Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Variační posloupnost na Grassmaniánech

Diplomová práce

Pavla Musilová

Brno, duben 1999

Anotace:

Musilová P.: Variační posloupnost na grassmaniánech. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Brno 1999.

Práce se zabývá formulací základů teorie variačních posloupností konečného řádu na Grassmannových fibracích se zaměřením na mechaniku prvého i vyššího řádu.

Vedoucí diplomové práce : Mgr. Michal Krupka, Dr.
Konzultant : Doc. RNDr. Jana Musilová, CSc.

Prohlašuji, že jsem tuto práci napsala samostatně s použitím uvedené literatury.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Studium variační posloupnosti na geometrických stukturách nazývaných Grassmannovy fibrace, patří k problematice variační analýzy, která je v poslední době intenzivně studována pro své aplikační možnosti zejména ve fyzice, dosud však není v úplnosti uspokojivě vyřešena. Cílem této práce je formulovat základy teorie variačních posloupností konečného řádu na Grassmannových fibracích a získané výsledky použít pro řešení variačních úloh, jejichž povaha předurčuje právě Grassmannovy fibrace jako vhodné podkladové struktury. Následující úvodní kapitola práce je, oproti běžné zvyklosti, formulována poněkud obšírněji ve snaze objasnit co nejnázorněji význam Grassmannových fibrací i variační posloupnosti pro řešení variačních geometrických a fyzikálních úloh a předložit motivační argumenty pro budování tohoto matematického aparátu.

1.1 Geometrické struktury pro variační úlohy

Variační problémy jsou formulovány jako úlohy na nalezení extrémů (obecně stacionárních bodů) tzv. *funkcionálů*, tj. funkcí, jejichž definičními obory jsou například množiny křivek nebo ploch v prostoru, obecněji jednorozměrných, dvojrozměrných a vícerozměrných útvarů ve vícerozměrných prostorech. V tomto odstavci si všimneme rozdílnosti mezi základními dvěma typy variačních úloh, které pracovně nazveme *parametrizované* a *neparametrizované*:

• Úlohy, u nichž jsou definičními obory funkcionálů množiny parametrizovaných křivek, ploch, atd., takže jejich řešení závisí na parametrizaci rozhodujícím způsobem. Pro jejich formulaci jsou vhodnou geometrickou strukturou tzv. *fibrované variety*.

• Úlohy, u nichž je sice možné a často i vhodné použít pro popis objektů definičního oboru funkcionálů (křivek, ploch, atd.) parametrického vyjádření, to však nemá pro řešení úlohy význam, neboť všechny parametrizace jsou z hlediska řešení úlohy ekvivalentní. Geometrický popis úloh tohoto typu je založen právě na *Grassmannových fibracích*.

Ve fyzice je typickou úlohou prvého typu, tj. parametrizovanou, v podstatě jakýkoli problém Lagrangeovy mechaniky nebo teorie pole. Základem variační formulace takových úloh například v mechanice hmotných bodů a jejich soustav je předpoklad, že trajektoriemi systému v konfiguračním prostoru, tj. prostoru všech možných souborů poloh částic systému, jsou křivky, podél nichž nabývá funkcionál S, zvaný akce, stacionární hodnoty:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t))\,\mathrm{dt} = 0\,, \tag{1.1}$$

kde L je Lagrangeova funkce soustavy, závislá na jejím mechanickém stavu určeném v každém okamžiku t zobecněnými souřadnicemi a zobecněnými rychlostmi $(q^i,\, \dot{q}^i)$, index i čísluje stupně volnosti soustavy. Funkce $q^i(t)$ představují parametrické vyjádření trajektorie soustavy v konfiguračním prostoru, parametrem je čas.
Uvažme jeden z nejjednodušších modelů klasické mechaniky, matematické (rovinné) kyvadlo o hmotnosti m a délce závěsu l, jehož úhlová výchylka φ dosahuje v okamžiku $t = 0\,s$ své maximální hodnoty φ_0. Sledujme pohyb jednou v homogenním tíhovém poli Země, s jejímž povrchem spojujeme laboratorní vztažnou soustavu $\mathcal{S}$ (považovanou v prvém přiblížení za inerciální) a podruhé ve výtahu pohybujícím se svisle vzhůru s konstantním zrychlením $\vec{a}$. Lagrangeova funkce má ve vhodně zvolené soustavě souřadnic tvar

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mGl\cos\varphi\,,$$

kde $G = g$ resp. $G = g + a$ v prvém resp. druhém případě. V obou případech je, například v časovém intervalu jednoho kyvu, trajektorií kuličky kyvadla oblouk kružnice o poloměru l vymezený intervalem úhlových výchylek $[-\varphi_0, \varphi_0]$. Parametrická vyjádření v aproximaci malých výchylek, vyhovující v jednotlivých případech podmínce stacionární akce, jsou však různá:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}t \in [-\varphi_0, \varphi_0] \quad \text{pro} \quad 0 \le t \le \frac{T}{2}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{1.2}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g+a}{l}}t \in [-\varphi_0, \varphi_0] \quad \text{pro} \quad 0 \le t \le \frac{T}{2}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}\,, \tag{1.3}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi\left(\frac{T}{2}\right) = -\varphi_0\,.$$

Podmínka stacionární akce je tedy splněna u těchto dvou modelů pro různé křivky $\varphi(t)$ v jednorozměrném konfiguračním prostoru. Křivkou zde přitom rozumíme *parametrizovaný oblouk*, tj. nikoli jen množinu bodů v konfiguračním prostoru, nýbrž množinu bodů, jimiž kulička prochází v časovém sledu popsaném parametrickým vyjádřením.

Přirozenými podkladovými prostory pro popis časového vývoje konfigurace a mechanického stavu soustavy částic jsou *fibrované variety* a jejich *jetová prodloužení*:

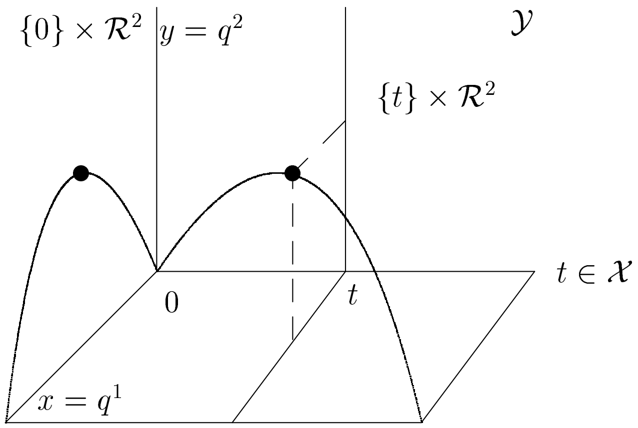
Nechť $\mathcal{Y}$ je diferencovatelná varieta dimenze $m+1$ a $\mathcal{X}$ jednorozměrná varieta. Nechť existuje surjektivní submerze $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tzv. *projekce* (pro $\mathcal{X} = \mathcal{R}$, $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^{m+1}$ kartézská projekce). Zvolme bod $x \in \mathcal{X}$. Množina $\pi^{-1}(x)$ je *vrstvou nad bodem* x. Trojici $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ nazýváme *fibrovanou varietou*, $\mathcal{Y}$ je *totální prostor* a $\mathcal{X}$ *báze*. (Pro zajímavost podotkněme, že požadavek souvislé báze by vedl k pouhým dvěma topologicky neekvivalentním možnostem: přímce a kružnici.) *Řezem* fibrované variety rozumíme každé diferencovatelné zobrazení $\gamma : \mathcal{X} \ni t \to \gamma(t) \in \mathcal{Y}$, pro které $\gamma \circ \pi = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$. (Předchozí definice popisuje *globální* řezy, definičními obory řezů *lokálních* jsou otevřená okolí bodů báze.) Řezy γ_1 a γ_2 nazveme 1-*ekvivalentními* v bodě $x \in \mathcal{X}$, jestliže existuje souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi(y) = (t(y), q^1(y), \dots q^m(y))$ na $\mathcal{Y}$ a s ním asociovaný souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi(x) = (t(x))$ na $\mathcal{X}$, $y \in \mathcal{V}$, $x = \pi(y) \in \mathcal{U}$ takový, že

$$q^i\gamma_1(y) = q^i\gamma_2(y), \quad \frac{\mathrm{d}q^i\gamma_1\varphi^{-1}(t(x))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q^i\gamma_2\varphi^{-1}(t(x))}{\mathrm{d}t}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Třída $J^1_x\gamma = [\gamma(x)]$, obsahující všechny řezy ekvivalentní v bodě x, je bodem tzv. *prvého jetového prodloužení* fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Na množině $J^1\mathcal{Y}$ všech takových tříd vzniká přirozeným způsobem struktura $(2m+1)$-rozměrné fibrované variety $(J^1\mathcal{Y}, \pi_1, \mathcal{X})$ s projekcí $\pi_1 : J^1\mathcal{Y} \ni J^1_x\gamma \to x \in \mathcal{X}$ a *asociovanými fibrovanými souřadnicovými systémy* $(\mathcal{V}_1, \psi_1)$, kde $\mathcal{V}_1 = \pi_1^{-1}(\mathcal{U})$, $\psi_1(J^1_x\gamma) = (t(x), q^i\gamma\varphi^{-1}(t(x)), \dot{q}^i\gamma\varphi^{-1}(t(x)))$. Nadále budeme jednotlivé body označovat pro jednoduchost jejich souřadnicemi, například:

$$\begin{aligned}
\pi : \mathcal{Y} \ni (t, q^i) &\longrightarrow \pi(t, q^i) = (t) \in \mathcal{X}\,,\\
\pi_1 : J^1\mathcal{Y} \ni (t, q^i, \dot{q}^i) &\longrightarrow (t) \in \mathcal{X}\,,\\
\pi_{1,0} : J^1\mathcal{Y} \ni (t, q^i, \dot{q}^i) &\longrightarrow \pi_{1,0}(t, q^i, \dot{q}^i) = (t, q^i) \in \mathcal{Y}\,.
\end{aligned}$$

Na jednoduchém příkladu nyní objasníme, jak souvisí struktura fibrované variety s variační úlohou Lagrangeovy mechaniky, konkrétně s popisem časového vývoje konfigurace a stavu mechanické soustavy: Mějme soustavu částic s m stupni volnosti. Její konfigurace je v libovolném okamžiku t určena m zobecněnými souřadnicemi (q^i), $i = 1, \dots, m$, její mechanický stav souborem $(q^i, \dot{q}^i)$ $2m$ zobecněných souřadnic a zobecněných rychlostí. Pohybové rovnice soustavy tvoří soustavu m obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu pro m neznámých funkcí $(q^i(t))$. Soubor $2m+1$ údajů $(t_0, q^i(t_0), \dot{q}^i(t_0))$, který lze interpretovat jako zadání polohy bodu v celkem $(2m+1)$-rozměrném prostoru, představuje počáteční podmínky pro nalezení partikulárního řešení soustavy pohybových rovnic, popisujícího konkrétní časový vývoj konfigurace a mechanického stavu soustavy. Každou z principiálně možných konfigurací v daném okamžiku t lze reprezentovat bodem v m-rozměrném *konfiguračním prostoru* $\mathcal{R}^m$ (euklidovský topologický prostor). Množinu $\{t\} \times \mathcal{R}^m$ lze považovat za vrstvu nad bodem t časové osy $\mathcal{X} = \mathcal{R}$. Vrstvy tedy vznikají umístěním totožných exemplářů konfiguračního prostoru $\mathcal{R}^m$ nad jednotlivé body časové osy. Kartézským průmětem bodu (t, q^i) do časové osy je okamžik t, značíme $\pi(t, q^i) = t$ (viz obr. 1). Označíme-li $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{R}^m$, má trojice $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ strukturu fibrované variety dimenze $m+1$. Časový vývoj konfigurace soustavy je zadán řezem této fibrované variety, tj. hladkou parametrizovanou křivkou $\gamma : \mathcal{X} \ni t \to \gamma(t) \in \mathcal{Y}$. Bod $(t, q^i(t))$ na této křivce odpovídá výběru jedné z možných konfigurací soustavy, ležících ve vrstvě nad bodem t. Situaci ukazuje obr. 1, znázorňující pohyb hmotného bodu v tíhovém poli Země $\vec{g}$.



Obr. 1: Pohyb v tíhovém poli Země

Pro snažší znázornění uvažujeme pohyb à priori jako rovinný. Konfiguračním prostorem je tedy euklidovská rovina $\mathcal{R}^2$, fibrovaná varieta $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \times \mathcal{R}^2$ je trojrozměrná. Parametrické vyjádření trajektorie, tj. řez γ odpovídající skutečnému pohybu hmotného bodu, je dáno vztahy

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \quad y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.4}$$

Průmětem řezu γ do (kterékoli) vrstvy, například vrstvy nad bodem $t = 0$, je křivka, po níž se částice v konfiguračním prostoru pohybuje. V tomto případě se jedná o parabolu

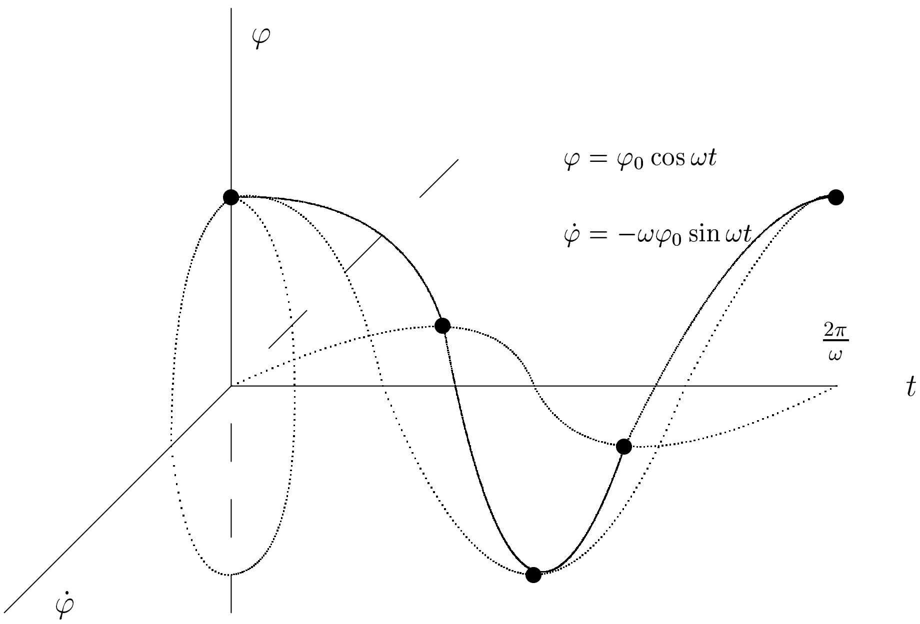
$$y = x \tan\alpha - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{1.5}$$

Analogicky dokážeme reprezentovat mechanický stav soustavy v libovolném okamžiku. Příslušný prostor přípustných stavů, tzv. *fázový prostor*, je $2m$-rozměrný a tvoří vrstvu $\mathcal{R}^{2m}$ nad bodem t časové osy. Stav v daném okamžiku lze opět promítnout na časovou osu, $\pi_1(t, q^i, \dot{q}^i) = t$. Vzniká $(2m+1)$-rozměrná fibrovaná varieta $(J^1\mathcal{Y}, \pi_1, \mathcal{X})$, která je prvým jetovým prodloužením fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Prodloužený řez $J^1\gamma(t) = (t, q^i(t), \dot{q}^i(t))$, kde $\dot{q}^i(t) = \frac{\mathrm{d}q^i\gamma(t)}{\mathrm{d}t}$, představuje parametrizaci fázové trajektorie soustavy. Situace je zřejmá z obr. 2, který znázorňuje případ matematického kyvadla popsaného vztahy typu (1.2) nebo (1.3) v časovém intervalu $[0, T]$. Konfiguračním prostorem je (jednorozměrný) prostor úhlových výchylek, fibrovaná varieta $\mathcal{Y}$ je dvojrozměrná, její prvé jetové prodloužení trojrozměrné. Řezem γ odpovídajícím parametrickému vyjádření trajektorie $\varphi(t)$ je přímo graf funkce $\varphi(t)$, tedy kosinusoida, parametrické vyjádření fázové trajektorie, určující prvé jetové prodloužení $J^1\gamma$ řezu γ má tvar

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t, \quad \dot{\varphi}(t) = -\omega\varphi_0 \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{G}{l}}\,.$$

Fázovou trajektorií (jakožto množinou bodů ve fázovém prostoru $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, který realizuje libovolnou vrstvu fibrované variety $J^1\mathcal{Y}$) je elipsa

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\varphi}}{\omega\varphi_0}\right)^2 = 1\,.$$



Obr. 2: Pohyb kyvadla

Variační úloha Lagrangeovy mechaniky na fibrované varietě je formulována následovně: Nechť $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ je fibrovaná varieta dimenze $m+1$ s jednorozměrnou bází, $(J^1\mathcal{Y}, \pi_1, \mathcal{X})$ její prvé jetové prodloužení. Označme $I = [t_1, t_2] \subset \mathcal{X}$ a $\Gamma(I)$ množinu všech hladkých řezů variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ definovaných na intervalu I. Dále nechť je na $J^1\mathcal{Y}$ zadána horizontální diferenciální forma λ, vyjádřená v souřadnicích ve tvaru $\lambda = L(t, q^i, \dot{q}^i)\,\mathrm{d}t$, $i = 1, \ldots, m$. Každá taková forma se nazývá *lagrangiánem prvého* *řádu* na dané fibrované varietě, $L(t, q^i, \dot{q}^i)$ je *Lagrangeova funkce*, dvojice (π, λ) definuje *Lagrangeovu strukturu* prvého řádu. *Akce* je funkcionál definovaný na množině $\Gamma(I)$ integrálem

$$S : \Gamma(I) \ni \gamma \longrightarrow S[\gamma] = \int_I J^1\gamma^*\lambda = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q^i, \dot{q}^i)\, \mathrm{d}t \in \mathcal{R} . \tag{1.6}$$

Nechť

$$\mathcal{R} \supset [-\varepsilon, \varepsilon] \ni s \longrightarrow \gamma_s \in \Gamma(I)$$

je *jednoparametrický systém řezů* na I. Řez $\gamma = \gamma_0$ se nazývá *extremálou* neboli *stacionárním řezem* Lagrangeovy struktury (π, λ), jestliže platí

$$\left(\frac{\mathrm{d}S(\gamma_s)}{\mathrm{d}s}\right)_{s=0} = 0 . \tag{1.7}$$

Tato podmínka je ekvivalentní podmínce stacionární akce (1.1) a její Eulerovy–Lagrangeovy rovnice jsou Lagrangeovými rovnicemi druhého druhu mechanické úlohy zadané Lagrangeovou funkcí $L(t, q^i, \dot{q}^i)$ soustavy částic:

$$\varepsilon_i = 0, \quad \varepsilon_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right), \quad i = 1, \ldots, m . \tag{1.8}$$

Extremálami dané Lagrangeovy struktury jsou tedy parametrická vyjádření křivek s časovou proměnnou jako parametrem, která jsou řešeními soustavy rovnic (1.8). Různá parametrická vyjádření téže křivky v konfiguračním prostoru jsou tedy obecně řešeními různých mechanických úloh. Uvědomme si ještě jednu vlastnost, jíž se vyznačují různá parametrická vyjádření téže křivky a která bude odlišná u neparametrizovaných úloh: Pohybují-li se dva hmotné body po téže křivce v konfiguračním prostoru tak, že jejich pohybu odpovídají různá parametrická vyjádření této křivky, budou mít jejich rychlosti při průchodu daným bodem na křivce samozřejmě stejný směr (tečna), ale obecně různou velikost. Různá parametrická vyjádření tedy dávají tečné vektory různé délky. Parabolickou trajektorii danou kartézskou rovnicí (1.5) můžeme kromě parametrického vyjádření (1.4) popsat také například takto:

$$x(t) = v_0 t\sqrt{\frac{g+a}{g}}\cos\alpha , \quad y(t) = v_0 t\sqrt{\frac{g+a}{g}}\sin\alpha - \frac{1}{2}(g+a)t^2 .$$

Toto parametrické vyjádření ovšem odpovídá například pohybu tělesa šikmo vrženého pod úhlem α počáteční rychlostí o velikosti $v_0\sqrt{(g+a)/g}$ ve zdviži stoupající se zrychlením $\vec{a}$. Při průchodu bodem $(x, y(x))$ paraboly má velikost rychlosti hmotného bodu v tomto případě hodnotu

$$v = v_0\sqrt{\frac{g+a}{g}}\sqrt{\cos^2\alpha + \left(\sin\alpha - \frac{gx}{v_0^2\cos\alpha}\right)^2} ,$$

která je $\sqrt{(g+a)/g}$-násobkem rychlosti částice pohybující se pouze pod vlivem tíhového pole Země při průchodu tímtéž bodem parabolické trajektorie.

