážeme, že $L:Q^r\to\tilde{\mathbf{R}}$ je diferenciální invariant. Nechť $(j_0^{r+1}\mu,j_0^{r+1}\sigma)\in L_n^{r+1}\times L_m^{r+1}$, $(\pi_n^{r+1,1}\times\pi_m^{r+1,1})(j_0^{r+1}\mu,j_0^{r+1}\sigma)=(j_0^1\mu,j_0^1\sigma)\in L_n^1\times L_m^1$.

$$[j_0^1(\zeta\circ\mu),j_0^1(\xi\circ\sigma),((j_0^1\mu)^{-1},(j_0^1\sigma)^{-1})\cdot L(q)]=[j_0^1\zeta,j_0^1\xi,L(q)]=$$

$$\lambda([j_0^{r+1}\zeta,j_0^{r+1}\xi,q])=\lambda([j_0^{r+1}(\zeta\circ\mu),j_0^{r+1}(\xi\circ\sigma),((j_0^{r+1}\mu)^{-1},(j_0^{r+1}\sigma)^{-1})\cdot q])=$$

$$=[j_0^1(\zeta\circ\mu),j_0^1(\xi\circ\sigma),(L((j_0^1\mu)^{-1},(j_0^1\sigma)^{-1})\cdot q)].$$

Jednoznačnost ukážeme sporem. Předpokládejme, že $L_1,L_2:Q^r\to\tilde{\mathbf{R}}$ jsou dva různé diferenciální invarianty, jejichž realizace je λ. Pak pro $q\in Q^r$ libovolné platí

$$([j_0^1\zeta,j_0^1\xi,L_1(q)]=[j_0^1\zeta,j_0^1\xi,L_2(q)])\Rightarrow$$

existuje $(j_0^1\mu, j_0^1\sigma) \in L_n^1 \times L_m^1$ tak, že

$$(j_0^1\mu, j_0^1\sigma)\cdot(j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_1(q)) = (j_0^1\zeta, j_0^1\xi, L_2(q)).$$

Vzhledem k tomu, že akce $L_n^1 \times L_m^1$ na $\mathcal{F}^1\mathcal{X}\times\mathcal{F}^1\mathcal{Y}$ je volná, platí $j_0^1\mu = j_0^1\mathrm{id}_{\mathbf{R}^n}$, $j_0^1\sigma = j_0^1\mathrm{id}_{\mathbf{R}^m}$ a tedy $L_1 = L_2$.

2. Podmínka (3.2) je splněna, neboť definiční obor λ_L je $\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$. Přímým dosazením z definice realizace diferenciálního invariantu do vztahu (3.3) a porovnáním levé a pravé strany prověříme platnost podmínky (3.3).

♡

Poznámka: Přirozené Lagrangeovy struktury jsou tedy v bijektivní korespondenci s diferenciálními invarianty příslušných typových vrstev. Problém hledání přirozených Lagrangeových struktur (nebo také *invariantních Lagrangiánů*) se redukuje na hledání diferenciálních invariantů, jemuž je věnována tato práce. Fyzikální význam mají diferenciální invarianty r-tého řádu s hodnotami v levé $L_n^1 \times L_m^1$-varietě $\tilde{R}$. V další kapitole se stručně zmíníme o konstrukci těchto Lagrangiánů z báze invariantů nalezené v 2.4 a 2.10.

Nechť $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}), \lambda)$ je přirozená Lagrangeova struktura a $\mathcal{W}$ definiční obor λ. Uvažujme n rozměrnou kompaktní podvarietu $\Omega \subset p_1\circ\pi^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{W})$ s okrajem. Symbolem $\Gamma_{\Omega,\mathcal{W}}(p_1\circ\pi^{r+1}_{Q^r})$ značíme množinu všech hladkých řezů γ fibrované variety

$$p_1\circ\pi^{r+1}_{Q^r} : (\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{X}\times\mathcal{F}^{r+1}\mathcal{Y})\times_{(L_n^{r+1}\times L_m^{r+1})} Q^r \to \mathcal{X}$$