Z předchozího výkladu je zřejmé, že mechanické úlohy jsou skutečně typickými parametrizovanými úlohami a že fibrované variety jsou nepochybně vhodnými geometrickými strukturami pro jejich variační formulaci, pokud je možná. Analogickým způsobem lze formulovat parametrizované variační úlohy v teorii pole, kde pohybové rovnice tvoří soustavu parciálních diferenciálních rovnic. Nezávisle proměnnými veličinami jsou, pro případ fyzikálních polí, časoprostorové proměnné (t, x, y, z), hodnoty složek základních fyzikálních veličin popisujících tato pole představují souřadnice bodů v konfiguračním prostoru (tenzor mechanických napětí, tenzor deformací, tenzor elektromagnetického pole, metrický tenzor). Geometrickými strukturami vhodnými pro popis takových situací jsou pak opět fibrované variety, jejichž báze je ovšem vícerozměrná (např. $\dim \mathcal{X} = n$, $\dim \mathcal{Y} = n + m$, $\dim J^1\mathcal{Y} = n + m + nm$.) V matematice se rozvíjení variačních teorií, jak mechaniky, tak teorie pole, neomezuje na prvý řád jetových prodloužení podkladových fibrovaných variet, ale pracuje s prodlouženími obecného řádu. Vzniká tak mechanika a teorie pole vyššího řádu na fibrovaných varietách.

Všimněme si nyní variačních úloh neparametrizovaných. V nich je tvar funkcionálu odpovídajícího „mechanické“ akci zadán tak, že pro jeho extremály není parametrické vyjádření rozhodující. K těmto úlohám patří také historicky první úloha, cíleně formulovaná jako variační, úloha o brachystochroně (Johann Bernoulli I. 1696, viz [1,25]):

Jaký tvar má mít skluzavka ležící ve svislé rovině v tíhovém poli Země a spojující zadaný bod A s níže položeným bodem B, po které by částice pohybující se bez tření sklouzla z bodu A do bodu B za nejkratší možnou dobu? Funkcionálem, definovaným na množině $\mathcal{M}_{AB}$ všech křivek spojujících body A a B, je zobrazení, přiřazující každé z přípustných křivek dobu přesunu částice mezi body A a B.

$$\tau :\ \mathcal{M}_{AB} \ni \mathcal{C} \longrightarrow \tau(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}l}{v} \in \mathcal{R}\,, \quad v(y) = \sqrt{2g(y_A - y)}\,, \tag{1.9}$$

kde $v(y)$ je velikost rychlosti částice při průchodu bodem ve výšce y nad bodem B, vypočtená ze zákona zachování mechanické energie za předpokladu, že částice je z bodu A vypuštěna s nulovou rychlostí, y_A je výška bodu A nad úrovní bodu B. Má-li hledaný tvar skluzavky rovnici $y = y(x)$, pak

$$\tau = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)}{2g(y_A - y(x))}}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{tj.} \quad \mathcal{L} = \sqrt{\frac{1 + y'(x)}{2g(y_A - y(x))}}\,. \tag{1.10}$$

Obecným řešením příslušné Eulerovy–Lagrangeovy rovnice je soustava cykloid, vyjádřených parametricky co nejjednodušeji takto:

$$x(s) = a + b(s - \sin s)\,, \quad y(s) = b(1 - \cos s), \tag{1.11}$$

kde s je parametr bez fyzikálního významu, a a b jsou konstanty, které lze v principu určit z okrajových podmínek vyplývajících ze zadaných poloh bodů A a B, např. $A = (x_A, y_A)$, $B = (0, 0)$. Volba parametrizace ve tvaru (1.11) je preferována jen pro svou jednoduchost. Kterákoli jiná možnost zápisu řešení představuje tutéž odpověď na výchozí otázku, týkající se *tvaru* křivky.

Poznámka: Připomeňme, že Lagrangeova funkce $\mathcal{L}$ ze vztahu (1.10) není samozřejmě Lagrangeovou funkcí odpovídajícího *mechanického* problému. Ten je formulován jako úkol najít parametrické vyjádření trajektorie částice pohybující se v tíhovém poli Země po křivce získané řešením problému brachystochrony, přičemž parametrem je „povinně" časová proměnná. Při řešení bychom museli použít Lagrangeovu funkci $L = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$, definovanou na prvém jetovém prodloužení fibrované variety $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^2$ (konfiguračním prostorem je rovina rovnoběžná s vektorem tíhového zrychlení a obsahující body A, B) a vzít v úvahu holonomní vazební podmínku určenou rovnicí brachystochrony.

K formulaci další, velmi známé, neparametrizované úlohy vede *Fermatův princip* pro šíření světla v obecně nehomogenním optickém prostředí, charakterizovaném indexem lomu $n(x, y, z)$ (viz [3,25]). Podle tohoto principu se světlo šíří optickým prostředím z bodu $A = (x_A, y_A, z_A)$ do bodu $B = (x_B, y_B, z_B)$ po takové křivce $\mathcal{C}$, aby tuto cestu absolvovalo v nejkratším možném čase. Minimalizovaný funkcionál má tedy tvar

$$\tau(\mathcal{C}) = \frac{1}{c} \int\limits_{\mathcal{C}} n(x, y, z)\, \mathrm{d}l\,. \tag{1.12}$$

Je zřejmé, že úloha o brachystochroně je shodná s úlohou o šíření světla v prostředí se speciální volbou průběhu indexu lomu

$$n(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{2g(y_A - y)}}\,.$$

Pro další případy speciální volby indexu lomu dostaneme z uvedeného variačního principu známé zákony pro šíření světla: V homogenním prostředí se světlo šíří přímočaře. Odraz na rozhraní dvou prostředí se řídí zákonem odrazu $\alpha' = \alpha$. Lom na rozhraní dvou homogennních prostředí o indexech lomu N_1 (prostředí „před" rozhraním) a N_2 (prostředí „za" rozhraním) se řídí Snellovým zákonem lomu $N_1 \sin\alpha = N_2 \sin\beta$. Symboly α, α', β značí postupně úhel dopadu, odrazu a lomu.

Poslední neparametrizovanou úlohou, o které se v této úvodní kapitole zmíníme, je *problém geodetik*, který představíme pro případ dvojrozměrné sféry v $\mathcal{R}^3$: Geodetikou $\mathcal{C}$ rozumíme nejkratší spojnici dvou zadaných bodů A a B na sféře. Předpokládejme, že sféra je jednotková a má střed umístěn v počátku soustavy souřadnic. Má tedy kartézskou rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,.$$

Polohu obecného bodu na sféře popíšeme dvojicí úhlů $(\theta,\ \varphi)$.

$$x = \cos\varphi \sin\theta\,, \quad y = \sin\varphi \sin\theta\,, \quad z = \cos\theta\,.$$

Minimalizovaný funkcionál má velmi jednoduchý tvar

$$S(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}l = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\sin^2\theta + \theta'(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{1.13}$$

Řešením příslušné Eulerovy–Lagrangeovy rovnice s okrajovými podmínkami zadanými polohou bodů A a B je hlavní kružnice sféry, která uvedenými dvěma body prochází. Problémem šíření světla prostředím i problémem geodetik se budeme podrobněji zabývat v závěrečné kapitole.

Takto bychom mohli formulovat celou řadu geometrických a fyzikálních neparametrizovaných úloh, k jejichž řešení vede podmínka stacionárnosti nějakého funkcionálu, definovaného nejen na množině křivek, ale i ploch, apod: Izoperimetrický problém (nalezení tvaru křivky dané délky, obepínající plochu o co největším plošném obsahu), kulový tvar mýdlových bublin či vodních kapek ve stavu beztíže (minimum energie mýdlové blány či povrchové vrstvy). Vraťme se však k úvodní neparametrizované úloze a pokusme se nalézt její nejvhodnější geometrický popis. Zadání požaduje zjistit pouze tvar křivky $\mathcal{C}\ :\ y = y(x)$. Volba parametrického vyjádření $x = x(s)$, $y = y(s)$ nemá na řešení vliv. Tečné vektory $(\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ ke křivce $\mathcal{C}$ v bodě (x, y) mají různou délku, v souladu s volbou parametrického vyjádření. Rozhodující je tedy pouze směr tečny v daném bodě křivky, určený hodnotou $y'(x)$ a definující v tomto bodě jednorozměrný podprostor prostoru všech tečných vektorů k rovině $\mathcal{R}^2$ obsahující tuto křivku. K určení konkrétního partikulárního řešení úlohy, popsané obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu, je potřeba zadat tři údaje, například ve tvaru $(x_A,\ y(x_A),\ y'(x_A))$. Vhodnou geometrickou strukturou pro formulaci úlohy tedy nebude pětirozměrné prvé jetové prodloužení $(\mathcal{R}\times\mathcal{R}^2\times\mathcal{R}^2, \pi_1, \mathcal{R})$ trojrozměrné fibrované variety $(\mathcal{R}\times\mathcal{R}^2, \pi, \mathcal{R})$, nýbrž jistý trojrozměrný prostor se strukturou diferencovatelné variety. Tento prostor bude mít charakter Grassmannovy fibrace. Obdobně, jako jsme v prvé části tohoto odstavce formulovali velmi stručně definici fibrované variety, potřebné pro popis parametrizovaných problémů, učiňme tak i pro případ Grassmannovy fibrace, která je vhodná pro problémy neparametrizované. Všimněme si zatím pouze úloh spadajících do oblasti mechaniky. Předpokládejme, že v obou případech je konfigurační prostor $\mathcal{K}$ příslušný dané úloze m-rozměrný. Zatímco řešeními parametrizovaného problému jsou parametrická vyjádření křivek v konfiguračním prostoru, tj. řezy $(m+1)$-rozměrné fibrované variety $\mathcal{Y}$, mají řešení problému neparametrizovaného tvar jednorozměrných podvariet (křivek) pouze m-rozměrné variety $\mathcal{K}$. Dvě jednorozměrné podvariety $\mathcal{C}$ a $\overline{\mathcal{C}}$ nazveme *1-ekvivalentními* v bodě $y \in \mathcal{K}$, jestliže platí $y \in \mathcal{C}\cap\overline{\mathcal{C}}$ a $T_y\mathcal{C} = T_y\overline{\mathcal{C}}$ (společný tečný prostor v bodě y). Příslušnou třídu ekvivalence, nazývanou *kontaktní element*, označíme $[\mathcal{C}_y]$. Na množině všech tříd ekvivalence $\{[\mathcal{C}_y] \mid y \in \mathcal{K},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{K} \text{ je jednorozměrná podvarieta}\}$ lze zavést strukturu diferencovatelné variety o dimenzi $2m-1$. Tuto varietu nazýváme *Grassmannovou fibrací prvého řádu* na varietě $\mathcal{K}$ a značíme $P_1^1\mathcal{K}$. Poznamenejme, že dvě podvariety $\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{C}}$ jsou ekvivalentní v bodě $y \in \mathcal{C} \cap \overline{\mathcal{C}}$ právě tehdy, když existuje souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$, na $\mathcal{K}$ takový, že $y \in \mathcal{V}$, rovnice podvariet mají tvar

$$y^i(z) = f^i(y^1(z)), \quad i = 2, \ldots, m \quad \text{pro} \quad z \in \mathcal{C} \cap \mathcal{V}\,,$$

$$y^i(z) = \overline{f}^i(y^1(z)),\, i = 2, \ldots, m \quad \text{pro} \quad z \in \overline{\mathcal{C}} \cap \mathcal{V}$$

a platí

$$\frac{\mathrm{d}f^i(y^1(y))}{\mathrm{d}y_1} = \frac{\mathrm{d}\overline{f}^i(y^1(y))}{\mathrm{d}y^1}\,, i = 2, \ldots, m\,.$$

Grassmannovu fibraci lze také zavést jako množinu

$$P_1^1(\mathcal{K}) = \cup_{y \in \mathcal{K}}\, G_{1,m}(T_y\mathcal{K})\,,$$

opatřenou strukturou diferencovatelné variety, kde $G_{1,m}(T_y\mathcal{K})$ je množina všech jednorozměrných podprostorů tečného prostoru k varietě $\mathcal{K}$ v bodě y, rovněž se strukturou diferencovatelné variety (dimenze m), zvaná *grassmanián*. Úloze o brachystochroně tedy odpovídá Grassmannova fibrace $P_1^1(\mathcal{R}^2) = \cup_{(x,y)}\, G_{1,2}(T_{(x,y)\mathcal{R}^2})$. Zobecněním definice vzniká jednak pojem Grassmannovy fibrace vyššího řádu, vhodné jako podkladová struktura pro mechaniku vyššího řádu, jednak pojem Grassmannovy fibrace prvého či vyššího řádu pro vícerozměrné podvariety (teorie pole).

Poznámka: Praktické výpočty je samozřejmě nutné provádět v souřadnicích. Proto zavádíme na okolích bodů Grassmannovy fibrace *lokální* souřadnicové systémy. Každý z nich přirozeným způsobem definuje *lokální fibraci*, která umožní pracovat s okolími bodů jako s fibrovanými varietami. Tím se z neparametrizované úlohy stává pro účely praktického výpočtu úloha parametrizovaná. Na rozdíl od úloh typicky parametrizovaných je však volba fibrace použité při jejím řešení libovolná. Existují však i úlohy, z jejichž fyzikální nebo geometrické povahy vyplývá volba některé z možných fibrací jako preferovaná. Příkladem je úloha o brachystochroně, jejíž formulace obsahuje fyzikálně preferovaný směr, směr tíhového zrychlení. Lokální souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x, y)$ (pro případ rovinného problému) je pak vhodné volit například tak, aby vektorové pole tíhového zrychlení mělo v každém bodě souřadnicový zápis $\vec{g}(x, y) = -g(\partial/\partial y)$, kde g je velikost tíhového zrychlení. Podobná situace je při řešení průchodu světla rovinným rozhraním dvou opticky homogenních prostředí, eventuelně prostředí s indexem lomu nezávislým na souřadnicích měřených podél rozhraní, kde je preferovaný směr určen kolmicí dopadu. Naproti tomu problém šíření světla v obecném opticky nehomogenním prostředí popsaném indexem lomu $n = n(\vec{r})$ bez jakékoli symetrie této funkční závislosti nenabízí žádnou preferovanou volbu lokální fibrace.

1.2 Variační posloupnost

Aplikace fyzikálních variačních teorií spočívají především v konstrukci Lagrangeovy funkce vystupující ve variačním funkcionálu, nalezení řešení soustavy Eulerových–Lagrangeových rovnic, popisujících vývoj konfigurace a stavu fyzikální soustavy (v závislosti na čase v mechanice a na časoprostorových souřadnicích v teorii pole), nalezení pohybových integrálů a formulace zákonů zachování apod. Důležitým prvkem při konstrukci celé teorie je matematický aparát, jehož výstižná volba může podstatně usnadnit použití teorie při řešení konkrétních fyzikálních problémů. O jednom významném aspektu matematické problematiky, spočívajícím ve volbě fibrovaných variet či Grassmannových fibrací jako geometrického podkladu pro popis parametrizovaných resp. neparametrizovaných variačních problémů, jsme se zmínili v předchozím odstavci. Teorie variačních posloupností je další významnou součástí variačních teorií a umožňuje elegantně řešit řadu jinak obtížných či jinými postupy neschůdných problémů, které se jako součást teorie přirozeně objevují. V tomto odstavci si všimneme v souvislosti s variační posloupností nejdůležitějších z nich, a to pouze pro případ mechaniky na fibrovaných varietách.

• Jedním z problémů mechaniky je problém nejednoznačnosti výběru integrálů vyjadřujících tutéž akci. Výraz (1.1) lze totiž chápat jako vyjádření křivkového integrálu z diferenciální formy $\lambda = L\,\mathrm{d}t$ v prostoru $J^1\mathcal{Y}$:

$$S(\gamma) = \int\limits_{J^1\gamma} L(t, q^i, \dot{q}^i)\mathrm{d}t \ ,$$

kde $\gamma \in \Gamma_{[t_1,t_2]}$ je řez základní fibrované variety (parametrické vyjádření možné trajektorie systému v konfiguračním prostoru) a $J^1\gamma$ je prodloužený řez (parametrické vyjádření fázové trajektorie). Vzniká tak jistá nejednoznačnost: Křivkový integrál, jehož integračním oborem je prodloužený řez $J^1\gamma$, může mít obecně tvar

$$I(\gamma) = \int\limits_{J^1\gamma} \theta = \int\limits_{J^1\gamma} A(t, q^j, \dot{q}^j)\mathrm{d}t + B_i(t, q^j, \dot{q}^j)\mathrm{d}q^i + C_i(t, q^j, \dot{q}^j)\mathrm{d}\dot{q}^i \ , \qquad (1.14)$$

kde A, B_i, C_i jsou funkce. Zvolíme-li funkce B_i libovolně, funkce C_i identicky nulové a $A = L - \dot{q}^i B_i$, pak

$$\theta = [L - \dot{q}^i B_i]\,\mathrm{d}t + B_i\,\mathrm{d}q^i \qquad (1.15)$$

a platí

$$I(\gamma) = \int\limits_{J^1\gamma} \theta = \int\limits_{t_1}^{t_2} J^1\gamma^*\theta = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(t, q^i\gamma(t), \dot{q}^i\gamma(t))\,\mathrm{d}t \,. \qquad (1.16)$$

Tento výsledek je shodný s akcí (1.1). Integrál $I(\gamma)$ z formy θ reprezentuje tutéž variační úlohu. Vzniká tak problém *ekvivalence* integrandů typu $A\mathrm{d}t + B_i\mathrm{d}q^i + C_i\mathrm{d}\dot{q}^i$ *z hlediska akce*, s nímž úzce souvisí například i otázka reprezentace třídy všech ekvivalentních integrandů některým z nich. Všimněme si, že všechny integrandy ve vztahu (1.15) vedoucí k téže akci se liší jak od lagrangiánu λ, tak navzájem, o *kontaktní 1-formu.* Konkrétně

$$\theta - \lambda = (L - \dot{q}^i B_i)\,\mathrm{d}t + B_i\,\mathrm{d}q^i - L\,\mathrm{d}t = B_i(\mathrm{d}q^i - \dot{q}^i\,\mathrm{d}t) = B_i\omega^i\,,$$

$$J^1\gamma^*\omega^i = J^1\gamma^*(\mathrm{d}q^i - \dot{q}^i\mathrm{d}t) = 0\,.$$

Kontaktní formy, tj. takové, jejichž zpětný obraz na bázi (*pullback*) libovolným řezem je identicky nulová forma, mají ve variačních teoriích na fibrovaných varietách významné postavení.

• Následuje otázka variační ekvivalence z hlediska rovnic, takzvaný *triviální variační problém.* Lagrangeovy funkce L a $\overline{L}$ resp. lagrangiány $\lambda = L\,\mathrm{d}t$, $\overline{\lambda} = \overline{L}\,\mathrm{d}t$ (obecněji formy θ, $\overline{\theta}$ definované výše), jsou považovány za ekvivalentní z hlediska rovnic (v běžně zavedené terminologii *variačně ekvivalentní*), jsou-li odpovídající Eulerovy–Lagrangeovy výrazy $\varepsilon_i(L)$ a $\varepsilon_i(\overline{L})$, $i = 1,\dots,m$, totožné. Rozdíl $\lambda_0 = \lambda - \overline{\lambda}$ je *triviálním lagrangiánem* a odpovídající funkce $L_0 = L - \overline{L}$ představuje *triviální Lagrangeovu funkci.* Triviální lagrangiány vedou k identicky nulovým Eulerovým–Lagrangeovým výrazům. Z klasické mechaniky (prvního řádu) je známo, že všechny triviální Lagrangeovy funkce mají tvar úplných časových derivací funkcí času a zobecněných souřadnic.

• Další důležitou otázkou je *variačnost pohybových rovnic*, známá též pod názvem *inverzní variační problém.* Klasická newtonovská mechanika postuluje přímo pohybové rovnice soustavy

$$F_i - M_{ij}\ddot{q}^j = 0\,, \quad M_{ij} = M_{ij}(t, q^k, \dot{q}^k)\,, \quad F_i = F_i(t, q^k, \dot{q}^k) \tag{1.17}$$

pro $i, j, k = 1,\dots,m$,v nichž má soubor veličin (M_{ij}) transformační vlastnosti tenzoru (*tenzor zobecněných hmotností*), $(\ddot{q}^i)$ jsou zobecněná zrychlení a (F_i) zobecněné síly. Je třeba najít kritéria slučitelnosti těchto rovnic s variačním principem: Rovnice nazveme *variačními*, tj. slučitelnými s variačním principem, jestliže existuje Lagrangeova funkce $L(t, q^j, \dot{q}^j)$, taková, že její Eulerovy–Lagrangeovy výrazy jsou právě levými stranami Newtonových rovnic (1.17). Odpověď dávají *Helmholtzovy–Soninovy* (nutné a postačující) podmínky variačnosti (Helmholtz [5])

$$H_{ij}^{(2)} = \frac{\partial E_i}{\partial \ddot{q}^j} - \frac{\partial E_j}{\partial \ddot{q}^i} = 0\ , \quad H_{ij}^{(1)} = \frac{\partial E_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial E_j}{\partial \dot{q}^i} - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_j}{\partial \ddot{q}^i}\right) = 0\ ,$$

$$H_{ij}^{(0)} = \frac{\partial E_i}{\partial q^j} - \frac{\partial E_j}{\partial q^i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_j}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial E_j}{\partial \ddot{q}^i}\right) = 0 \tag{1.18}$$

pro $i = 1,\dots,m$, případně ekvivalentní podmínky pro veličiny (F_i), (M_{ij}) (viz [13–15,24] nebo [21]).

Zobrazení, které přiřazuje Lagrangeově funkci příslušné Eulerovy–Lagrangeovy rovnice (přesněji lagrangiánu λ Eulerovu–Lagrangeovu formu $\mathcal{E}_\lambda = \varepsilon_i \, \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}t$), nazýváme *Eulerovým–Lagrangeovým zobrazením.* Jeho souvislost s lagrangiánem je dána následujícím vztahem

$$(\pi^{2,1})^*\mathrm{d}\lambda = \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\right] \omega^i \wedge \mathrm{d}t + \mathcal{F} + \mathrm{d}\eta \, , \tag{1.19}$$

$$\eta = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\omega^i \quad , \quad \mathcal{F} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \, \omega^i \wedge \omega^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \, \dot{\omega}^i \wedge \omega^j \, , \quad \dot{\omega}^i = \mathrm{d}\dot{q}^i - \ddot{q}^i \mathrm{d}t.$$

Vnější derivace lagrangiánu je tedy součtem Eulerovy–Lagrangeovy formy $\varepsilon_i \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}t = \varepsilon_i \omega^i \wedge \mathrm{d}t$, 2-kontaktní formy $\mathcal{F}$ (2-kontaktní forma je vyjádřena pomocí vnějších součinů kontaktních 1-forem) a vnější derivace kontaktní 1-formy η. Poznamenejme, že každou z forem θ určených vztahem (1.15), které dávají stejnou akci jako lagrangián λ, lze rozložit stejným způsobem, rozklady se liší pouze záměnou formy $\mathrm{d}\eta$ formou $\overline{\eta} = \eta + B_i \omega^i$. Vhodnou volbou funkcí B_i lze formu $\overline{\eta}$ anulovat. Příslušná forma

$$\theta_\lambda = L \, \mathrm{d}t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \, \omega^i \, ,$$

určená k zadanému lagrangiánu jednoznačně, představuje tzv. *Lepageův ekvivalent* tohoto lagrangiánu. Zobrazení přiřazující dynamické formě $\mathcal{E} = E_i \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}t$ 3-formu

$$\mathcal{H} = H^{(0)}_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \wedge \mathrm{d}t + H^{(1)}_{ij} \dot{\omega}^i \wedge \omega^j \wedge \mathrm{d}t + H^{(2)}_{ij} \ddot{\omega}^i \wedge \omega^j \wedge \mathrm{d}t$$

se nazývá *Helmholtzovo–Soninovo.* Eulerovo–Lagrangeovo i Helmholtzovo–Soninovo zobrazení jsou lineární.

• Výpočty s geometrickými objekty (vektorovými poli, diferenciálními formami, apod.) jsou vždy prováděny v konkrétních *lokálních* souřadnicových systémech (V, ψ), zvaných též *mapy.* Tyto mapy pokrývají podkladovou varietu a tvoří *atlas*, který generuje její diferecovatelnou strukturu. (Názornou představu může poskytnout model povrchu zemského glóbu, pokrytý jednotlivými překrývajícími se zeměpisnými mapami se sítí rovnoběžek a poledníků, jejichž soubor tvoří zeměpisný atlas.) Souřadnicová vyjádření geometrických objektů v překrývajících se systémech souřadnic jsou navzájem převoditelná transformačními vztahy. Pro řešení variační úlohy na daném podkladovém prostoru je však velmi důležitá otázka *globálnosti*, tj. existence klíčových geometrických objektů (diferenciálních forem) nejen na okolích jednotlivých bodů, ale *globálně* na celém prostoru. Je-li eukleidovský, zdá se být globální existence objektů přirozeně zajištěna již jejich existencí lokální. Tuto skutečnost je však třeba umět dokázat a řešení problému zobecnit i na méně triviální podkladové struktury. Globálnost geometrického objektu jako silnější vlastnost ve srovnání s jeho lokální existencí lze ilustrovat příkladem tzv. *objemového elementu* na n-rozměrné varietě jako všude nenulové n-formy. Zatímco na orientabilní varietě takové formy globálně existují (orientabilita bývá tímto požadavkem přímo definována), na varietě neorientabilní je lze zkonstruovat pouze lokálně, tj, na okolích jednotlivých bodů. Jako názorný příklad může posloužit srovnání variety odpovídající plášti válce a Möbiovy pásky. Lokálnost a globálnost souvisí i s problémy, které jsme definovali výše: K vyřešení triviálního variačního problému nestačí zkonstruovat všechny triviální lagrangiány v souřadnicích, i když takový postup je samozřejmě základem řešení. Je třeba také rozhodnout, které z nich budou definovány na celé podkladové varietě. Podobně jde i o určení, zda daná lokálně variační *dynamická forma* se souřadnicovým vyjádřením $E_i \, \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}t = (F_i - M_{ij}\ddot{q}^j) \, \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}t$, je variační i globálně. Splňují-li totiž výrazy E_i Helmholtzovy–Soninovy podmínky (1.18), je tím zaručena právě jejich lokální variačnost, tj. existence lagrangiánů, z nichž jsou odvozeny jako Eulerovy–Lagrangeovy výrazy, na otevřených podmnožinách (okolích bodů) variety. Může se však stát, že nelze vybrat soubor těchto lokálních lagrangiánů tak, aby jejich souřadnicová vyjádření „na sebe navazovala“ podle transformačních pravidel na překrývajících se souřadnicových systémech, pokrývajících celou varietu, a definovala tak globální lagrangián, jehož Eulerovou–Lagrangeovou formou by byla zadaná (globálně definovaná) lokálně variační dynamická forma. Souvisejícím problémem je *reducibilita řádu*, která může být rovněž fomulována v lokální a globální verzi: Lze k lagrangiánu vedoucímu k daným variačním rovnicím najít ekvivalentní lagrangián (tj. lišící se o lagrangián triviální) nižšího řádu? K řešení těchto problémů je třeba najít matematické prostředky umožňující rozhodovat, kdy z lokální existence geometrických objektů vyplývá jejich globálnost.

Otázek, které každou variační teorii doprovázejí, je celá řada a soubor našich předchozích ukázek není z tohoto hlediska zdaleka úplný. Aparátem, který umožňuje efektivní a přehlednou fomulaci variačních teorií a především obsahuje řešení všech předložených problémů, je *variační posloupnost diferenciálních forem na konečných jetových prodlouženích fibrovaných variet.* Do současné podoby se variační teorie budovaná důsledně na geometrickém základu rozvíjí od konce 70. let. Její formulace je dílem celé řady autorů: Anderson, Bauderon, Dedecker, Pommaret, Takens, Tsujishita, Tulczyjew, Vinogradov. Variační teorii, mechaniku i teorii pole, na konečných prodlouženích fibrovaných variet a problematiku variační posloupnosti na těchto podkladových prostorech, formuloval Krupka [8,9,11]. Mechanika vyššího řádu je řešena v plné obecnosti v práci Krupkové [15] (autorka se však nezabývá variační posloupností). Problematika variační posloupnosti v mechanice i teorii pole je v současnosti intenzivně studována, viz například [11,20,22,27].

Korektní matematická definice variační posloupnosti je obsažena v dalších kapitolách této práce. Pokusme se však nyní její podstatu a možnosti uplatnění při řešení naznačených problémů vyložit názorně: Variační posloupnost je konstruována jako posloupnost lineárních zobrazení prostorů tvořených třídami diferenciálních p-forem, které lze považovat za ekvivalentní z hlediska variační teorie. Jsou to takové p-formy, jejichž rozdíly nemají vliv na variační úlohu: 1-formy jsou považovány za ekvivalentní, liší-li se o nejvýše o kontaktní formu, 2-formy (ve smyslu vztahu (1.19)) nejvýše o součet 2-kontaktní 2-formy a vnější derivace kontaktní 1-formy. Ekvivalence 3-forem, 4-forem, atd. je definována zobecněním tohoto pravidla, tj. požadavkem, že ekvivalentní p-formy se liší nejvýše o součet p-kontaktní p-formy a vnější derivace $(p-1)$-kontaktní $(p-1)$-formy. Dalším podstatným rysem konstrukce je, že variační posloupnost je exaktní (kompozice každých dvou jejích po sobě jdoucích členů je nulové zobrazení) a lze ji reprezentovat posloupností prostorů forem tak, aby reprezentující posloupnost zahrnovala, v po sobě jdoucích členech, Eulerovo–Lagrangeovo a Helmholtzovo–Soninovo zobrazení. Je okamžitě zřejmé, že taková konstrukce bude v souladu s řešením lokálního triviálního variačního problému i problému lokální variačnosti pohybových rovnic. Všimněme si některých pojmů blíže. Vysvětlíme nejprve pojem *exaktní posloupnosti* zobrazení komutativních grup. (Definice může být formulována i pro obecnější algebraické struktury, pro naše účely však není takové zobecnění potřebné.) Exaktní posloupnost je definována schematem

$$\{0\} \overset{h_0}{\hookrightarrow} G_1 \overset{h_1}{\to} G_2 \overset{h_2}{\to} \cdots \overset{h_{N-1}}{\to} G_N \overset{h_N}{\to} \{0\}$$

kde $G_1, \ldots, G_N$ jsou komutativní grupy a $h_0, \ldots, h_N$ homomorfismy s vlastností

$$\operatorname{Im} h_j = \operatorname{Ker} h_{j+1} \ , \ \ j \in \{0, \ldots, N-1\} \ . \tag{1.20}$$

Množiny $\operatorname{Im} h_j = \{g \in G_{j+1} \mid \exists f \in G_j : g = h_j(f)\}$ a $\operatorname{Ker} h_j = \{f \in G_j \mid h_j(f) = 0_{G_{j+1}}\}$ představují obor hodnot a jádro zobrazení h_j. Zobrazení h_0 je vložení (inkluze). Z definice exaktní posloupnosti plyne, že složené zobrazení $h_{j+1} \circ h_j$ přiřadí každému prvku grupy G_j nulový prvek grupy G_{j+2}. Příkladem tzv. *dlouhé* exaktní posloupnosti je *De Rhamova* posloupnost (omezujeme se pouze na první řád prodloužení základní fibrované variety):

$$\{0\} \hookrightarrow \mathcal{R} \hookrightarrow \Omega^1_0 \overset{\mathrm{d}}{\to} \Omega^1_1 \overset{\mathrm{d}}{\to} \cdots \overset{\mathrm{d}}{\to} \Omega^1_p \overset{\mathrm{d}}{\to} \cdots \overset{\mathrm{d}}{\to} \Omega^1_N \overset{\mathrm{d}}{\to} \{0\} \tag{1.21}$$

Symbol Ω^1_0 značí okruh diferencovatelných funkcí definovaných na prvém jetovém prodloužení $J^1\mathcal{Y}$ fibrované variety $\mathcal{Y}$, $N = \dim\, J^1\mathcal{Y} = 1 + 2m$. Ω^1_p pro $p = 1, \ldots, N$ jsou Ω^1_0-moduly diferenciálních p-forem na $J^1\mathcal{Y}$. Kromě prvých dvou vložení jsou všechna zobrazení vnějšími derivacemi forem, takže splnění požadavku (1.20) je zajištěno vlastností $\mathrm{d}(\mathrm{d}\varrho) = 0$ pro libovolnou formu ϱ. Má-li exaktní posloupnost pouze dva „netriviální“ členy, nazývá se *krátká*:

$$\{0\} \hookrightarrow G_1 \overset{h_1}{\to} G_2 \overset{h_2}{\to} G_3 \to \{0\}$$

Krátkou exaktní posloupnost představují všechny případy *faktorizace* grup:

$$\{0\} \hookrightarrow H \hookrightarrow G \to G/H \to \{0\}$$

kde H je normální podgrupa grupy G a G/H je příslušná faktorová grupa. Označme nyní $\Theta^1_p = \Omega^1_{p,c} + \mathrm{d}\Omega^1_{p-1,c}$ podgrupu grupy Ω^1_p tvořenou všemi možnými součty p-kontaktních p-forem (prvků z $\Omega^1_{p,c}$) a vnějších derivací $(p-1)$-kontaktních $(p-1)$-forem (prvků z $\mathrm{d}\Omega^1_{p-1,c}$). Získáváme krátkou exkatní posloupnost

$$\{0\} \quad \hookrightarrow \quad \Theta^r_p \quad \hookrightarrow \quad \Omega^1_p \quad \to \quad \Omega^1_p/\Theta^1_p \quad \to \quad \{0\} \tag{1.22}$$

Variační posloupnost vzniká spojením de Rhamovy posloupnosti a krátkých „faktorizačních“ posloupností (1.22) (schema viz kapitola 3). V tomto schematu $P = 1+m$ značí počet netriviálních podgrup Θ^1_p, $p = 1, \ldots, P$. Označme E_p $p-$tou faktorizaci

$$F_p : \Omega^1_p \ni \varrho \to F_p([\varrho]) = [\varrho] \in \Omega^1_p/\Theta^1_p \,,$$

tj. zobrazení přiřazující $p-$formě třídu rozkladu podle podgrupy Θ^1_p. Zobrazení

$$E_p : \Omega^1_p/\Theta^1_p \ni [\varrho] \to E_p([\varrho]) = [\mathrm{d}\varrho] \in \Omega^1_{p+1}/\Theta^1_{p+1}$$

vyhovují podmínce komutativnosti diagramů $E_p \circ F_p = F_{p+1} \circ \mathrm{d}$ a tvoří odpovídající *kvocientní posloupnost*, rovněž exaktní, nazývanou posloupností *variační*. Uvedené schema pro $r = 1$ zaručuje, že daný lagrangián λ „sdílí“ třídu se všemi $1-$formami, které vedou ke stejné akci. Do této třídy tedy patří i Lepageův ekvivalent θ_λ lagrangiánu λ. Při výpočtech je vhodnější pracovat místo s celými třídami ekvivalentních forem s jejich vhodně zvolenými zástupci, *reprezentanty*. Z hlediska naší variační úlohy by bylo velmi názorné, kdyby lagrangián λ definující tuto úlohu přímo zastupoval třídu $1-$forem, jíž náleží, zatímco třída $2-$forem obsahující jeho vnější derivaci by byla zastoupena Eulerovou-Lagrangeovou formou $\mathcal{E}_\lambda$. Třída $3-$forem obsahující vnější derivaci jisté dynamické formy $\mathcal{E} = E_i\omega^i \wedge \mathrm{d}t$ by pak měla být reprezentována formou, jejímiž složkami by byly Helmholtzovy–Soninovy výrazy (1.18). Pro nalezení takové reprezentace je však nutno převést úvahy z podkladových prostorů prvého řádu $J^1\mathcal{Y}$ na vyšší prodloužení základní fibrované variety $\mathcal{Y}$. Uvědomme si totiž, že Eulerovy–Lagrangeovy výrazy lagrangiánu prvého řádu obsahují zrychlení a Helmholtzovy–Soninovy výrazy mohou díky členům $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial E_i}{\partial \ddot{q}^j}\right)$ obsahovat dokonce proměnné třetího řádu (q^j_3). Úvahy o reprezentaci vedou k následujícímu doplnění schematu variační posloupnosti:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & E_{p-1} & & E_p & & E_{p+1} & \\
\cdots & \to & \Omega^1_p/\Theta^1_p & \to & \Omega^1_{p+1}/\Theta^1_{p+1} & \to & \cdots \\
 & & |R_p & & |R_{p+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \overline{E}_{p-1} & & \overline{E}_p & & \overline{E}_{p+1} & \\
\cdots & \to & \Omega^s_p & \to & \Omega^s_{p+1} & \to & \cdots
\end{array}$$

Obecně je $s \geq 1$. Libovolně volená injektivní zobrazení

$$R_p : \Omega^1_p/\Theta^1_p \ni [\varrho] \to R_p([\varrho]) = \overline{\varrho} \in \Omega^s_p$$

se nazývají *reprezentace* faktorových grup Ω^1_p/Θ^1_p. Sled zobrazení $\overline{E}_0 \to \overline{E}_1 \to \cdots \to \overline{E}_p \to \overline{E}_{p+1} \to \cdots$, $\overline{E}_p = R_{p+1} \circ E_p \circ R_p^{-1}$, indukovaných požadavkem komutativity diagramů, je *reprezentací variační posloupnosti.* Komutativita opět zabezpečuje exaktnost vzniklé posloupnosti zobrazení $\overline{E}_p$, platí tedy

$$\mathrm{Im}\,\overline{E}_p = \mathrm{Ker}\,\overline{E}_{p+1}\ . \tag{1.23}$$

Nalézt zobrazení R_p tak, aby splňovala výše uvedené požadavky dané variační úlohou, vyžaduje provedení poněkud komplikovaných výpočtů. Výsledky pro 1−formy, 2−formy a 3−formy definované na $J^1\mathcal{Y}$ jsou odvozeny v [11], nad prostory obecného řádu $J^r\mathcal{Y}$ jsou odvozeny v [20,22].