definovaných na Ω takových, že $\gamma(\Omega)\subset\mathcal{W}$. Zobrazení λ pak definuje funkci

$$\Gamma_{\Omega,\mathcal{W}}(p_1\circ\pi^{r+1}_{Q^r}) \ni \gamma \to \lambda_\Omega(\gamma) = \int_\Omega \lambda\circ\gamma \in \mathbf{R},$$

kterou nazýváme *funkcionálem akce přirozené Lagrangeovy struktury* $(\mathcal{F}^{r+1}_{Q^r}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y}), \lambda)$.

3.2 Harmonická zobrazení

Jako v předchozí kapitole uvažujeme variety $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$, metriky h na $\mathcal{X}$ resp. g na $\mathcal{Y}$ a vnoření $f : \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$. Souřadnicové systémy $(\mathcal{U},\varphi), \varphi = (x^i), i = 1,\dots,n, x\in\mathcal{U}$ a $(\mathcal{V},\psi), \psi = (y^\sigma), \sigma = 1,\dots,m, f(x)\in\mathcal{V}$, $h = h_{ij}\mathrm{d}x^i\odot\mathrm{d}x^j$ resp. $g = g_{\sigma\nu}\mathrm{d}y^\sigma\odot\mathrm{d}y^\nu$ je metrika na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$, $h^{ij}h_{jk} = \delta^i_k$, $g_{\sigma\nu}g^{\nu\alpha} = \delta^\alpha_\sigma$.

Definujme *hustotu energie zobrazení* f vztahem

$$e(f)(x) = \frac{1}{2} h^{ij}(x) f_i^\sigma(x) f_j^\nu(x) g_{\sigma\nu}(f(x)).$$

Takto definovaná funkce $e(f) : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ nezávisí na výběru souřadnicových systémů, neboť platí

$$\overline{h}^{ij}(x)\overline{f}_i^\sigma(x)\overline{f}_j^\nu(x)\overline{g}_{\sigma\nu}(f(x)) = h^{ij}(x) f_i^\sigma(x) f_j^\nu(x) g_{\sigma\nu}(f(x)).$$

Poznámka: Tuto funkci lze geometricky interpretovat jako stopu tenzorového součinu pullbacku metriky g zadané na $\mathcal{Y}$ zobrazením f a kontravariantní metriky na $\mathcal{X}$ určené metrikou h:

$$2e(f) = (f^* g)_{ij} h^{ij} = \langle f_* \frac{\partial}{\partial x^i} | f_* \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \langle \mathrm{d}x^i | \mathrm{d}x^j \rangle.$$

Energií zobrazení f nazveme integrál

$$E(f) = \int_{\mathcal{X}} e(f)(x) \sqrt{|\det(h)|}(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Věta 3.2 *Soustava Eulerových-Lagrangeových rovnic pro E má tvar:*

$$\frac{1}{\sqrt{|\det h|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|\det h|} h^{ij} f_j^\sigma)(x) + h^{ij}(x) \Gamma^\sigma_{\nu\eta}(f(x)) f_i^\nu(x) f_j^\eta(x) = 0, \qquad (3.4)$$

kde $1 \le \sigma \le m$, $\Gamma^\sigma_{\nu\eta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha}(g_{\alpha\nu,\eta} + g_{\alpha\eta,\nu} - g_{\nu\eta,\alpha})$.

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení je přímý a mj. je uveden v monografii [5].