Závěrem ukážeme, jak je možné použít variační posloupnosti k řešení problémů formulovaných v úvodu tohoto odstavce.

• Triviální lagrangiány: Abychom specifikovali všechny triviální lagrangiány prvního řádu, stačí jen sledovat variační posloupnost a její reprezentaci. Podle definice reprezentace variační posloupnosti je $\mathcal{E}_\lambda = \overline{E}_1(\lambda)$, další úvahy jsou prostým důsledkem základní vlastnosti exaktních posloupností vyjádřené vztahy (1.20) resp. (1.23): $\mathcal{E}_\lambda \equiv 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Ker}\,\overline{E}_1$, $\mathrm{Ker}\,\overline{E}_1 = \mathrm{Im}\,\overline{E}_0 = \mathrm{Im}\,(R_1 \circ F_1 \circ d)$ (viz schema variační posloupnosti v kapitole 3). Z definice zobrazení R_1 však vzplývá, že $R_1 \circ F_1$ je *horizontalizace* h, zobrazení přiřazující formám jejich horizontální složky. Množinou všech lagrangiánů s identicky nulovou Eulerovou-Lagrangeovou formou (definovanou na $J^2\mathcal{Y}$) je tedy

$$\mathrm{Im}\,\overline{E}_0 = \{\lambda = h\mathrm{d}f \mid f \in \Omega^1_0 \text{ je libovolná funkce}\}\ .$$

Z nich jsou triviálními lagrangiány prvního řádu právě ty, pro které je f definováno pouze na $\mathcal{Y}$, tj. $f \in \Omega^0_0$. Dostáváme tedy očekávaný výsledek, známý z klasické lagrangeovské mechaniky.

• Variační pohybové rovnice: Nechť $\mathcal{E} = E_i\omega^i \wedge \mathrm{d}t = (F_i - M_{ij}\ddot{q}^j)\omega^i \wedge \mathrm{d}t$ je dynamická forma. Nazvali jsme ji variační, je-li Eulerovou-Lagrangeovou formou nějakého lagrangiánu, tj. splňuje-li požadavek $\mathcal{E} \in \mathrm{Im}\,\overline{E}_1$. Jako nutná podmínka pro existenci lagrangiánu k formě $\mathcal{E}$ je tento požadavek triviální. Je však současně i podmínkou postačující, neboť zobrazení $\overline{E}_1 = R_2 \circ E_1 \circ R_1^{-1}$ je definováno pouze na množině reprezentantů tříd 1−forem prvého řádu, takže je

$$\mathrm{Im}\,\overline{E}_1 = \mathrm{Im}\,(\overline{E}_1 \circ R_1 \circ F_1) = \mathrm{Im}\,(\overline{E}_1 \circ h) = \{\overline{E}_1(h\varrho) \mid \varrho \in \Omega^1_1 \text{ je libovolná forma}\}\ .$$

Forma $h\varrho$ je však lagrangián (obecně druhého řádu). Za jakých podmínek bude tento lagrangián pouze řádu prvního, je věcí další diskuse, jíž se v tomto textu nezabýváme. Díky vztahu (1.23) je však $\mathrm{Im}\,\overline{E}_1 = \mathrm{Ker}\,\overline{E}_2$, odkud $\overline{E}_2(\mathcal{E}) = \mathcal{H}_{\mathcal{E}} \equiv 0$. Variačnost rovnic (1.17) je tedy skutečně ekvivalentní podmínkám (1.18).

• Lokálnost a globálnost: Na otázku globální existence základních geometrických objektů variační teorie odpovídá variační posloupnost interpretovaná v rámci *teorie svazků*, jiný obecný způsob řešení problému globálnosti není znám. O výsledcích na různých podkladových varietách rozhodují tzv. *kohomologické grupy* tříd forem na nich definovaných (viz např. [9]).
Pozn. 1.: Pro diferenciální formy na $m-$rozměrné varietě $\mathcal{M}$ je *$p-$tá kohomologická grupa* $H^p(\mathcal{M})$ definována jako faktorová grupa $H^p(\mathcal{M}) = C^p(\mathcal{M})/E^p(\mathcal{M})$, kde $C^p(\mathcal{M})$ je grupa uzavřených $p-$forem ($\mathrm{d}\omega = 0$) a $E^p(\mathcal{M})$ grupa exaktních $p-$forem ($\omega = \mathrm{d}\eta$) na $\mathcal{M}$. Triviálnost $p-$té kohomologické grupy, $H^p(\mathcal{M}) = \{0\}$, znamená, že geometrická struktura variety $\mathcal{M}$ zaručuje splynutí tříd úplných a exaktních forem *globálně*, tj na celé varietě $\mathcal{M}$ (viz například [23]).
Pozn. 2.: Z vlastností variační posloupnosti vyplývá, že triviálnost $p-$té kohomologické grupy na fibrované varietě $\mathcal{Y}$ je indikátorem splynutí tříd lokálně a globálně definovaných $p-$forem. Podrobněji viz například [9].
Je-li $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m$, jak jsme doposud předpokládali, jsou třídy lokálních a globálních objektů (triviálních lagrangiánů, variačních dynamických forem, atd.) totožné. Situace je však odlišná již pro tak jednoduchý případ, jakým je například fibrovaná varieta $\mathcal{Y} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}^m$ (pro $m = 1$ „přímkové“ vrstvy nad kružnicí $\mathcal{S}^1$), kdy sice lokálně variační dynamická forma je variační i globálně, avšak lokálně triviální lagrangián již globálně existovat nemusí. Pro $\mathcal{Y} = \mathcal{R} \times \mathcal{S}^2$, kde $\mathcal{S}^2$ je dvojrozměrná sféra, dospějeme k závěru právě opačnému: Globálnost je zajištěna pro lokálně triviální lagrangiány, ne však již pro lokálně variační dynamické formy.

Předložené příklady ukazují, že variační posloupnosti na fibrovaných varietách představují velmi účinný a pro řešení některých problémů nenahraditelný matematický nástroj pro formulaci variačních teorií i pro jejich použití při řešení „parametrizovaných“ fyzikálních úloh. Lze očekávat, že rozvíjení teorie variačních posloupností na Grassmannových fibracích přinese obdobně silné výsledky pro řešení problémů „neparametrizovaných“.
Pozn.: V závěru tohoto odstavce jsme použili některá schemata a formulace z článku [20].

1.3 Akce a lagrangián

Jak jsme již konstatovali, je variační úloha vždy formulována jako problém nalezení extremál (stacionárních křivek, ploch, atd.) jistého funkcionálu akce, definovaného na množině parametrizovaných či neparametrizovaných křivek, ploch, atd. Ve variačních teoriích, popisujících časový či časoprostorový vývoj fyzikálních systémů, tj. soustav částic nebo polí, je jedním z hlavních úkolů konstrukce lagrangiánu na základě fyzikálních úvah. V případě nejjednodušší situace, kdy studujeme částici nebo soustavu N částic podléhajících zákonům klasické nerelativistické mechaniky ve vnějším poli popsaném skalárním potenciálem, je Lagrangeova funkce dána rozdílem kinetické a potenciální energie soustavy (viz například [16])

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha \vec{v}_\alpha^2 - U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t)\,,$$

kde M_α jsou hmotnosti částic, $\vec{r}_\alpha$ a $\vec{v}_\alpha$ jejich polohové vektory a rychlosti. Lagrangeova funkce relativistické částice s klidovou hmotností M a nábojem Q, nacházející se v poli se skalárním potenciálem $\Phi(\vec{r})$ a vektorovým potenciálem $\vec{A}(\vec{r})$ je [17]

$$L = -Mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + Q\vec{A}\vec{v} - Q\Phi\,. \tag{1.24}$$

Nejobecnější tvar Lagrangeovy funkce pro případ mechanické soustavy s m stupni volnosti, vyplývající z požadavku variačnosti pohybových rovnic (1.17), vyjádřeného Helmholtzovými–Soninovými podmínkami (1.18) je [24,21]

$$L = \dot{q}^j \dot{q}^k \int_0^1 (M_{jk} \circ \chi)(1-s)\,\mathrm{d}s + \dot{q}^j \Phi_j(t, q^l) - \varphi(t, q^l)\,,$$

kde $M_{jk}(t, q^j, \dot{q}^j)$ jsou funkce splňující vztahy

$$M_{jk} = M_{kj}\,, \quad \frac{\partial M_{jk}}{\partial \dot{q}^l} = \frac{\partial M_{jl}}{\partial \dot{q}^k}\,,$$

χ je zobrazení

$$\chi:\ [0,1] \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^m \ni (s, t, q^j, \dot{q}^j) \to \chi(s, t, q^j, \dot{q}^j) = (t, q^j, s\dot{q}^j) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^m \times \mathbf{R}^m$$

a Φ_j, φ jsou libovolné funkce času a zobecněných souřadnic. Jsou-li veličiny M_{jk} závislé pouze na souřadnicích, nabývá Lagrangeova funkce známé podoby

$$L = -\frac{1}{2} M_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k + \dot{q}^j \Phi_j - \varphi\,.$$

Tvar Lagrangeovy funkce v teorii elektromagnetického pole je [17]

$$L = -\mathrm{Konst} \cdot F_{ik} F^{ik} \quad \mathrm{Konst} > 0 \quad \text{akce } S = \int_\Omega L \mathrm{d}\Omega \tag{1.25}$$

kde (F_{ik}) je tenzor elektromagnetického pole a $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ je objemový element časoprostoru. (Poznamenejme, že pro případ, že studujeme soustavu „pole+částice“, nelze sečtením Lagrangeovy funkce pro samotné pole a Lagrangeovy funkce typu (1.24) odpovídající soustavě částic v poli, získat nějakou „výslednou“ Lagrangeovu funkci, vzhledem k různosti integračních oborů při výpočtu akce pro pole a pro částice. Lze tedy zkostruovat pouze výslednou akci, jako součet akcí odpovídajících poli a částicím v tomto poli. Integrál

$$\int_C (Q\vec{A}\vec{v} - Q\Phi)\mathrm{d}t\,,$$

přispívající k akci vypočtené z Lagrangeovy funkce (1.24) a příslušející interakci nabitých částic s polem je sice možné vyjádřit pomocí čtyřvektoru proudové hustoty a čtyřpotenciálu (viz například [17]) ve tvaru

$$\int_\Omega A_i\, j^i\, \mathrm{d}\Omega$$

a přičlenit jej k integrálu vyjadřujícímu akci pro samotné pole, s příspěvkem souvisejícím s pohybem volných částic však tuto operaci provést nelze.)

Pro gravitační pole platí [17]

$$L = -\mathrm{Konst} \cdot R\sqrt{-g}, \quad \mathrm{Konst} > 0, \quad S = \int_\Omega L\mathrm{d}\Omega$$

kde R je skalární křivost a $(-g)$ determinant matice reprezentující metrický tenzor.

Konstrukce samotné Lagrangeovy funkce je ovšem problémem fyzikálním. Pro řešení konkrétních úloh stačí najít, na základě fyzikální argumentace, Lagrangeovu funkci a použít pro ni již z velké části vybudovaný obecný matematický aparát. Z matematického hlediska je totiž zcela vyřešeno, jak je vhodné pro parametrizované úlohy sestavovat funkcionál akce, definovaný na množině všech parametrických vyjádření možných trajektorií soustavy v konfiguračním prostoru (viz odst. 1.1): Geometrická teorie klasické mechaniky a teorie pole je konstruována na fibrovaných varietách a jejích konečných jetových prodlouženích. Pro mechaniku je báze fibrované variety jednorozměrná, pro teorii pole n-rozměrná, $n > 1$. Integrálem akce je, v případě teorie r-tého řádu, integrál pullbacku horizontální n-formy r-tým prodloužením řezu $\gamma : \Omega \ni x \to \gamma(x) \in \mathcal{Y}$ fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$.

Situace není zdaleka tak jasná u neparametrizovaných variačních úloh. V tomto případě jsou integračními obory funkcionálů akce neparametrizované křivky, plochy, atd. Geometrickou teorii konstruujeme na Grassmannových fibracích. Nevystupují v ní tedy žádné „preferované proměnné“, analogické času či prostoročasovým souřadnicím. Základní varieta $\mathcal{Y}$ pro konstrukci Grassmannovy fibrace není varietou fibrovanou, nemáme definovanou bázi a neexistují horizontální a vertikální vektory (vzhledem k bázi), pomocí nichž je zaváděn na fibrovaných varietách pojem horizontálnosti forem. Vzniká otázka, jaké formy definované na Grassmannových fibracích poslouží jako vhodné objekty pro výpočet akce. Tato otázka není plně vyřešena. Je však jasné, že správná obecná teorie musí vést ve svých speciálních případech k výsledkům, které jsou již pro některé neparametrizované úlohy známy (brachystochrona, geodetiky, atd., viz odst. 1.2 a kapitola 5). Jednou z možných cest je konstruovat funkcionál akce jako integrál forem definovaných jako pullbacky objemových elementů indukovaných na podvarietách základní variety $\mathcal{Y}$ objemovým elementem definovaným na $\mathcal{Y}$ na Grassmannovu fibraci. Integrovaným objektem by v tomto případě nebyla diferenciální forma nezávislá na integračním oboru, jako tomu bylo u fibrovaných variet, nýbrž forma, která je naopak s integračním oborem těsně spjata. Užití objemového elementu bude ovšem vyžadovat zavedení dodatečných struktur na varietě $\mathcal{Y}$, skalárního součinu a orientace. Další důležitou otázkou, kterou je při budování variační teorie na Grassmannových fibracích nutné řešit, je vhodná definice kontaktnosti forem a její srovnání s pojmem kontaktnosti na fibrovaných varietách, vlastnosti kontaktních forem, možnost konstrukce variační posloupnosti a diskuse o jejím významu pro variační teorii.

Předkládaná diplomová práce se zabývá problematikou spojenou s formulací geometrické teorie neparametrizovaných variačních úloh. V následující kapitole „Grassmaniány“ jsou rekapitulovány definice základních pojmů vedoucí ke konstrukci Grassmannovy fibrace obecného řádu jako množiny tříd $r-$ekvivalentních zobrazení: ekvivalence zobrazení v bodě, r-jet zobrazení, kontaktní element, Grassmanián. Je zavedena struktura hladké variety na Grassmannově fibraci. Pozornost je věnována souřadnicovým vyjádřením, která jsou důležitá pro praktické výpočty, obecné úvahy jsou dokumentovány příklady. Kapitola 3. „Variační posloupnost na fibrovaných varietách“ prezentuje základy teorie variační posloupnosti na fibrovaných varietách a jejich konečných jetových prodlouženích. Shrnuje výsledky této teorie, obsažené především v pracích [8,9,11], dále v [6,20,22], s cílem jejich pozdějšího využití pro analogické úvahy na Grassmannových fibracích. Těžištěm práce je, kromě druhé kapitoly, také kapitola 4 „Variační posloupnost na $P_1^r\mathcal{Y}$“, která se věnuje definicím základních pojmů potřebných pro formulaci teorie variační posloupnosti na Grassmannových fibracích obecného řádu pro mechaniku. Ukazuje se, že kontaktní formy na fibrovaných varietách mají, na rozdíl od forem horizontálních, své protějšky na Grassmannových fibracích. Pojem kontaktnosti je definován nezávisle na souřadnicích a je dokázána jeho nezávislost na souřadnicových přechodech. Na rozdíl od fibrovaných variet však není možno definovat k-kontaktnost p-forem, s výjimkou případů $k = p$, neboť počet 1-kontaktních faktorů v jednotlivých sčítancích souřadnicového vyjádření kontaktních forem se při souřadnicových přechodech mění. Zachovává se, velmi zhruba řešeno, pouze jejich minimální počet. Kapitola 5 obsahuje návrh konstrukce akce, vycházející z indukovaných objemových elementů na podvarietách základní variety $\mathcal{Y}$. Její součástí je rovněž odstavec „Fyzikální příklady“ který ukazuje několik fyzikálních problémů, které vedou na typicky neparametrizovanou variační úlohu, prezentuje jejich standardní řešení a uvádí je do souvislosti s nově budovanou teorií. Výsledky prezentované ve čtvrté a páté kapitole lze snad považovat za původní ve smyslu aplikace pojmů známých z teorií konstruovaných na jiných geometrických strukturách na případ Grassmannových fibrací. Závěrečná kapitola 6 shrnuje stručně získané výsledky a specifikuje další kroky, které bude nutné při rozvíjení teorie variační posloupnosti na Grassmannových fibracích učinit.

Děkuji vedoucímu své práce Mgr. Michalu Krupkovi, Dr., za konzultace týkající se především problematiky Grassmannových fibrací a Prof. RNDr. Demeteru Krupkovi, DrSc. za velmi užitečné a zajímavé diskuse o vztahu teorie variační posloupnosti na fibrovaných varietách a na Grassmannových fibracích ke konkrétním fyzikálním úlohám, které mi pomohly k vytvoření názorné představy zejména při posuzování rozdílnosti variační teorie na obou typech podkladových struktur. Především však děkuji své mamince Janě Musilové nejen za připomínky a konzultace, ale také za podporu v průběhu celého studia.

Kapitola 2

Grassmannovy fibrace

V této kapitole definujeme základní geometrické struktury, na nichž budeme budovat teorii variační posloupnosti – Grassmannovy fibrace. Ukazujeme, že na nich existuje hladká struktura, kterou konstruujeme. Východiskem teoretických úvah jsou práce M. Krupky [12], D. Krupky a D.R. Grigoreho [4] a lekce D. Krupky přednesené na letní škole Natural variational principles v Levoči, 1998. Teorii doplňujeme vlastními příklady praktických výpočtů v souřadnicích.