♡

Řešení f rovnice (3.4) nazýváme *harmonické zobrazení.* S využitím vztahů

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|\det h|}) = \sqrt{|\det h|} h^{ab} h_{ab,i}$$

a

$$h^{ij}_{\ \ ,i} = -h^{ab} h^{ij} h_{ai,b} = -\frac{1}{2} h^{ab}(h_{ai,b} + h_{bi,a})$$

dostáváme Eulerovy-Lagrangeovy rovnice ve tvaru

$$h^{ij}(x)(\Gamma^q_{ij}(x) f_q^\sigma(x) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(f(x)) f_i^\alpha(x) f_j^\beta(x) - f_{ij}^\sigma(x)) = 0, \qquad (3.5)$$

$$\text{tj. } h^{ij}(x) K^\sigma_{ij}(x) = 0,$$

kde

$$\Gamma^q_{ij} = \frac{1}{2} h^{kq}(h_{ki,j} + h_{kj,i} - h_{ij,k}).$$

Nechť $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ je podvarieta variety $\mathcal{Y}$ a nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je vnoření. Řekneme, že vnořená podvarieta $\mathcal{X}$ je *minimální*, je-li f kritickým bodem funkcionálu energie, tj. řešením jeho Eulerových-Lagrangeových rovnic.

Věta 3.3 *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $\mathcal{X}$ *je minimální podvarieta* $\mathcal{Y}$*,*
2. $h^{ij}K^{\sigma}_{ij} = 0, \quad \forall \sigma \in \{1, \dots, m\}$,
3. f *je harmonické.*

Důkaz: Tvrzení plyne ze vztahů (3.4) a (3.5).

♡

3.3 Konstrukce lagrangiánů

Zabývejme se nyní konstrukcí lagrangiánů z vnoření variet s metrickými poli. S využitím věty 3.1 a vět 2.4 a 2.5 resp. 2.14 a 2.15 můžeme říci, že přirozené Lagrangeovy struktury nultého řádu jsou v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$- ekvivariantními zobrazeními

$$Q \to \tilde{\mathbf{R}},$$

přirozené Lagrangeovy struktury prvního řádu jsou v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$-ekvivariantními zobrazeními

$$\mathcal{P}_1 \to \tilde{\mathbf{R}}$$

a přirozené Lagrangeovy struktury druhého řádu jsou v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$-ekvivariantními zobrazeními

$$\mathcal{P}_2 \to \tilde{\mathbf{R}}.$$

Levá akce grupy $L^1_n \times L^1_m$ na Q je zavedena vztahem (2.1), $\mathcal{P}_1$ resp. $\mathcal{P}_2$ jsou levé $L^1_n \times L^1_m$-variety s tenzorovou akcí zavedené vztahy (2.5) resp. (2.14) a $\tilde{R}$ je varieta s levou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$ definovanou vztahem (3.1). Uvidíme, že tato ekvivariantní zobrazení jsou určitým typem tzv. tenzorových invariantů. Dále budeme také označovat $Q = \mathcal{P}_0$. Analogicky jsou přirozené Lagrangeovy struktury r-tého řádu pro $r \geq 2$ v bijektivní korespondenci s $L^1_n \times L^1_m$-ekvivariantními zobrazeními $\mathcal{P}_r \to \tilde{\mathbf{R}}$, kde $\mathcal{P}_r$ je odpovídající prostor s tenzorovou akcí.

Nyní uvedeme definice a pomocné věty, které budou využity pro formulaci tvrzení o konstrukci všech algebraických Lagrangiánů z vnoření variet s metrickými poli, které je cílem této kapitoly.

Věta 3.4 *Každé ekvivariantní zobrazení $L : \mathcal{P}_r \to \tilde{R}$, lze zapsat ve tvaru $L = \mathcal{L} \cdot L_0$, kde $\mathcal{L}$ je $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce $\mathcal{P}_r \to R$ a $L_0(h_{ij}, g_{\sigma\nu}, \ldots) = \sqrt{|\det(h_{ij})|}$.*

Důkaz: Nechť $L : \mathcal{P}_r \to \tilde{\mathbf{R}}$ je libovolné ekvivariantní zobrazení. Můžeme položit $\mathcal{L} = \frac{L}{L_0}$, neboť $L_0 \neq 0$. Zřejmě platí $\mathcal{L}((A, C) \cdot p) = \mathcal{L}(p)$ pro všechna $p \in \mathcal{P}_r$ a všechna $(A, C) \in L^1_n \times L^1_m$.