2.1 Základní pojmy

Nechť $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) jsou variety dimenze n (resp. $m+n$). Zobrazení $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, třídy C^∞ nazveme *r-ekvivalentními v bodě $x \in \mathcal{X}$*, jestliže existují souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^i)$, $i = 1, \ldots, n$, na $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (y^\sigma)$, $\sigma = 1, \ldots, m+n$, na $\mathcal{Y}$, takové, že platí:

$$x \in \mathcal{U}, \quad f(x) = g(x) \in \mathcal{V}\,,$$
$$D^k_{i_1 \ldots i_k}(\psi f \varphi^{-1})(\varphi(x)) = D^k_{i_1 \ldots i_k}(\psi g \varphi^{-1})(\varphi(x)) \tag{2.1}$$

pro $1 \leq k \leq r$, $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$. (Pro $k = 1$ píšeme jen D_{i_1}.) Tato relace je zjevně relací ekvivalence. *r-jetem* zobrazení f v bodě $x \in \mathcal{X}$ nazveme třídu uvedené ekvivalence obsahující zobrazení f a označujeme $J^r_x f$. Tedy $J^r_x f = \{g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \mid g$ je r-ekvivalentní s $f\}$ v bodě x. Nechť $F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je množina všech zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ třídy C^∞. Dále označíme:

$$J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \{J^r_x f \mid (f \in F(\mathcal{X}, \mathcal{Y})) \wedge (f(x) = y)\}\,,$$
$$J^r_x(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\,,$$
$$J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} J^r_x(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\,,$$
$$T^r_n \mathcal{Y} = J^r_0(\mathcal{R}^n, \mathcal{Y}) = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} J^r_{(0,y)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{Y})\,.$$

$T^1_1\mathcal{Y}$ je kanonicky izomorfní s tečným prostorem $T\mathcal{Y}$ variety $\mathcal{Y}$. Prvky $T^r_n\mathcal{Y}$ nazýváme (r,n)*-rychlosti.* Na $J^r(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ lze zavést diferencovatelnou strukturu indukovanou strukturou hladkých variet $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ (viz odstavec 2.2.1). $\dim J^r(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = n+(n+m)\sum_{k=0}^r\binom{n+k-1}{k}$. Nechť $J^r_xf \in J^r_{(x,y)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $J^r_yg \in J^r_{(y,z)}(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$. *Kompozicí* jetů J^r_xf a J^r_yg nazveme r-jet $J^r_x(g\circ f)$ zobrazení $g\circ f:\mathcal{X}\to\mathcal{Z}$ a značíme $J^r_yg\circ J^r_xf$. Nechť existují souřadnicové systémy $(\mathcal{U},\varphi)$, $\varphi=(x^i)$, $i=1,\dots,n$ na $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi=(y^\sigma)$, $\sigma=1,\dots,m+n$ na $\mathcal{Y}$ takové, že $x\in\mathcal{U}$, $f(x)=y\in\mathcal{V}$. r-jet J^r_xf nazveme *regulární*, jestliže hodnost matice $D\psi f\varphi^{-1}(\varphi(x))$ je n. Množinu všech regulárních jetů z $J^r_{(x,y)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ označujeme $\mathrm{Imm}\,J^r_{(x,y)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. Dále klademe $\mathrm{Imm}\,J^r_x(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \cup_{y\in\mathcal{Y}}\mathrm{Imm}\,J^r_{(x,y)}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$. *Prostorem regulárních* (r,n)*-rychlostí* nazveme množinu $\mathrm{Imm}\,T^r_n\mathcal{Y} = \mathrm{Imm}\,J^r_0(\mathcal{R}^n,\mathcal{Y}) \subset T^r_n\mathcal{Y}$. Dále označme

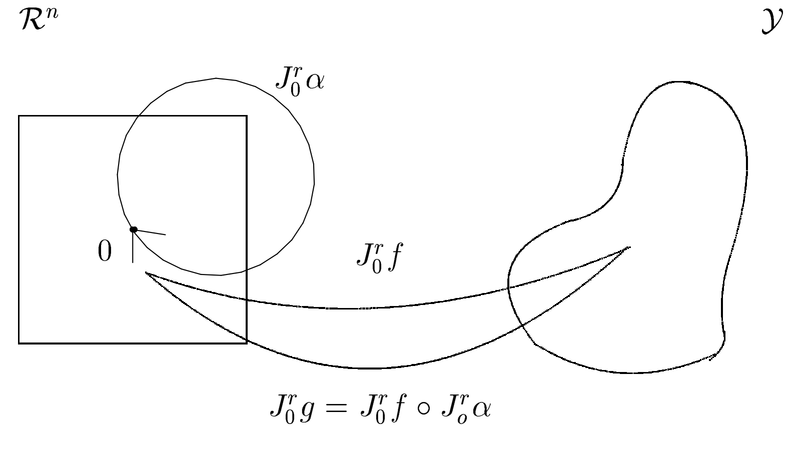
$$L^r_n = \mathrm{Imm}\,J^r_{(0,0)}(\mathcal{R}^n,\mathcal{R}^n).$$

L^r_n je tedy množina r-jetů všech difeomorfismů z $\mathcal{R}^n$ do $\mathcal{R}^n$, zobrazujících počátek na sebe. Tato množina má strukturu diferencovatelé variety dimenze $n+n\sum_{k=0}^r\binom{n+k-1}{k}$ a Lieovy grupy s grupovou operací $\circ$. r-jety $J^r_0f, J^r_0g \in \mathrm{Imm}\,T^r_n\mathcal{Y}$ nazveme *ekvivalentními* z hlediska pravé akce grupy L^r_n, jestliže existuje $J^r_0\alpha \in L^r_n$ tak, že $J^r_0f\circ J^r_0\alpha = J^r_0g$ (viz obr. 3). Uvedená relace je ekvivalencí. Odpovídající faktorovou množinu nazýváme *Grassmannovou fibrací (rozvrstvením)* a označujeme

$$P^r_n\mathcal{Y} = \mathrm{Imm}\,T^r_n\mathcal{Y}/L^r_n.$$

Poznamenejme, že pravou akcí grupy L^r_n na $\mathrm{Imm}\,T^r_n\mathcal{Y}$ rozumíme zobrazení

$$\mathrm{Imm}\,T^r_n\mathcal{Y}\times L^r_n \ni (J^r_0f, J^r_0\alpha) \longrightarrow J^r_0g = J^r_0f\circ J^r_0\alpha \in \mathrm{Imm}\,T^r_n\mathcal{Y}\,.$$



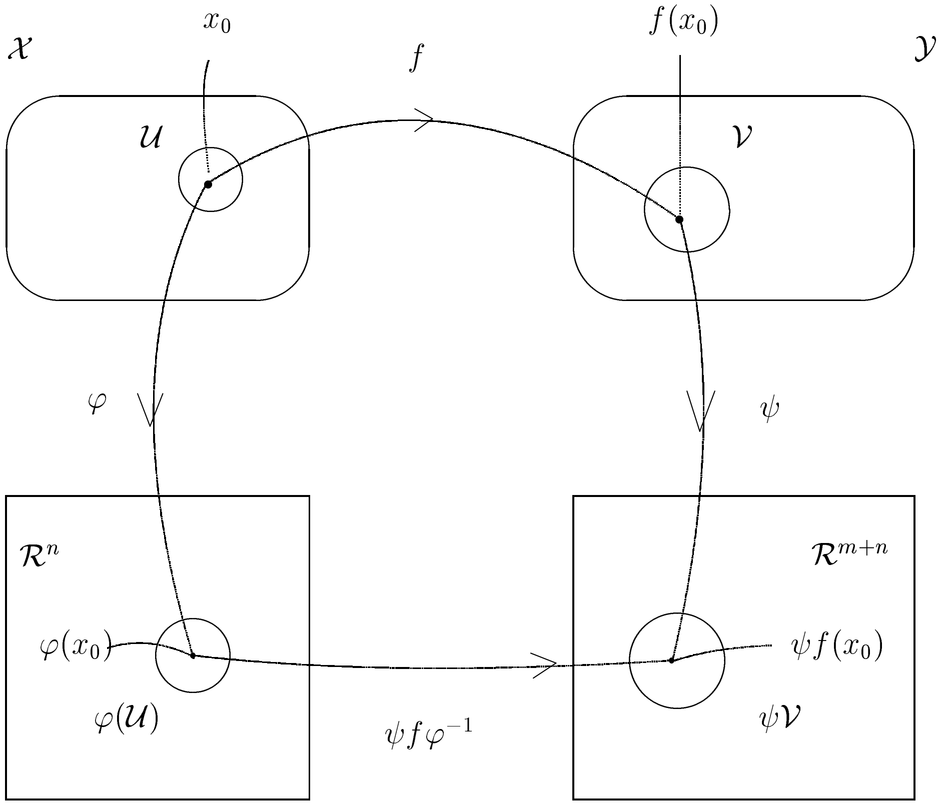
Obr. 3: K ekvivalenci r-jetů

Prvky této množiny označujeme $[J^r_0f]$ a nazýváme (r,n)*-kontaktní elementy.*

2.2 Souřadnicová vyjádření

2.2.1 Kanonické souřadnice na $J^r(\mathcal{X},\mathcal{Y})$

Nechť $J^r_{x_0}f \in J^r(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ a nechť $(\mathcal{U},\varphi)$, $\varphi = (x^i)$, $i = 1,\ldots,n$, resp. $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi = (y^\sigma)$, $\sigma = 1,\ldots,n+m$ jsou souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$takové, že $x_0 \in \mathcal{U}$, $f(x_0) \in \mathcal{V}$ (viz obr. 4).



Obr. 4: Souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$

Kanonickým reprezentantem třídy $J^r_{x_0}f$ vzhledem k souřadnicovým systémům $(\mathcal{U},\varphi)$, $\mathcal{V},\psi)$ nazveme takové zobrazení $f_0 \in F(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, jehož souřadnicová reprezentace $\psi f_0 \varphi^{-1}$ je Taylorovým polynomem r-tého stupně,

$$\psi f_0 \varphi^{-1} : \mathcal{R}^n \ni (x^1,\ldots,x^n) \to \psi f_0 \varphi^{-1}(x^1,\ldots,x^n) \in \mathcal{R}^{n+m},$$

se středem v bodě $(x^1_0,\ldots,x^n_0) = \varphi(x_0)$:

$$y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x^1,\ldots,x^n) = y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x^1_0,\ldots,x^n_0)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad D_{i_1} y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x_0^1, \ldots, x_0^n)(x^{i_1} - x_0^{i_1}) + \\
&+ \quad \frac{1}{2} D^2_{i_1 i_2} y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x_0^1, \ldots, x_0^n)(x^{i_1} - x_0^{i_1})(x^{i_2} - x_0^{i_2}) + \cdots \\
&+ \quad \frac{1}{r!} D^r_{i_1 \ldots i_r} y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x_0^1, \ldots, x_0^n)(x^{i_1} - x_0^{i_1}) \ldots (x^{i_r} - x_0^{i_r})
\end{aligned}
$$

Soubor $n + (n+m)\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{k}$ čísel

$$
((x_0^j), (y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x_0^j)), (D_{i_1} y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x_0^j)), \ldots, (D_{i_1 \ldots i_r} y^\sigma \psi f_0 \varphi^{-1}(x_0^j))), \tag{2.2}
$$
$$
1 \le j \le n, \quad 1 \le \sigma \le m+n, \quad 1 \le i_1, \ldots, i_r \le n,
$$

představuje *indukované kanonické souřadnice* bodu $J^r_{x_0} f \in J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Diferencovatelná struktura na $J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

Předpokládejme, že $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou diferencovatelné variety. Nechť $J^r_x f \in J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), f(x) = y$. Zvolme souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi)$ na $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V}, \psi)$ na $\mathcal{Y}$ tak, aby $x \in \mathcal{U}, y = f(x) \in \mathcal{V}$. Označme pro $x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}$

$$
\Phi : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times J^r_{(x,y)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \varphi(\mathcal{U}) \times \psi(\mathcal{V}) \times \mathcal{R}^{M_r},
$$
$$
M_r = (m+n) \sum_{k=1}^{r} \binom{n+k-1}{k}.
$$
$$
\Phi(J^r_x f) = (\varphi(x), \psi f \varphi^{-1}(\varphi(x)), D_i \psi f \varphi^{-1}(\varphi(x)),
$$
$$
D^2_{ik} \psi f \varphi^{-1}(\varphi(x)), \ldots, D^r_{i_1, \ldots, i_r} \psi f \varphi^{-1}(\varphi(x)),
$$

kde $1 \le i, j, k \le n$, $1 \le \sigma \le m+n$, $1 \le i_1 \le \ldots \le i_r \le n$. Dále označme $\mathcal{W} = \Phi^{-1}(\varphi(\mathcal{U}) \cap \psi(\mathcal{V}) \cap \mathcal{R}^{M_r})$. Pak $(\mathcal{W}, \Phi)$ je souřadnicový systém na $J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, definující na $J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ strukturu diferencovatelné variety dimenze

$$
N_r = \dim J^r(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = n + (n+m) + M_r = n + (n+m) \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k-1}{k}.
$$

Příklad 1: Zvolme $\mathcal{X} = (\mathcal{R}^2, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^2}), \mathcal{Y} = (\mathcal{R}^3, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^3})$ s globálními souřadnicovými systémy. Uvažujme prostor 2-jetů $J^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\dim J^2(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = n + (n+m)\sum_{k=0}^{2} \binom{n+k-1}{k} = 20$. Funkce

$$
f : \mathcal{R}^2 \ni (x^1, x^2) \to f(x^1, x^2) = (f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2), f^3(x^1, x^2)) \in \mathcal{R}^3
$$

nechť je definována vztahy:

$$
\begin{aligned}
f^1(x^1, x^2) &= e^{x^1 + x^2}, \\
f^2(x^1, x^2) &= e^{x^1 - x^2}, \\
f^3(x^1, x^2) &= (x^1)^2 + (x^2)^2.
\end{aligned}
$$

f je třídy C^∞. Zvolme bod $(x_0^1, x_0^2) = (0,0)$. 2-jet funkce f v tomto bodě má kanonické souřadnice

$$\left((0,0), (f^1(0,0), f^2(0,0), f^3(0,0)), \left(\frac{\partial f^\sigma(0,0)}{\partial x^i}\right), \left(\frac{\partial^2 f^\sigma(0,0)}{\partial x^i \partial x^j}\right)\right),$$

$i = 1,2$, $\sigma = 1,2,3$. Platí:

$$(f^1(0,0), f^2(0,0), f^3(0,0)) = (1,1,0)\,,$$

$$(D_1 f^1(0,0), D_2 f^1(0,0), D_1 f^2(0,0), D_2 f^2(0,0), D_1 f^3(0,0), D_2 f^3(0,0)) =$$
$$= (1,1,1,-1,0,0)\,,$$

$$(D_{11}^2 f^1(0,0), D_{12}^2 f^1(0,0), D_{22}^2 f^1(0,0), D_{11}^2 f^2(0,0), D_{12}^2 f^2(0,0)\,,$$
$$D_{22}^2 f^2(0,0), D_{11}^2 f^3(0,0), D_{12}^2 f^3(0,0), D_{22}^2 f^3(0,0)) = (1,1,1,1,-1,1,2,0,2)\,,$$

$$J_{x_0}^2 f \quad \text{má tedy souřadnice} \quad ((0,0),(1,1,0),(1,1,1,-1,0,0),(1,1,1,1,-1,1,2,0,2))\,.$$

Kanonickým reprezentantem $J_{x_0}^2 f$ je funkce $f_0 : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3$:

$$(1+x^1+x^2+\frac{1}{2}(x^1)^2+x^1x^2+\frac{1}{2}(x^2)^2, 1+x^1-x^2+\frac{1}{2}(x^1)^2-x^1x^2+\frac{1}{2}(x^2)^2, (x^1)^2+(x^2)^2).$$

Příklad 2: Diferencovatelná struktura na Imm $J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$. Zavedeme nejprve diferencovatelnou strukturu na $J^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$: Označme jako $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$ euklidovský prostor s přirozenou topologií $\tau_{\mathcal{R}^n}$ a diferencovatelnou strukturou definovanou atlasem $A_\mathcal{X} = \{(\mathcal{U}_\iota, \mathrm{id}_{\mathcal{U}_\iota}),\}_{\iota \in I}$, kde I je spočetná indexová množina a $\mathcal{U}_\iota \in \tau_{\mathcal{R}^n}$. Globální souřadnicový systém $(\mathcal{R}^n, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^{n+m}})$ je s $A_\mathcal{X}$ kompatibilní. Analogicky položme $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^{n+m}$, s atlasem $A_\mathcal{Y} = \{(\mathcal{V}_\kappa, \mathrm{id}_{\mathcal{V}_\kappa})\}_{\kappa \in K}$, $\mathcal{V}_\kappa \in \tau_{\mathcal{R}^{n+m}}$. K je indexová množina. Vzhledem k tomu, že $\varphi_\iota = \mathrm{id}_{\mathcal{V}_\iota}, \psi_\kappa = \mathrm{id}_{\mathcal{V}_\kappa}$ je atlas na $J^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$ tvaru

$$\{(\mathcal{W}_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \quad \alpha = (\iota, \kappa) \in I \times K = A$$

$$\Phi_\alpha(J_x^1 f) = (x^i(x), y^\sigma(f(x)), D_i y^\sigma f(x)), \;\; 1 \le i \le n,\; 1 \le \sigma \le n+m$$

$$\mathcal{W}_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\iota \times \mathcal{V}_\kappa \times \mathcal{R}^{n(n+m)})$$

Množina $J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m}) \subset J^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$ je $n(n+m)$-rozměrnou podvarietou variety $J^1(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$. Skutečně, označme $w_\alpha = \mathcal{W}_\alpha \cap J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{m+n})$. Pro libovolný $J_0^1 f \in J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$ platí

$$\Phi_\alpha|_{w_\alpha}(J_0^1 f) = (0_{\mathcal{R}^n}, 0_{\mathcal{R}^{n+m}}, D_i f(0_{\mathcal{R}^n}))\,.$$

Rovnice této podvariety mají tvar: $x^i = 0, y^\sigma = 0, 1 \leq i \leq n, 1 \leq \sigma \leq n+m$. Označme $\chi_\alpha(J_0^1 f) = (D_i f(0_{\mathcal{R}^n}))$. soubor $\{(w_\alpha, \chi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ je atlas na $J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$. Dále ukážeme, že $\mathrm{Imm} J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$ je otevřená podvarieta variety $J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$ a je tedy $\dim \mathrm{Imm} J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m}) = n(n+m)$. Nechť $J_0^1 f \in w_\alpha \subset \mathrm{Imm} J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$, pak $(y_i^\sigma \chi_\alpha(J_0^1 f)) = (D_i f^\sigma(0_{\mathcal{R}^n}))$ je matice hodnosti n. Množina $\mathrm{Imm} J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$ je otevřenou podmnožinou množiny $J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$, na níž uvažujeme topologii definovanou množinami (w_α). K důkazu tohoto tvrzení stačí ukázat, že množina $\chi_\alpha(w_\alpha \cap \mathrm{Imm} J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m}))$ je otevřenou podmnožinou prostoru $\mathcal{R}^{n(n+m)}$ s přirozenou topologií. Nechť $z \in \chi_\alpha(w_\alpha \cap \mathrm{Imm} J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m}))$ je libovolný bod. Pak $z = (A_i^\sigma)$, kde (A_i^σ) je matice s hodností $n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq \sigma \leq n+m$. Existují tedy indexy $1 \leq \sigma_1 < \ldots < \sigma_n \leq n+m$ tak, že $\det(A_i^\nu) \neq 0, \nu = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Vzhledem k tomu, že determinant matice je spojitou funkcí jejích prvků, existují otevřená okolí o bodu $(A_i^\sigma) \in o \subset \mathcal{R}^{n(n+m)}$ tak, že pro všechny body $(B_i^\sigma) \in o, 1 \leq i \leq n, 1 \leq \sigma \leq n+m$ je matice $(B_i^\nu), \ni = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, regulární.