♡

Označme $\mathbf{R}^*$ multiplikativní grupu reálných čísel (bez nuly). Nechť $\mathcal{P}$ je množina s levou akcí grupy G. Funkci $F : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ nazveme *relativním invariantem grupy* G, jestliže existuje funkce $\chi : G \to \mathbf{R}^*$ tak, že pro každé $p \in \mathcal{P}$ a $g \in G$ platí
$$F(g \cdot p) = \chi(g) \cdot F(p).$$

Existuje-li taková funkce χ, pak je určena jednoznačně a nazývá se *váhou invariantu.* Funkce F se nazývá *G-invariantní (absolutní invariant)*, je-li $\chi(g) = 1$ pro všechna $g \in G$. Klasická teorie invariantů řeší problém konstrukce relativních invariantů z tenzorů pro $G = L^1_n$. V tomto odstavci zobecníme některé věty a postupy teorie invariantů na případ tenzorové akce grupy $L^1_n \times L^1_m$. Stejným způsobem by však mohla být teorie zobecněna pro tenzorovou akci libovolného kartézského součinu konečného počtu grup $L^1_{n_1} \times \ldots \times L^1_{n_k}$.

Prvek $\tau \in \otimes^{r_1}_{s_1} \mathbf{R}^{d_1} \otimes \ldots \otimes^{r_k}_{s_k} \mathbf{R}^{d_k}$ nazveme *relativně invariantním tenzorem*, jestliže existuje funkce $\chi : L^1_{d_1} \times \ldots \times L^1_{d_k} \to \mathbf{R}^*$ tak, že pro každý prvek $A = (A_1, \ldots, A_k) \in L^1_{d_1} \times \ldots \times L^1_{d_k}$ platí
$$A \cdot \tau = \chi(A) \cdot \tau.$$

Pokud taková funkce χ existuje, pak je určena jednoznačně a nazývá se *váhou relativně invariantního tenzoru.*

Definujme prvky $\varepsilon \in \otimes^0_n \mathbf{R}^n$ a $\eta \in \otimes^n_0 \mathbf{R}^n$ vztahy
$$\varepsilon = \epsilon^{i_1 \ldots i_n} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n},$$
$$\eta = \epsilon_{i_1 \ldots i_n} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_n},$$
kde $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ resp. $\epsilon^{i_1 \ldots i_n}$ jsou permutační indexy. Tenzory η a ε nazýváme *Levi–Civitovými tenzory.* Následující věta, platná pro tenzory typu (r, s) na $\mathbf{R}^n$ je uvedená s podrobným důkazem v [7].

Věta 3.5 *Platí*

1) *Každý relativně invariantní tenzor $\tau \in \otimes_r^r \mathbf{R}^n$ je tvaru*

$$\Delta_r^r = \sum_{\sigma \in S_r} c_\sigma \cdot \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \cdot \ldots \cdot \delta_{j_{\sigma(r)}}^{i_r} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_r},$$

kde $c_\sigma \in \mathbf{R}$ a S_r je grupa permutací množiny $\{1, \ldots r\}$.

2) *Každý relativně invariantní tenzor $\tau \in \otimes_0^n \mathbf{R}^n$ je skalární násobek Levi–Civitova tenzoru η. Každý relativně invariantní tenzor $\tau \in \otimes_n^0 \mathbf{R}^n$ je skalární násobek Levi–Civitova tenzoru ε.*

3) *Každý relativně invariantní tenzor $\tau \in \otimes_r^s \mathbf{R}^n$, pro který $r - s \neq k \cdot n$ pro všechna celá k, je tvaru $\tau = 0$.*

4) *Každý relativně invariantní tenzor $\tau \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n$, kde $r - s = k \cdot n$, k je celé záporné číslo, lze vyjádřit jako úplnou kontrakci tenzoru Δ_s^s a tenzoru $\otimes^{|k|}\varepsilon$. Každý relativně invariantní tenzor $\tau \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n$, kde $r - s = k \cdot n$, k je celé kladné číslo, lze vyjádřit jako úplnou kontrakci tenzoru Δ_r^r a tenzoru $\otimes^k \eta$.*

Věta 3.6 *Libovolný relativně invariantní tenzor $T \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n \otimes_\beta^\alpha \mathbf{R}^m$ je možné vyjádřit jako lineární kombinaci výrazů, z nichž každý je tenzorovým součinem relativně invariantního tenzoru $t_i \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n$ a relativně invariantního tenzoru $\tau_i \in \otimes_\beta^\alpha \mathbf{R}^m$.*

Důkaz: Tvrzení je zřejmé z transformačních vztahů pro složky tenzoru. Nechť J je multiindex typu $\binom{i_1 \ldots i_s}{j_1 \ldots j_r}$, Λ je multiindex typu $\binom{\sigma_1 \ldots \sigma_\beta}{\nu_1 \ldots \nu_\alpha}$. Označme $E_J = (e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$, kde (e_i) je báze $\mathbf{R}^n$, $F_\Lambda = (f^{\sigma_1}, \ldots, f^{\sigma_\beta}, f_{\nu_1}, \ldots, f_{\nu_\alpha})$, kde (f_ν) je báze $\mathbf{R}^m$. Zvolme jiné báze $(\overline{e}_i) = A \cdot (e_i)$ resp. $(\overline{f_\nu}) = C \cdot (f_\nu)$, $\overline{E}_J = A \cdot E_J$ resp. $\overline{F}_\Lambda = C \cdot F_\Lambda$. Z předpokladu relativní invariantnosti T vyplývá $T(\overline{E}_J, \overline{F}_\Lambda) = \chi(A, C) T(E_J, F_\Lambda)$. Poznamenejme, že každý homomorfismus $\chi : L_n^1 \times L_m^1 \to \mathbf{R}^*$ lze napsat ve tvaru $\chi(A, C) = \chi_1(A) \cdot \chi_2(C)$, pro všechna $A \in L_n^1, C \in L_m^1$, kde $\chi_1 : L_n^1 \to \mathbf{R}^*$ resp. $\chi_2 : L_m^1 \to \mathbf{R}^*$ jsou homomorfismy. Definujme

$$T_J = T(E_J, \cdot) \in \otimes_\beta^\alpha \mathbf{R}^m,$$

$$T_\Lambda = T(\cdot, F_\Lambda) \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n.$$

Zřejmě platí $T_J(\overline{F}_\Lambda) = \chi(I_n, C) T_J(F_\Lambda)$ resp. $T_\Lambda(\overline{E}_J) = \chi(A, I_m) T_\Lambda(E_J)$, tenzor T_J je tedy relativně invariantní s váhou $\chi_1 = \chi|_{\{I_n\} \times L_m^r}$ resp. tenzor T_Λ je relativně invariantní s váhou $\chi_2 = \chi|_{L_n^r \times \{I_m\}}$. Platí

$$T = c^J \otimes T_J = \gamma^\Lambda \otimes T_\Lambda,$$

kde $c^J \in \otimes_s^r \mathbf{R}^n$ resp. $\gamma^\Lambda \in \otimes_\beta^\alpha \mathbf{R}^m$ (J, Λ jsou příslušné multiindexy). Z tohoto vztahu, s přihlédnutím k větě 3.5, je již zřejmé dokazované tvrzení.