Příklad 3: Nechť $L_2^2 = \mathrm{Imm}\, J^2_{(0,0)}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^2)$ je diferenciální grupa. Sestrojme třídu $[J_0^2 f] \in P_2^2 \mathcal{R}^3$ Grassmannovy fibrace pro 2-jet z příkladu 1. Nechť $\alpha \in L_2^2$ je libovolný prvek. Jeho kanonické souřadnice jsou

$$(D_1 x^1 \alpha(0,0), D_2 x^1 \alpha(0,0), D_1 x^2 \alpha(0,0), D_2 x^2 \alpha(0,0), D^2_{11} x^1 \alpha(0,0), D^2_{12} x^1 \alpha(0,0)\,,$$
$$D^2_{22} x^1 \alpha(0,0), D^2_{11} x^2 \alpha(0,0), D^2_{12} x^2 \alpha(0,0), D^2_{22} x^2 \alpha(0,0))\,,$$

kde matice $(D_i x^j \alpha(0,0))$ je regulární. Označme $D_i x^j \alpha(0,0) = a_i^j, D^2_{ik} x^j \alpha(0,0) = a^j_{ik}$. Kanonický reprezentant má tvar $\alpha_0 : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$:

$$x^1 \alpha_0(x^1, x^2) = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \frac{1}{2} a^1_{11} (x^1)^2 + a^1_{12} x^1 x^2 + \frac{1}{2} a^1_{22} (x^2)^2\,,$$

$$x^2 \alpha_0(x^1, x^2) = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \frac{1}{2} a^2_{11} (x^1)^2 + a^2_{12} x^1 x^2 + \frac{1}{2} a^2_{22} (x^2)^2\,.$$

Podle definice Grassmannovy fibrace je

$$[J_0^2 f] = \{J_0^2 g \in J^2_{(0,y_0)}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3) \mid J_0^2 g = J_0^2 (f \circ \alpha), J_0^2 \alpha \in L_2^2\}\,.$$

Reprezentantem této třídy je 2-jet $J_0^2(f_0 \circ \alpha_0)$, kde f_0 je kanonický reprezentant $J_0^2 f$ (viz příklad 1).

$$f_0 \circ \alpha_0 = \{1 + a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \frac{1}{2} a^1_{11} (x^1)^2 + a^1_{12} x^1 x^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} a^1_{22} (x^2)^2 + a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \frac{1}{2} a^2_{11} (x^1)^2 + a^2_{12} x^1 x^2 + \frac{1}{2} a^2_{22} (x^2)^2 + \frac{1}{2} (a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \frac{1}{2} a^1_{11} (x^1)^2 +$$

$$+ a^1_{12} x^1 x^2 + \frac{1}{2} a^1_{22} (x^2)^2)^2 + (a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \frac{1}{2} a^1_{11} (x^1)^2 + a^1_{12} x^1 x^2 + \frac{1}{2} a^1_{22} (x^2)^2)(a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 +$$

$$+\frac{1}{2}a^2_{11}(x^1)^2 + a^1_{12}x^1x^2 + \frac{1}{2}a^2_{22}(x^2)^2)+$$

$$\frac{1}{2}(a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \frac{1}{2}a^2_{11}(x^1)^2 + a^1_{12}x^1x^2 + \frac{1}{2}a^2_{22}(x^2)^2)^2,$$

$$1 + a^1_1x^1 - a^1_2x^2 + \frac{1}{2}a^1_{11}(x^1)^2 - a^1_{12}x^1x^2+$$

$$+\frac{1}{2}a^1_{22}(x^2)^2+a^2_1x^1-a^2_2x^2+\frac{1}{2}a^2_{11}(x^1)^2-a^2_{12}x^1x^2+\frac{1}{2}a^2_{22}(x^2)^2+\frac{1}{2}(a^1_1x^1-a^1_2x^2+\frac{1}{2}a^1_{11}(x^1)^2-$$

$$-a^1_{12}x^1x^2+\frac{1}{2}a^1_{22}(x^2)^2)^2+(a^1_1x^1-a^1_2x^2+\frac{1}{2}a^1_{11}(x^1)^2-a^1_{12}x^1x^2+\frac{1}{2}a^1_{22}(x^2)^2)(a^2_1x^1-a^2_2x^2+$$

$$+\frac{1}{2}a^2_{11}(x^1)^2 - a^1_{12}x^1x^2 + \frac{1}{2}a^2_{22}(x^2)^2)+$$

$$\frac{1}{2}(a^2_1x^1 - a^2_2x^2 + \frac{1}{2}a^2_{11}(x^1)^2 - a^1_{12}x^1x^2 + \frac{1}{2}a^2_{22}(x^2)^2)^2,$$

$$a^1_{11}(x^1)^2 + a^1_{22}(x^2)^2 + a^2_{11}(x^1)^2 + a^2_{22}(x^2)^2 + \frac{1}{2}(a^2_{11}(x^1)^2 + a^2_{22}(x^2)^2)^2\}\,.$$

Kanonického reprezentanta jetu $J^2_0(f_0\circ\alpha_0)$ pro pevně zvolené α získáme ponecháním členů do druhého řádu včetně, tj.

$$g_0 = (1 + (a^1_1 + a^2_1)x^1 + (a^1_2 + a^2_2)x^2 + (\frac{1}{2}a^1_{11} + \frac{1}{2}a^2_{11} + \frac{1}{2}(a^1_1)^2 + a^1_1a^2_1 + \frac{1}{2}(a^2_1)^2)(x^1)^2$$

$$+(a^1_{12}+a^2_{12}+a^1_1a^1_2+a^1_1a^2_2+a^1_2a^2_1+a^2_1a^2_2)x^1x^2+(\frac{1}{2}a^1_{22}+\frac{1}{2}a^2_{22}+\frac{1}{2}(a^1_2)^2+a^1_2a^2_2+\frac{1}{2}(a^2_2)^2)(x^2)^2,$$

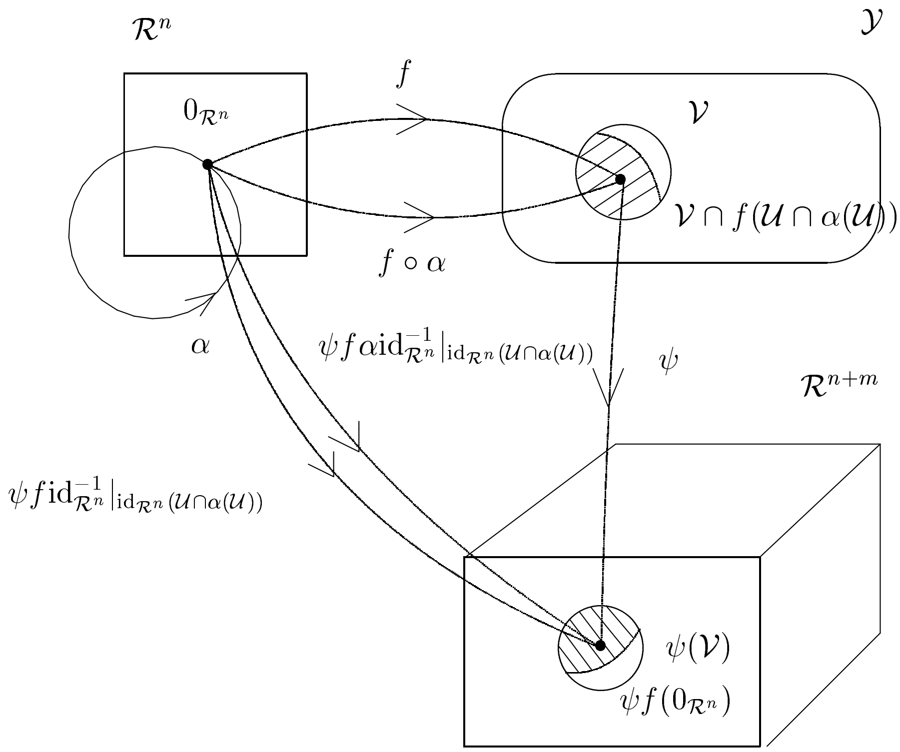
$$1 + (a^1_1 - a^2_1)x^1 + (a^1_2 - a^2_2)x^2 + (\frac{1}{2}a^1_{11} - \frac{1}{2}a^2_{11} + \frac{1}{2}(a^1_1)^2 - a^1_1a^2_1 + \frac{1}{2}(a^2_1)^2)(x^1)^2$$

$$+(a^1_{12}-a^2_{12}+a^1_1a^1_2-a^1_1a^2_2-a^1_2a^2_1+a^2_1a^2_2)x^1x^2+(\frac{1}{2}a^1_{22}-\frac{1}{2}a^2_{22}+\frac{1}{2}(a^1_20)^2-a^1_2a^2_2+\frac{1}{2}(a^2_2)^2)(x^2)^2,$$

$$((a^1_1)^2 + (a^2_1)^2)(x^1)^2 + (2a^1_1a^1_2 + 2a^2_1a^2_2)x^1x^2 + ((a^1_2)^2 + (a^2_2)^2)(x^2)^2)\,. \qquad (2.3)$$

Třídu $[J^2_0f] = [J^2_0g_0]$ tvoří všechny 2-jety z $J^2_{(0,y_0)}(\mathcal{R}^2,\mathcal{R}^3)$, jejichž kanonický reprezentant má tvar (2.3), kde $(a^j_i, a^j_{ik})_{i,j,k=1,2}$ jsou libovolná čísla s jediným omezením, daným regulárností matice (a^j_i), tj. $a^1_1a^2_2 - a^1_2a^2_1 \neq 0$.

2.2.2 Souřadnicové vyjádření pravé akce grupy L^r_n



Obr. 5: Pravá akce grupy L^r_n

Nechť $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n$ je otevřená množina, $0 \in \mathcal{U}$, a nechť $\alpha : \mathcal{U} \to \mathcal{R}^n, \alpha(0) = 0$ je difeomorfismus, tj. $J^r_0\alpha \in L^r_n$. Nechť dále $J^r_0 f \in J^r_0(\mathcal{R}^n, \mathcal{Y}), \dim\mathcal{Y} = n + m$ a $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (y^\sigma)$, $\sigma = 1, \ldots, n+m$ je souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ takový, že $f(0_{\mathcal{R}^n}) \in \mathcal{V}$. Kanonické souřadnice na L^r_n označme

$$(a^j_i, a^j_{i_1 i_2}, \ldots, a^j_{i_1 \ldots i_r})$$

kde $1 \leq j \leq n, 1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k$. Souřadnicový zápis $J^r_0 f$ označíme $(0_{\mathcal{R}^n}, y^\sigma\psi f(0_{\mathcal{R}^n}), D_{i_1}y^\sigma\psi f(0_{\mathcal{R}^n}), \ldots, D_{i_1\ldots i_r}y^\sigma\psi f(0_{\mathcal{R}^n})) = (0_{\mathcal{R}^n}, y^\sigma, y^\sigma_{i_1}, \ldots, y^\sigma_{i_1\ldots i_r})$. Pravá akce grupy L^r_n je definována vztahem:

$$J^r_0 f \circ J^r_0 \alpha = J^r_0(f \circ \alpha)$$

Souřadnice $J^r_0(f \circ \alpha)$ označme $(0_{\mathcal{R}^n}, \overline{y}^\sigma, \overline{y}^\sigma_{i_1}, \ldots, \overline{y}^\sigma_{i_1\ldots i_r})$ (na množině $f \circ \alpha(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$).

$$\overline{y}^\sigma = y^\sigma$$

$$\overline{y}^\sigma_{i_1} = D_{i_1}y^\sigma(f \circ \alpha)(0_{\mathcal{R}^n}) =$$

$$= D_k y^\sigma f(\alpha(x)) \cdot D_{i_1} x^k \alpha(x)|_{x=0_{\mathcal{R}^n}} = y_k^\sigma a_{i_1}^k$$

$$\overline{y}^\sigma_{i_1 i_2} = D^2_{i_1 i_2} y^\sigma (f \circ \alpha)(x)|_{x=0_{\mathcal{R}^n}} =$$

$$= D_{i_1}(D_k y^\sigma f(\alpha(x)).D_{i_2} x^k \alpha(x)|_{x=0_{\mathcal{R}^n}} = [D_l D_k y^\sigma f(\alpha(x)) \cdot D_{i_1} x^l \alpha(x) \cdot D_{i_2} x^k \alpha(x) +$$

$$+ D_k y^\sigma f(\alpha(x)) D^2_{i_1 i_2}(x^k \alpha(x))]_{x=0_{\mathcal{R}^n}} = y^\sigma_{lk} a^l_{i_1} a^k_{i_2} + y^\sigma_k a^k_{i_1 i_2},$$

$$\overline{y}^\sigma_{i_1 \ldots i_k} = D^k_{i_1 \ldots i_k} y^\sigma (f \circ \alpha)(0_{\mathcal{R}^n}) =$$

$$[D^{k-1}_{i_1 \ldots i_{k-1}}(D_{i_k} y^\sigma (f \circ \alpha)(x))|_{x=0_{\mathcal{R}^n}} = [D^{k-1}_{i_1 \ldots i_{k-1}}(D_{l_k} y^\sigma f(\alpha(x)) \cdot D_{i_k} x^{l_k} \alpha(x))]_{x=0_{\mathcal{R}^n}} =$$

$$[D^{k-2}_{i_1 \ldots i_{k-2}}(D_{l_{k-1}} D_{l_k} y^\sigma f(\alpha(x)) \cdot D_{i_{k-1}} x^{l_{k-l}} \alpha(x) \cdot D_{i_k} x^{l_k} \alpha(x) +$$

$$D_{l_k} y^\sigma f(\alpha(x)) \cdot D_{i_{k-1}} D_{i_k} x^{l_k} \alpha(x)]_{x=0_{\mathcal{R}^n}} = \ldots = \sum_{p=1}^{k} \sum_{(I_1, \ldots, I_p)} y^\sigma_{l_1 \ldots l_p} a^{l_1}_{I_1} \ldots a^{l_p}_{I_p}$$

kde $1 \leq l_1 \leq \ldots \leq l_p \leq n$, $1 \leq k \leq r$ a $I_1, \ldots, I_p$ jsou multiindexy takové, že každý soubor $(I_1, \ldots, I_p)$ představuje jedno z možných rozdělení indexů $(i_1, \ldots, i_k)$ do p skupin (např. $(i_1, i_2, i_3, i_4) \to (I_1, I_2) = \{(i_1, i_2 i_3 i_4), (i_1 i_2, i_3, i_4), (i_1 i_2 i_3, i_4)\}$.

Důkaz předchozích vztahů (viz [4]) lze provést indukcí.

Příklad 4: Pro $n = 2, m = 1$ a $r = 2$ dostáváme:

$$\begin{aligned}
\overline{y}^\sigma &= y^\sigma \\
\overline{y}^\sigma_1 &= y^\sigma_1 a^1_1 + y^\sigma_2 a^2_1 \\
\overline{y}^\sigma_2 &= y^\sigma_1 a^1_2 + y^\sigma_2 a^2_2 \\
\overline{y}^\sigma_{11} &= y^\sigma_{11} a^1_1 a^1_1 + 2 y^\sigma_{12} a^1_1 a^2_1 + y^\sigma_{22} a^2_1 a^2_1 + y^\sigma_1 a^1_{11} + y^\sigma_2 a^2_{11} \\
\overline{y}^\sigma_{12} &= y^\sigma_{11} a^1_1 a^1_2 + y^\sigma_{12}(a^1_1 a^2_2 + a^2_1 a^1_2) + y^\sigma_{22} a^2_1 a^2_2 + y^\sigma_1 a^1_{12} + y^\sigma_2 a^2_{12} \\
\overline{y}^\sigma_{22} &= y^\sigma_{11} a^1_2 a^1_2 + 2 y^\sigma_{12} a^1_2 a^2_2 + y^\sigma_{22} a^2_2 a^2_2 + y^\sigma_1 a^1_{22} + y^\sigma_2 a^2_{22}
\end{aligned}$$

Dosazením kanonických souřadnic jetu $J^2_0 f$ z příkladu 1 do uvedených vztahů získáme kanonické souřadnice reprezentanta třídy $[J^2_0 f]$:

$$J^2_0(f_0 \circ \alpha_0) = ((0,0),(1,1,0),(a^1_1 + a^2_1, a^1_2 + a^2_2, a^1_1 - a^2_1, a^1_2 - a^2_2, 0, 0),$$

$$((a^1_1)^2 + 2a^1_1 a^2_1 + (a^2_1)^2 + a^1_{11} + a^2_{11}, a^1_1 a^1_2 + a^1_1 a^2_2 + a^1_2 a^2_1 + a^2_1 a^2_2 + a^1_{12} + a^2_{12},$$

$$(a^1_2)^2 + 2a^1_2 a^2_2 + (a^2_2)^2 + a^1_{22} + a^2_{22}, (a^1_1)^2 - 2a^1_1 a^2_1 + (a^2_1)^2 + a^1_{11} - a^2_{11}, a^1_1 a^1_2 - a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1 + a^2_1 a^2_2 +$$

$$+ a^1_{12} - a^2_{12}, (a^1_2)^2 - a^1_2 a^2_2 + (a^2_2)^2 + a^1_{22} - a^2_{22}, 2(a^1_1)^2 + 2(a^2_1)^2, 2a^1_1 a^1_2 + 2a^2_1 a^2_2, 2(a^1_2)^2 + 2(a^2_2)^2))$$

Tento výsledek souhlasí s výsledkem příkladu 3, (kanonický reprezentant má tvar (2.3)).

2.3 Grassmaniány prvního řádu

Grassmaniánem 1.řádu rozumíme množinu

$$G_{n,m+n} = \mathrm{Imm}\, J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})/L^1_n$$

Souřadnicová reprezentace 1-jetu $J^1_0 f \in \mathrm{Imm}\, J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$ zobrazení $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^{n+m}$, vyjádřeného v kanonických souřadnicích jako

$$f(x^1, \dots, x^n) = (f^1(x^1, \dots, x^n), \dots, f^{n+m}(x^1, \dots, x^n))$$

je dána Jacobiho maticí:

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^n}\right)_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial f^{m+n}}{\partial x^1}\right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial f^{m+n}}{\partial x^n}\right)_0 \end{pmatrix} \in M_{n,n+m}$$

kde $M_{n,n+m}$ je množina všech matic o n sloupcích a $n+m$ řádcích s hodností n. Je-li $J^1_0 f \in \mathrm{Imm}\, J^1_{(0,0)}(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^{n+m})$, obsahuje Jacobiho matice zobrazení f čtvercovou regulární podmatici řádu n. Grupu regulárních čtvercových matic řádu n nad $\mathcal{R}$ budeme standardně označovat $GL(n, \mathcal{R})$. Existuje bijekce faktorové množiny $M_{n,m+n}$ podle pravé akce této grupy na $G_{n,n+m}$: $M_{n,n+m}/GL(n, \mathcal{R}) \ni [Df(0)] \leftrightarrow [J^1_0 f] \in G_{n,n+m}$.

Hladká struktura na grassmaniánu prvního řádu

Definujme pro každou matici $A \in M_{n,n+m}$ n vektorů: $\vec{a_i} = (a_{ji}), 1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+m$ v $\mathcal{R}^{n+m}$. Vzhledem k maximální hodnosti matice jsou tyto vektory lineárně nezávislé, určují tedy n-rozměrný podprostor v $\mathcal{R}^{n+m}$. Matice $A, B \in M_{n,n+m}$ určují týž podprostor, jestliže existuje $G \in GL(n, \mathcal{R})$ tak, že $A = BG$. Třídu ekvivalence $[A] \in M_{n,n+m}/GL(n, \mathcal{R})$ můžeme chápat jako n-rozměrný podprostor v $\mathcal{R}^{n+m}$. $G_{n,n+m}$ je tedy možné kanonicky identifikovat s množinou všech n-rozměrných podprostorů $\mathcal{R}^{n+m}$.

K důkazu existence hladké struktury na grassmaniánu použijeme následující teorém:

Teorém: *Nechť $\mathcal{M}$je varieta a $\sim$ libovolná ekvivalence na $\mathcal{M}$. Na faktormnožině $\mathcal{M}/\sim$ existuje hladká struktura taková, že zobrazení $\iota : \mathcal{M} \ni x \to [x] \in \mathcal{M}/\sim$ je surjektivní submerze právě tehdy, když graf ekvivalence $\sim$ je uzavřená podvarieta $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Pokud hladká struktura s uvedenými vlastostmi existuje, je jediná.*

Důkaz: Viz například DIEUDONNÉ [2].