♡

Věta 3.7 *Každá algebraická $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce na prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí je řešením nějaké algebraické rovnice, jejíž koeficienty jsou racionální $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce na tomto prostoru.*

Důkaz: Předpokládejme, že $\mathcal{L}$ je algebraická funkce, tj. je řešením rovnice

$$[\mathcal{L}(p)]^k + C_1(p)[\mathcal{L}(p)]^{k-1} + \ldots + C_k(p) = 0.$$

Uvažujme takovou rovnici, pro kterou je číslo k nejmenší. Koeficienty $C_1, \ldots, C_k$ jsou tedy určeny jednoznačně (v případě nejednoznačnosti bychom odečtením těchto dvou rovnic získali rovnici nižšího stupně). Platí

$$[\mathcal{L}(\overline{p})]^k + C_1(\overline{p})[\mathcal{L}(\overline{p})]^{k-1} + \ldots + C_k(\overline{p}) = 0.$$

Z předpokladu $\mathcal{L}(\overline{p}) = \mathcal{L}(p)$ ($L^1_n \times L^1_m$-invariance funkce $\mathcal{L}$) a jednoznačnosti koeficientů $C_1, \ldots, C_k$ plyne, že $C_i(\overline{p}) = C_i(p)$ pro všechna $p \in \mathcal{P}$ a $i = 1, \ldots k$, tj. $C_i(p)$ jsou rovněž $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce.

♡

Věta 3.8 *Každá racionální $L^1_n \times L^1_m$-invariantní funkce $\mathcal{L} : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ je podílem dvou polynomických relativních invariantů se stejnou váhou.*

Důkaz: Nechť $\mathcal{L}(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$, kde φ a ψ jsou nesoudělné polynomické funkce na prostoru $\mathcal{P}$. Z předpokladu $\mathcal{L}(\overline{p}) = \mathcal{L}(p)$ dostáváme

$$\frac{\varphi(\overline{p})}{\psi(\overline{p})} = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)},$$

$$\varphi(\overline{p}) = \varphi(p)\frac{\psi(\overline{p})}{\psi(p)} \quad \text{a} \quad \psi(\overline{p}) = \psi(p)\frac{\varphi(\overline{p})}{\varphi(p)}.$$

Polynomy $\varphi(p)$ a $\psi(p)$ jsou nesoudělné, polynom $\psi(\overline{p})$ je tedy dělinelný polynomem $\psi(p)$, oba mají stejný stupeň, a proto je jejich podílem číslo. Analogicky polynom $\varphi(\overline{p})$ je dělitelný polynomem $\varphi(p)$. Označme $\overline{p} = (A, C) \cdot p$ a $\varphi(p) = \chi_1(A, C)\varphi(\overline{p})$, $\psi(p) = \chi_2(A, C)\psi(\overline{p})$. Platí

$$\frac{\varphi(p)}{\psi(p)} = \frac{\varphi(\overline{p})}{\psi(\overline{p})} = \frac{\chi_1(A, C)\varphi(p)}{\chi_2(A, C)\psi(p)}.$$

Odtud $\chi_1 = \chi_2$.

♡

Věta 3.9 *Každý polynomický relativní invariant z prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí je součtem homogenních polynomických relativních invariantů.*

Důkaz: Transformační rovnice pro komponenty bodu $p \in \mathcal{P}$ je lineární a homogenní. Vybereme-li členy určitého stupně z daného relativního invariantu, jejich součet bude opět relativním invariantem.

♡

Nyní se zabývejme konstrukcí relativních invariantů na prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$, které jsou homogenními polynomickými funkcemi v komponentách bodů $p \in \mathcal{P}$. Nechť souřadnice bodu $p \in \mathcal{P}$ jsou souborem souřadnic tenzorů $\tau_1 \in \otimes^{r_1}_{s_1}\mathbf{R}^n \otimes^{\alpha_1}_{\beta_1} \mathbf{R}^m, \ldots \tau_k \in \otimes^{r_k}_{s_k}\mathbf{R}^n \otimes^{\alpha_k}_{\beta_k} \mathbf{R}^m$. Nechť $d_1, \ldots, d_k$ jsou příslušné počty jejich nezávislých komponent. Zkonstruujme tenzor

$$T = \otimes^{d_1}\tau_1 \otimes^{d_2} \tau_2 \ldots \otimes^{d_k} \tau_k.$$

Jeho komponenty označme

$$T^{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta}_{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha},$$

kde $r = r_1 d_1 + \ldots + r_k d_k$, $s = s_1 d_1 + \ldots + s_k d_k$, $\alpha = \alpha_1 d_1 + \ldots + \alpha_k d_k$, $\beta = \beta_1 d_1 + \ldots + \beta_k d_k$. Každý homogenní polynomický invariant je tvaru

$$I = B^{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}_{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta} T^{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta}_{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}.$$

Z předpokladu relativní invariantnosti I získáváme

$$B^{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}_{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta} T^{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta}_{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha} = \chi(A, C) B^{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}_{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta} \overline{T}^{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta}_{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}$$

a tedy po dosazení za pruhované komponenty tenzoru T dostáváme

$$B^{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}_{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta} a^{i_1}_{k_1} \ldots a^{i_s}_{k_s} b^{l_1}_{j_1} \ldots b^{l_r}_{j_r} c^{\sigma_1}_{\pi_1} \ldots c^{\sigma_\beta}_{\pi_\beta} d^{\varrho_1}_{\nu_1} \ldots b^{\varrho_\alpha}_{\nu_\alpha} = \chi(A, C) \cdot B^{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}_{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta}.$$

Soubor koeficientů $B^{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}_{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta}$ tedy tvoří komponenty nějakého relativně invariantního tenzoru.

Věta 3.10 *Každý homogenní polynomický relativní invariant z prostoru $\mathcal{P}$ s tenzorovou akcí grupy $L^1_n \times L^1_m$ lze získat jako lineární kombinaci výrazů, které vzniknou pomocí operací tenzorového součinu, alternace a kontrakce.*

Důkaz: Věta je důsledkem vět 3.5, 3.6 a skutečnosti, že soubor koeficientů $B^{j_1 \ldots j_r \nu_1 \ldots \nu_\alpha}_{i_1 \ldots i_s \sigma_1 \ldots \sigma_\beta}$ tvoří komponenty relativně invariantního tenzoru.

♡

Věta 3.11 *Každý algebraický invariantní Lagrangián z vnoření variet z metrikou libovolného řádu lze vytvořit algebraickými operacemi s výrazy, získanými z báze invariantů daného řádu pomocí operací tenzorového součinu, alternace a kontrakce.*

Důkaz: Věta je důsledkem vět 3.4, 3.7, 3.8, 3.9 a 3.10.

♡

Literatura

[1] F. David, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, Les Houches, sborník Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory, Session LXII., Institut d'etudes avanceés del'otan, 1994

[2] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Gauthier-Villars, 1972

[3] G. B. Gurevich, Foundation of the Theory of Algebraic Invariants, Groningen, 1964

[4] P. Hořava, www.arXiv.org/pdf/hep-th/9507060, 1996

[5] J. Jost, Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, 1998,

[6] I. Kolář, P. Michor, J. Slovák, Natural Operations in Differential Geometry, Springer-Verlag, 1993

[7] D. Krupka, J. Janyška, Lectures on Differential Invariants, University J. E. Purkyně, Brno, 1990

[8] D. Krupka, Natural Lagrangian Structures, University J. E. Purkyně, 1984

[9] D. Krupka, The Geometry of Lagrange Structures, Silesian University, Opava, 1997

[10] P. Olver, Classical Invariant Theory, Cambridge University, 1999

[11] A. M. Polyakov, Gauge fields and Strings, Harwood Academic Publishers GmbH, 1987

[12] J. Šeděnková, Diplomová práce, Silesian University, Opava, 1999

[13] J. Šeděnková, Differential Invariants of the Metric Tensor, Proceedings of the Seminar on Differential Geometry, Silesian University, Opava, 2000

[14] H. Weyl, The Classical Groups, Their Invariants and Representations, Princeton University, 1997

[15] K. Yano, M. Kon: Structures on Manifolds, 1984