Nechť π je libovolná permutace množiny $\{1, \dots, n+m\}$. Pro každou matici $A \in M_{n,n+m}$ definujme:

$$A_\pi = (a_{\pi(i)j}) \ i = 1, ...n$$

$$\overline{A}_\pi = (a_{\pi(i)j}) \; i = n+1, ...n+m$$

dále označme:

$$M_{n,n+m} \supset T_\pi = \{A |\det A_\pi \neq 0\}$$

Věta 2.1.: *Na $G_{n,n+m}$ existuje hladká struktura s vlastnostmi uvedenými v přechozím teorému.*

Důkaz: Uvažme množinu $M_{n,n+m}$ s hladkou strukturou definovanou globálním souřadnicovým systémem $(M_{n,n+m}, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^{n(n+m)}}|_{M_{n,n+m}})$. Dokážeme, že graf ekvivalence $\sim$ definované na množině $M_{n,n+m}$ pravou akcí grupy $GL(n,\mathcal{R})$ je uzavřená podvarieta $M_{n,n+m} \times M_{n,n+m}$. Nechť π probíhá všechny permutace množiny indexů. Pro $A, B \in T_\pi$ přiřaďme každé dvojici (A_π, B) matici $\overline{B}_\pi(B_\pi)^{-1}A_\pi \in M_{n,m}$. Tím vzniká zobrazení

$$M_{n,m+n} \times GL(n,\mathcal{R}) \ni (B, A_\pi) \to \overline{B}_\pi(B_\pi)^{-1}A_\pi \in M^{max}_{n,m} \subset M_{n,m}\,,$$

kde $M^{max}_{n,m}$ je množina matic typu (n,m) s maximální hodností. Graf tohoto zobrazení je uzavřená podvarieta množiny $_{n,n+m} \times GL(n,\mathcal{R}) \times M_{n,m}$. Při kanonické identifikaci $GL(n,\mathcal{R}) \times M_{n,m} \to T_\pi$ tento graf přechází v průnik grafu naší ekvivalence s množinou $M_{n,n+m} \times T_\pi$. Jelikož množiny $M_{n,n+m} \times T_\pi$, $\pi \in S_{n+m}$, tvoří otevřené pokrytí množiny $M_{n,n+m} \times M_{n,n+m}$, je tento graf její uzavřenou podvarietou.

♡

Konstrukce atlasu

Pro $A \in T_{\mathrm{id}}$ zřejmě platí:

$$\begin{pmatrix} A_{\mathrm{id}} \\ \\ \overline{A}_{\mathrm{id}} \end{pmatrix} \left(A^{-1}_{\mathrm{id}}\right) = \begin{pmatrix} I \\ \\ \overline{A}_{\mathrm{id}}A^{-1}_{\mathrm{id}} \end{pmatrix}$$

kde I je jednotková matice. Výraz na pravé straně je *kanonický reprezentant třídy* $[A]$. Analogické vztahy platí pro ostatní permutace. Označme:

$$U_\pi = T_\pi / GL(n,\mathcal{R}) \subset G_{n,n+m}\,.$$

Definujme zobrazení:

$$\Phi_\pi : U_\pi \ni [A] \to \Phi_\pi([A]) = \overline{A}_\pi(A_\pi)^{-1} \in M_{n,m} \quad \text{a}$$

$$\varphi_\pi : U_\pi \ni [A] \to \varphi^{i,j}_\pi([A]) = (\Phi_\pi([A]))^i_j \in \mathcal{R}^{nm}\,,$$

kde $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Věta 2.2.: *Systém $\{(U_\pi, \varphi_\pi)\}$ je atlas na $G_{n,n+m}$.*

Důkaz: Množiny U_π tvoří otevřené pokrytí $G_{n,n+m}$, zobrazení φ_π jsou homeomorfismy $G_{n,n+m} \to \mathcal{R}^{m.n}$, zobrazení $\varphi_\nu \circ \varphi_\pi^{-1} : \varphi_\pi(U_\pi \cap U_\nu) \to \varphi_\nu(U_\pi \cap U_\nu)$ je difeomorfismus.

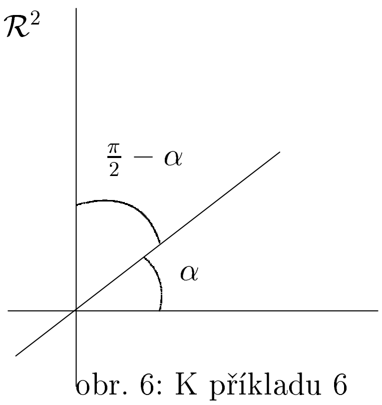
♡

Je zřejmé, že

$$\dim G_{n,n+m} = n.m$$

Příklad 5: $n = 1,\ m = 1$; $G_{1,2}$ je množina všech jednorozměrných podprostorů v $\mathcal{R}^2$. Pro $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}^2$ je

$$Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}f^1(0)}{\mathrm{d}x} \\ \\ \frac{\mathrm{d}f^2(0)}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix}.$$



obr. 6: K příkladu 6

$$T_{1,2} = \{ \ \binom{a}{b} \ |a \neq 0\}$$

$$T_{2,1} = \{ \ \binom{a}{b} \ |b \neq 0\}$$

$$\varphi_{1,2} = a^{-1}b = \left(\frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}x}\right)_0^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}x}\right)_0 = \tan\alpha$$

$$\varphi_{2,1} = b^{-1}a = \left(\frac{\mathrm{d}f^2}{\mathrm{d}x}\right)_0^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}x}\right)_0 = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

2.4 Konstrukce atlasu na $P_n^r\mathcal{Y}$

Věta 2.3.: *Pravá akce grupy L_n^r definuje na $\operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y}$ strukturu pravého hlavního L_n^r-prostoru.*

Důkaz: 1) Dokážeme, že graf ekvivalence, dané pravou akcí grupy L_n^r na $\operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y}$ je uzavřená podvarieta $\operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y} \times \operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y}$. Nechť S je množina všech permutací $(1,\ldots,n+m)$, pro $\pi \in S$ definujeme zobrazení $\tau_\pi : \mathcal{R}^{n+m} \to \mathcal{R}^n$ a zobrazení $\kappa_\pi : \mathcal{R}^{n+m} \to \mathcal{R}^m$ vztahem

$$\tau_\pi(x^1,\ldots,x^{n+m}) = (x^{\pi(1)},\ldots,x^{\pi(n)})\,, \tag{2.4}$$

$$\kappa_\pi(x^1,\ldots,x^{n+m}) = (x^{\pi(n+1)},\ldots,x^{\pi(n+m)})\,. \tag{2.5}$$

Nechť $\mathcal{A} = \{(\mathcal{V}_i,\psi_i),\ \psi_i = (y_i^\sigma)\}$, $\sigma = 1,\ldots,m+n; i \in I$, I je indexová množina, je atlas na $\mathcal{Y}$. Označme pro $y \in \mathcal{V}_i$

$$T_{\pi,y} = \{J_0^r f \in \operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y} | f(0) = y,\, J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f) \in \operatorname{Imm} J_{0,y}^r(\mathcal{R}^n,\mathcal{R}^n)\} \tag{2.6}$$

Je zřejmé, že buď $[J_0^r f] \subset T_{\pi,y}$, nebo $[J_0^r f] \cap T_{\pi,y} = \emptyset$. Nechť π probíhá všechny permutace indexů $1,\ldots,m$. Pro každé $y \in \mathcal{Y}$ a každé dva r-jety $J_0^r f, J_0^r g \in T_{\pi,y}$ přiřaďme dvojici $[J_0^r g, J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f)]$ r-jet $J_0^r(\kappa_\pi \circ \psi_i \circ g) \circ (J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ g))^{-1} \circ J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f) \in J_0^r(\mathcal{R}^n,\mathcal{R}^m)$. Tím vzniká zobrazení:

$$\begin{gathered}\operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y} \times \operatorname{Imm} J_0^r(\mathcal{R}^n,\mathcal{R}^n) \ni [J_0^r g, J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f)] \to \\ \to J_0^r(\kappa_\pi \circ \psi_i \circ g) \circ (J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ g))^{-1} \circ J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f) \in J_0^r(\mathcal{R}^n,\mathcal{R}^m)\end{gathered}$$

Každý bod grafu tohoto hladkého zobrazení reprezentovaný k-ticí souřadnic v euklidovském prostoru $\mathcal{R}^K$, kde $K = \dim\ \operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y} \times J_0^r(\mathcal{R}^n,\mathcal{R}^n) \times J_0^r(\mathcal{R}^n,\mathcal{R}^m) = \dim \operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y} \times \operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y}$ je současně bodem ekvivalence na $\operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y}$ dané pravou akcí grupy L_n^r chápané rovněž jako podmnožina prostoru $\mathcal{R}^K$

2) Dokážeme, že pravá akce grupy L_n^r je volná. Nechť $J_0^r\alpha \in L_n^r$ a nechť pro libovolný r-jet $J_0^r f \in \operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y}$ platí $J_0^r f \circ J_0^r\alpha = J_0^r f$, pak $J_0^r\alpha = J_0^r \mathrm{id}_{\mathcal{R}^n}$. Odtud plyne, že $J_0^r\alpha$ je jednotka grupy L_n^r.

♡

Definujme zobrazení

$$\rho_n^r :\ \operatorname{Imm} J^r(\mathcal{R}^n,\mathcal{Y}) \longrightarrow P_n^r\mathcal{Y}$$

předpisem

$$\rho_n^r(J_x^r f) = [J_0^r(f \circ tr_x)]\,, \tag{2.7}$$

kde tr_x je translace

$$tr_x : y \to y + x \tag{2.8}$$

Je zřejmé, že zúžení ρ_n^r na $\operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y}$ je faktorová projekce $\operatorname{Imm} T_n^r\mathcal{Y} \to P_n^r\mathcal{Y}$. $T_{\pi,y}$ resp. τ_π resp. κ_π jsou definovány vztahy (2.6) resp. (2.4) resp. (2.5) . Označme

$$U_\pi = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \rho_n^r(T_{\pi,y}) \tag{2.9}$$

$$\Phi_\pi : P_n^r \mathcal{Y} \ni [J_0^r f] \to \Phi_\pi [J_0^r f] =$$
$$= (J^r_{(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f(0))}(\kappa_\pi \circ \psi_i \circ f) \circ (J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f))^{-1} \in J^r(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^m), \quad f(0) \in \mathcal{V}_i \tag{2.10}$$

$$\varphi_\pi = \chi \circ \Phi_\pi \tag{2.11}$$

kde χ je kanonický systém souřadnic na $J^r(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^m)$.

Věta 2.4.: *Systém* $(U_\pi, \varphi_\pi), \pi \in S, y \in \mathcal{Y}$ *je hladký atlas na* $P_n^r \mathcal{Y}$.

Důkaz: Pro každé $J_0^r f \in \operatorname{Imm} T_n^r \mathcal{Y}$ existuje permutace $\pi \in S$ tak, že $J_0^r(\tau_\pi \circ \psi_i \circ f) \in J_0^r(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^n)$ (plyne z regulárnosti $J_0^r f$), tvoří tedy množiny U_π otevřené pokrytí $P_n^r \mathcal{Y}$. Zobrazení $\varphi_\pi \circ \varphi_\nu^{-1} : \varphi_\nu(\mathcal{U}_\nu \cap \mathcal{U}_\pi) \to \varphi_\pi(\mathcal{U}_\nu \cap \mathcal{U}_\pi)$ jsou difeomorfismy.

♡

Označme $(\mathcal{V}_i, \psi_i)$ souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$, pro který $y^\sigma \psi_{i,\pi} = y^{\pi(\sigma)} \psi_i$. Systém $(\mathcal{U}_\pi, \varphi_\pi)$ na $P_n^r \mathcal{Y}$ nazýváme *asociovaný* se systémem $(\mathcal{V}_i, \psi_{i,\pi})$ na $\mathcal{Y}$.
Poznámka: Pro další úvahy v následujících kapitolách je užitečné si uvědomit, že každý souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$ na $\mathcal{Y}$ definuje *lokální fibraci* v následujícím smyslu: Označme

$$p_n : \mathcal{V} \ni y \to p_n(y) = (y^1(y), \dots, y^n(y)) \in \mathcal{R}^n \tag{2.12}$$
$$p_n^{r,s} : P_n^r \mathcal{V} \ni [J_0^r f] \to p_n^{r,s}([J_0^r f]) = [J_0^s f] \in P_n^s \mathcal{Y}$$
$$p_n^{r,0} : P_n^r \mathcal{V} \ni [J_0^r f] \to p_n^{r,0}([J_0^r f]) = y \in \mathcal{Y},$$

Trojice $(\mathcal{V}, p_n, p_n(\mathcal{V}))$ tvoří fibrovanou varietu, resp. trojice $(P_n^r \mathcal{V}, p_n^r, p_n(\mathcal{V}))$ její r-jetové prodloužení (viz. Kapitola 3), kde $p_n^r = p_n \circ p_n^{r,0}$.

Věta 2.5.: *Platí* $\dim P_n^r \mathcal{Y} = m\binom{n+r}{n} + n$.

Důkaz: $\dim P_n^r \mathcal{Y} = \dim T_n^r \mathcal{Y} - \dim L_n^r = m + n + [\binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+r-1}{r}](m+n) - [\binom{n}{1} + \dots + \binom{n+r-1}{r}]n = (m+n)\binom{n+r}{n} - [n\binom{n+r}{n} - n] = m\binom{n+r}{n} + n = \dim J^r(\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^m)$
♡

Kapitola 3

Variační posloupnost na fibrovaných varietách

Tato kapitola shrnuje základní definice a výsledky získané v teorii variační posloupnosti na konečných jetových prodlouženích fibrovaných variet, která byla od doby svého zavedení v pracích KRUPKY (viz [8,9,11]) předmětem výzkumu zejména v oblasti mechaniky ([19,22,27]). Tyto výsledky umožňují pochopit význam variační posloupnosti pro formulaci a řešení variačních úloh a naznačují možnosti vybudování odpovídajícího teoretického aparátu i pro Grassmannovy fibrace.

3.1 Základní struktury

Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou diferencovatelné variety, $\dim \mathcal{X} = n, \dim \mathcal{Y} = m + n$, a nechť $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ je surjektivní submerze. Trojici $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ nazýváme *fibrovanou varietou*, $\mathcal{X}$ se nazývá *báze*, $\mathcal{Y}$ *totální prostor*, π je *projekce*. Nechť $(\mathcal{V}, \psi), \psi = (x^i, y^\sigma)$ je souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$. Pak $(\mathcal{U}, \varphi), \varphi = (x^i)$ je souřadnicový systém na $\mathcal{X}$ *asociovaný* s $(\mathcal{V}, \psi)$.

Příklad 1: Trojice $(P^r_n\mathcal{Y}, p^{r,s}_n, P^s_n\mathcal{Y}), r \geq s,$, kde $p^{r,s}_n$ je definováno vztahem

$$P^r_n\mathcal{Y} \ni [J^r_0 f] \to p^{r,s}_n([J^r_0 f]) = [J^s_0 f] \in P^s_n\mathcal{Y}$$

má strukturu fibrované variety. Specielně pro $(P^r_n, p^{r,0}_n, \mathcal{Y})$ je $p^{r,0}_n([J^r_0 f]) = f(0) \in \mathcal{Y}$.

Řezem fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ nazveme zobrazení $\gamma : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}, \mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, splňující vztah $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}_\mathcal{U}$. *$r$-jetem řezu γ v bodě x* nazveme třídu ekvivalence $J^r_x\gamma$ definované vztahem (2.1). Sjednocení všech r-jetů ve všech bodech báze a pro všechny možné řezy označíme $J^r\mathcal{Y}$. Definujeme zobrazení $\pi^r : J^r\mathcal{Y} \ni J^r_x\gamma \to x \in \mathcal{X}$. Toto zobrazení je surjektivní submerze. Trojice $(J^r\mathcal{Y}, \pi^r, \mathcal{X})$ se nazývá *r-té jetové prodloužení fibrované variety* $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Označme $N_r = \dim J^r\mathcal{Y}$. Označme dále:

$$\pi^{r,s} : J^r\mathcal{Y} \ni J^r_x\gamma \to J^s_x\gamma \in J^s\mathcal{Y}\,,$$

kde $r \geq s \geq 0$. V dalších kapitolách užíváme pojmů tečný vektor, forma, vektorové pole, tečné zobrazení, pullback, kontrakce formy vektorovým polem, vnější derivace, Lieova derivace, atd., jejichž definice lze najít v běžných učebnicích, např. [23,26].

3.2 Horizontální a kontaktní formy

V této kapitole popíšeme základní vlastnosti kontaktních forem na r-jetovém prodloužení fibrované variety, v souhlasu s [9,10,11]. Nechť $\dim \mathcal{X} = n$. Každému tečnému vektoru $\xi \in TJ^{r+1}\mathcal{Y}$ v bodě $J^{r+1}_x\gamma \in J^{r+1}\mathcal{Y}$ můžeme přiřadit tečný vektor $h\xi \in TJ^r\mathcal{Y}$ v bodě $J^r_x\gamma = \pi^{r+1,r}(J^{r+1}_x\gamma) \in J^r\mathcal{Y}$ následujícím způsobem:

$$h\xi \,=\, T_xJ^r\gamma \circ T\pi^{r+1} \cdot \xi\,.$$

Zobrazení $h : TJ^{r+1}\mathcal{Y} \to TJ^r\mathcal{Y}$ definované tímto vztahem nazývame *horizontalizace*. Tečný vektor $h\xi$ je π^r*–horizontální* a nazveme ho *horizontální složkou* ξ. Tečný vektor ξ je π^{r+1}*–vertikální* právě tehdy, když $h\xi = 0$. Každému tečnému vektoru $\xi \in TJ^{r+1}\mathcal{Y}$ v bodě $J^{r+1}_x\gamma \in J^{r+1}\mathcal{Y}$ můžeme přiřadit tečný vektor $p\xi \in TJ^r\mathcal{Y}$ v bodě $J^r_x\gamma \in J^r\mathcal{Y}$ vztahem

$$T\pi^{r+1,r} \cdot \xi \,=\, h\xi \,+\, p\xi\,,$$

$p\xi$ je π^r–vertikální vektor; ξ je $\pi^{r+1,r}$*–vertikální* právě tehdy, když $h\xi = 0, p\xi = 0$. Nechť $\xi \in TJ^{r+1}\mathcal{Y}$ je tečný vektor v bodě $J^{r+1}_x\gamma \in J^{r+1}\mathcal{Y}$, a $(\mathcal{V},\psi), \psi = (x^i, y^\sigma)$ je fibrovaný souřadnicový systém v bodě $y = \gamma(x) \in \mathcal{V}$. Jestliže ξ má tvar

$$\xi \,=\, \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} \,+\, \xi^\sigma_I\frac{\partial}{\partial y^\sigma_I}\,,$$

se sčítáním přes všechny multiindexy $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k, 0 \leq k \leq r$, pak

$$h\xi = \xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^\sigma_{Ii}\frac{\partial}{\partial y^\sigma_I}\right)\,,\, p\xi = (\xi^\sigma_I - y^\sigma_{Ii}\xi^i)\frac{\partial}{\partial y^\sigma_I}\,,$$

Nechť pro každou otevřenou množinu $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ je $\Omega^r_0\mathcal{W}$ okruh hladkých funkcí na $\mathcal{W}^r = (\pi^{r,0})^{-1}(\mathcal{W}) \subset J^r\mathcal{Y}$, $\Omega^r_0\mathcal{W}$–modul hladkých diferenciálních k–forem na $\mathcal{W}^r$ značíme $\Omega^r_k\mathcal{W}$. Nechť $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ je otevřená množina. Horizontalizace $h : TJ^{r+1}\mathcal{Y} \to TJ^r\mathcal{Y}$ indukuje rozklad každého z modulů k-forem v následujícím smyslu: Nechť $\varrho \in \Omega^r_k\mathcal{W}$, $k \geq 1$ a nechť $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ jsou tečné vektory k $J^{r+1}\mathcal{Y}$ v bodě $J^{r+1}_x\gamma \in \mathcal{W}^{r+1}$. Rozložme každý z těchto vektorů na horizontkání a vertikální složku podle přčedchoizích vztahů. Lze ukázat (viz [10]), že existuje jednoznačný rozklad formy ϱ ve tvaru

$$(\pi^{r+1,r})^*\varrho \,=\, \sum_{q=0}^{k} p_q\varrho\,, \quad \text{kde}$$

$$p_q\varrho(J^{r+1}_x\gamma)(\xi_1, \xi_2, .., \xi_k) = \frac{1}{(k-q)!q!}\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_k}\varrho(J^r_x\gamma)(h\xi_{i_1}, .., h\xi_{i_{q-k}}, p\xi_{i_{k-q+1}}, .., p\xi_{i_k})$$

$\varepsilon^{i_1\dots i_k}$ je zobecněný Levi–Civitův symbol. Specielně $p_k\varrho(J^{r+1}_x\gamma)(\xi_1,\dots,\xi_k) = \varrho(J^r_x\gamma)(p\xi_1,\dots,p\xi_k)$.) Je evidentní, že pro $k > n$ je $p_q\varrho = 0$ pro $0 \le q \le k-n-1$. Pro každou funkci $f \in \Omega^r_0\mathcal{W}$ platí

$$p_q(f\varrho) = (\pi^{r+1,r})^* f \cdot p_q\varrho\,,\ 0 \le q \le k\,.$$

Forma $p_q\varrho$ se nazývá q–*kontaktní komponenta* formy ϱ. Jestliže $(\pi^{r+1,r})^* = \sum_{s=q}^k p_s\varrho$ pro nějaké q, $0 \le q \le k$, např. $p_0\varrho = \dots = p_{q-1}\varrho = 0$, forma ϱ se nazývá q–*kontaktní*. Číslu q říkáme *řád kontaktnosti*. Jestliže $(\pi^{r+1,r})^*\varrho = p_q\varrho$, říkáme, že ϱ je *ryze q-kontaktní forma*. 0–kontaktní složka formy se nazývá *horizontální složka* a je označována $h\varrho$. Forma $p\varrho = \sum_{q=1}^k p_q\varrho$ se nazývá se *kontaktní složka* formy. Platí

$$(\pi^{r+1,r})^*\varrho = h\varrho + p\varrho\,.$$

Formu nazýváme π^r–*horizontální* nebo *kontaktní*, jestliže $(\pi^{r+1,r})^*\varrho = h\varrho$ (t.j. $p\varrho = 0$), nebo $(\pi^{r+1,r})^*\varrho = p\varrho$ (t.j. $h\varrho = 0$). Pro $k > n$ je každá k–forma kontaktní. Buď $k > n$. Forma ϱ, pro kterou $p_{k-n}\varrho = 0$, se nazývá *ostře kontaktní*. Nechť $f : \mathcal{W}^r \to \mathcal{R}$ je funkce. Definujeme

$$hf = (\pi^{r+1,r})^* f\,.$$

Pro každý fibrovaný souřadnicový systém $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$, platí

$$h\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}x^i\,,\ p\mathrm{d}x^i = 0\,,\ h\mathrm{d}y^\sigma_I = y^\sigma_{Ii}\mathrm{d}x^i\,,\ p\mathrm{d}y^\sigma_{Ii} = (\pi^{r+1,r})^*\mathrm{d}y^\sigma_I - y^\sigma_{Ii}\mathrm{d}x^i = \omega^\sigma_I\,.$$

Pro $\dim\mathcal{X} = 1$ má rozklad k–formy ϱ na její kontaktní složky tvar:

$$(\pi^{r+1,r})^*\varrho = p_{k-1}\varrho + p_k\varrho\,.$$

Označme

$$\omega^{\sigma_j}_{I_j} = \mathrm{d}y^{\sigma_j}_{I_j} - y^{\sigma_j}_{I_j i_j}\mathrm{d}x^{i_j}$$

Následující tvrzení popisuje souřadnicové vyjádření kontaktních složek diferenciálních forem.

Věta 3.1. *Nechť $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$, je fibrovaný souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ a nechť forma $\varrho \in \Omega^r_k\mathcal{V}$ má souřadnicové vyjádření*

$$\varrho = \sum_{l=0}^k A^{I_1}_{\sigma_1}\cdots^{I_l}_{\sigma_l, i_{l+1}\dots i_k}\,\mathrm{d}y^{\sigma_1}_{I_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}y^{\sigma_l}_{I_l}\wedge\mathrm{d}x^{i_{l+1}}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$$

kde koeficienty $A^{I_1}_{\sigma_1}\cdots^{I_l}_{\sigma_l, i_{l+1}\dots i_k}$, $1 \le l \le k$, jsou antisymetrické v indexech $i_{l+1},\dots,i_k$ a multiindexech $\binom{I_1}{\sigma_1},\dots,\binom{I_l}{\sigma_l}$, a symetrické ve všech indexech každého multiindexu I_j, $1 \le j \le l$. Pak

$$p_q\varrho = \sum_{p=q}^k \binom{p}{q}\left[A^{I_1}_{\sigma_1}\cdots^{I_p}_{\sigma_p, i_{p+1}\dots i_k}\,y^{\sigma_{q+1}}_{I_{q+1}i_{q+1}}\cdots y^{\sigma_p}_{I_p i_p}\right]_{(i_{q+1}\dots i_k)}\omega^{\sigma_1}_{I_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_q}_{I_q}\wedge\mathrm{d}x^{i_{q+1}}\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\,,$$

kde $[\dots]_{(i_{q+1}\dots,i_k)}$ *značí antisymmetrizaci v indexech* $i_{q+1},\dots,i_k$.

Důkaz: Užijeme vztahů $(\pi^{r+1,r})^*\mathrm{d}y^{\sigma_j}_{I_j} = \omega^{\sigma_j}_{I_j} + y^{\sigma_j}_{I_j i_j}\mathrm{d}x^{i_j}$ a skutečnosti, že pro pevné l platí

$$A^{I_1}_{\sigma_1}\cdots^{I_l}_{\sigma_l,i_{l+1}\dots i_k}(\omega^{\sigma_1}_{I_1} + y^{\sigma_1}_{I_1 i_1}\mathrm{d}x^{i_1})\wedge\dots\wedge(\omega^{\sigma_l}_{I_l} + y^{\sigma_l}_{I_l i_l}\mathrm{d}x^{i_l})\wedge\mathrm{d}x^{i_{l+1}}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k} =$$

$$= \sum_{s=0}^{l}\binom{l}{s}A^{I_1}_{\sigma_1}\cdots^{I_s}_{\sigma_s}\cdots^{I_l}_{\sigma_l,i_{l+1}\dots i_k}\, y^{\sigma_{s+1}}_{I_{s+1}i_{s+1}}\dots y^{\sigma_l}_{I_l i_l}\omega^{\sigma_1}_{I_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_s}_{I_s}\wedge\mathrm{d}x^{i_{s+1}}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}\,.$$

Po sečtení a antisymetrizaci máme požadovaný výsledek ♡

Následující věty jsou užitečné pro praktické výpočty.

Důsledek 1. *Jestliže* $f\in\Omega^r_0\mathcal{V}$, *pak* $(\pi^{r+1,r})^*f = h\mathrm{d}f + p\mathrm{d}f$, *kde* $h\mathrm{d}f = \mathrm{d}_i f\mathrm{d}x^i$, $p\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial y^\sigma_I}\omega^\sigma_I$, $0\le\mid I\mid\le r$.
Výraz $\mathrm{d}_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial y^\sigma_I}y^\sigma_{Ii}$ je *úplná derivace* funkce f vzhledem k proměnné x^i.

Důsledek 2. *k–forma ϱ v mechanice je k–kontaktní právě tehdy, když*

$$\varrho = A^{j_1}_{\sigma_1}\cdots^{j_k}_{\sigma_k}\,\omega^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_k}_{j_k}\,,$$

kde $0\le j_s\le r-1$ *a* $A^{j_1}_{\sigma_1}\cdots^{j_k}_{\sigma_k}\in\Omega^r_0\mathcal{V}$. *Forma je ryze $(k-1)$–kontaktní právě tehdy, když*

$$\varrho = B^{j_1}_{\sigma_1}\cdots^{j_{k-1}}_{\sigma_{k-1}}\,\mathrm{d}y^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}y^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}\wedge\mathrm{d}t\,,\; B^{j_1}_{\sigma_1}\cdots^{j_{k-1}}_{\sigma_{k-1}}\in\Omega^r_0\mathcal{V}\,.$$

Následující věta dává jiné užitečné vyjádření pro kontaktní formy.

Věta 3.2. *Nechť $\mathcal{W}\subset\mathcal{Y}$ je otevřená množina a $(\mathcal{V},\psi)$ fibrovaný souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ pro který $\mathcal{V}\subset\mathcal{W}$. Pro libovolnou formu $\varrho\in\Omega^r_k\mathcal{W}$ platí*
(a) Jestliže $k=1$, pak ϱ je kontaktní na $\mathcal{V}^r$ právě tehdy, když má tvar

$$\varrho\;=\;\Phi^J_\sigma\omega^\sigma_J\,,$$

kde $\Phi^J_\sigma\in\Omega^r_0\mathcal{V}$ *a* $0\le|J|\le r-1$.
(b) Jestliže $2\le k\le n$, pak ϱ je kontaktní na $\mathcal{V}^r$ právě tehdy, když má tvar

$$\varrho = \omega^\sigma_J\wedge\Phi^J_\sigma + \mathrm{d}\omega^\sigma_I\wedge\Psi^I_\sigma\,,$$

kde $\Phi^J_\sigma\in\Omega^r_{k-1}\mathcal{V}$, $\Psi^I_\sigma\in\Omega^r_{k-2}\mathcal{V}$ *a* $0\le|J|\le r-1$, $|I| = r-1$.
(c) Jestliže $n+1\le k\le N_r$, pak ϱ je ostře kontaktní na $\mathcal{V}^r$ právě tehdy, když má tvar

$$\varrho = \omega^{\sigma_1}_{J_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_p}_{J_p}\wedge\mathrm{d}\omega^{\sigma_{p+1}}_{I_{p+1}}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}\omega^{\sigma_{p+s}}_{I_{p+s}}\wedge\Phi^{J_1}_{\sigma_1}\cdots^{J_p I_{p+1}}_{\sigma_p\sigma_{p+1}}\cdots^{I_{p+s}}_{\sigma_{p+s}}\,,$$

kde $\Phi^{J_1}_{\sigma_1}\cdots^{J_p I_{p+1}}_{\sigma_p\sigma_{p+1}}\cdots^{I_{p+s}}_{\sigma_{p+s}}\in\Omega^r_{k-p-2s}\mathcal{V}$, $0\le|J_l|\le r-1$, $1\le l\le r$, $|I_j| = r-1$, $p+1\le j\le p+s$, *a sčítá se přes všechna p a s pro která $p+s\ge k-n+1$, $p+2s\le k$.*

Důkaz: viz např. [10].

Pro zavedení variační posloupnosti potřebujeme znát vlastnosti vnější derivace kontaktních forem. Některé okamžitě plynou z věty 3.2:

Důsledek 3.: *Nechť $\varrho \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ je kontaktní forma a $1 \le k \le n-1$. Pak $\mathrm{d}\varrho$ je kontaktní. Nechť $\varrho \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ je kontaktní forma pro $k = n$ resp. ostře kontaktní forma pro $n+1 \le k \le N_r - 1$. Nechť je dále tvaru (c) kde $p + s > k - n + 1$. Pak $\mathrm{d}\varrho$ je ostře kontaktní.*

3.3 Projektabilní a rozložitelné formy

V této kapitole shrneme výrazy pro rozklad forem. Nechť $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ je otevřená množina. Formu $\varrho \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ nazýváme $\pi^{r,s}$*–projektabilní*, $r \ge s \ge 0$, jestliže existuje a forma $\eta \in \Omega_k^s\mathcal{W}$ taková, že $\varrho = (\pi^{r,s})^*\eta$. Říkáme, že forma $\varrho \in \Omega_k^r\mathcal{W}$, $1 \le k \le n$, je *rozložitelná* jestliže může být vyjádřena součtem $\varrho = H\varrho + C\varrho$, kde ϱ je π^r–horizontální a $C\varrho$ je kontaktní. Forma $\varrho \in \Omega_k^r\mathcal{W}$, $n+1 \le k \le N_r$, se nazývá *rozložitelná* jestliže ji lze vyjádřit jako $\varrho = C_1\varrho + C_2\varrho$, kde $C_1\varrho$ je ryze $(k-n)$–kontaktní forma a $C_2\varrho$ je ostře kontaktní forma. Je zřejmé, že k–forma ϱ je rozložitelná právě tehdy, když její horizontální (resp. $(k-n)$–kontaktní) komponenta je $(\pi^{r+1,r})^*$–projektabilní pro $1 \le k \le n$, (resp. $n+1 \le k \le N_r$). Zmíněný rozklad je jednoznačný. Jako přímý důsledek věty 3.2. můžeme vyslovit následující kritérium rozložitelnosti:

Věta 3.3. *Nechť $\varrho \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ a nechť $(\mathcal{V}, \psi), \psi = (x^i, y^\sigma)$ je fibrovaný souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ takový, že $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.*
(a) Nechť $k = 1$. Pak ϱ je rozložitelná právě tehdy, když

$$\varrho = H_i \mathrm{d}x^i + P_\sigma^J \omega_J^\sigma$$

pro jisté funkce $H_i, P_\sigma^J \in \Omega_0^r\mathcal{V}$, $0 \le |J| \le r-1$.
(b) Nechť $2 \le k \le n$. Pak ϱ je rozložitelná právě tehdy, když

$$\varrho = H_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} + \omega_J^\sigma \wedge \Phi_\sigma^J + \mathrm{d}\omega_I^\sigma \wedge \Psi_\sigma^I$$

pro jisté funkce $H_{i_1,\dots i_k} \in \Omega_0^r\mathcal{V}$ a formy $\Phi_\sigma^J \in \Omega_{k-1}^r\mathcal{V}$, $\Psi_\sigma^I \in \Omega_{k-2}^r\mathcal{V}$, $0 \le |J| \le r-1$, $|I| = r-1$.
(c) Nechť $n+1 \le k \le N_r$. Pak ϱ je rozložitelná právě tehdy, když

$$\varrho = \mathcal{H}_{i_1 \dots i_n} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_n} + \omega_{J_1}^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge \omega_{J_p}^{\sigma_p} \wedge \mathrm{d}\omega_{I_{p+1}}^{\sigma_{p+1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}\omega^{\sigma_{p+s}} \wedge \Phi_{\sigma_1}^{J_1}, \dots {}_{\sigma_p \sigma_{p+1}}^{J_p I_{p+1}} \dots {}_{\sigma_{p+s}}^{I_{p+s}}$$

pro jisté formy $\mathcal{H}_{i_1 \dots i_n} \in \Omega_{k-n}^r\mathcal{V}$ a $\Phi_{\sigma_1}^{J_1}, \dots {}_{\sigma_p \sigma_{p+1}}^{J_p I_{p+1}} \dots {}_{\sigma_{p+s}}^{I_{p+s}} \in \Omega_{k-p-2s}^r\mathcal{V}$, $0 \le |J_l| \le r-1$, $1 \le l \le p, |I_j| = r-1$, $p+1 \le j \le p+s$. Součet probíhá přes všechna taková p a s, pro která $k - n + 1 \le p + s$ a $p + 2s \le k$.

Následující zápis formy ϱ v bázi generované generovaný formami $dx^i, \omega^\sigma_J, dy^\sigma_I$, kde $0 \leq |J| \leq r-1$, $|I| = r$, ukazuje zdroje nerozložitelnosti. Nechť $\varrho \in \Omega^r_k \mathcal{W}$ pro nějakou otevřenou množinu $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$. Buď $(\mathcal{V}, \psi), \psi = (x^i, y^\sigma)$ souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ takový, že $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Pak na $\mathcal{V}^r$ lze formu ϱ rozložit takto:

$$\varrho = H\varrho + P\varrho + B\varrho\,,\; P\varrho = P_1\varrho + P_2\varrho\,,$$

kde

$$H\varrho = H_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\,,$$

$$P_1\varrho = \sum_{s=k-n-p}^{k-p} \sum_{p=1}^{k-n} B^{J_1}_{\sigma_1} \cdots {}^{J_p I_{p+1}}_{\sigma_p \sigma_{p+1}} \cdots {}^{I_{p+s}}_{\sigma_{p+s}\,, i_{p+s+1} \dots i_k}\, \omega^{\sigma_1}_{J_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma_p}_{J_p} \wedge dy^{\sigma_{p+1}}_{I_{p+1}} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_{p+s}}_{I_{p+s}} \wedge$$

$$\wedge dx^{i_{p+s+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\,,$$

$$P_2\varrho = \sum_{s=0}^{k-p} \sum_{p=k-n+1}^{k} B^{J_1}_{\sigma_1} \cdots {}^{J_p I_{p+1}}_{\sigma_p \sigma_{p+1}} \cdots {}^{I_{p+s}}_{\sigma_{p+s}\,, i_{p+s+1} \dots i_k}\, \omega^{\sigma_1}_{J_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma_p}_{J_p} \wedge dy^{\sigma_{p+1}}_{I_{p+1}} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_{p+s}}_{I_{p+s}} \wedge$$

$$\wedge dx^{i_{p+s+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\,,$$

$$B\varrho = \sum_{p=k-n}^{k} B^{I_1}_{\sigma_1} \cdots {}^{I_p}_{\sigma_p, i_{p+1} \dots i_k}\, dy^{\sigma_1}_{I_1} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_p}_{I_p} \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\,,$$

kde $0 \leq |J_l| \leq r-1$, $1 \leq l \leq p$, $|I_j| = r$, $p \leq j \leq p+s$. Funkce $H_{i_1 \dots i_k} \in \Omega^r_0 \mathcal{V}$ jsou úplně antisymetrické v indexech $i_1, \dots, i_k$, funkce $B^{J_1}_{\sigma_1} \cdots {}^{J_p I_{p+1}}_{\sigma_p \sigma_{p+1}} \cdots {}^{I_{p+s}}_{\sigma_{p+s}, i_{p+s+1} \dots i_k}$ $\in \Omega^r_0 \mathcal{V}$ jsou úplně antisymetrické v souborech multiindexů $\binom{J_1}{\sigma_1}, \dots, \binom{J_p}{\sigma_p}$, a $\binom{I_{p+1}}{\sigma_{p+1}}, \dots, \binom{I_{p+s}}{\sigma_{p+s}}$, a také v indexech $i_{p+s+1}, \dots, i_k$. Rozklad je jednoznačný.

V mechanice, jako speciálním případě, máme například následující rozklady:

- $k = 1 : \varrho = H dt + B^j_\sigma \omega^\sigma_j + B^r_\sigma dy^\sigma_r$, kde $0 \leq j \leq r-1$ a $H, B^j_\sigma, B^r_\sigma \in \Omega^r_0 \mathcal{V}$,
- $k = 2 : \varrho = B^j_\sigma \omega^\sigma_j \wedge dt + B^r_\sigma dy^\sigma_r \wedge dt + B^{jl}_{\sigma\nu} \omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_l + B^{jr}_{\sigma\nu} \omega^\sigma_j \wedge dy^\nu_r + B^{rr}_{\sigma\nu} dy^\sigma_r \wedge dy^\nu_r$, kde $0 \leq j, l \leq r-1$ a $H, B^j_\sigma, B^r_\sigma, B^{jl}_{\sigma\nu}, B^{jr}_{\sigma\nu}, B^{rr}_{\sigma\nu} \in \Omega^r_0$, $B^{jl}_{\sigma\nu} + B^{lj}_{\nu\sigma} = 0$, $B^{rr}_{\sigma\nu} + B^{rr}_{\nu\sigma} = 0$.

Je zřejmé, že pro $1 \leq k \leq n$ je forma $\varrho \in \Omega^r_k \mathcal{W}$ rozložitelná právě tehdy, když $B\varrho$ je kontaktní. Pro $n+1 \leq k \leq N_r$ je forma $\varrho \in \Omega^r_k \mathcal{W}$ rozložitelná právě tehdy, když $B\varrho + P_1\varrho$ je ostře kontaktní. Forma ϱ je horizontální právě tehdy, když $\varrho = H\varrho$. Forma ϱ je kontaktní právě tehdy, když $\varrho = P\varrho + B\varrho$.

3.4 Variační posloupnost v mechanice

Připomeňme, že pro mechaniku, tj. pro $n = 1$, je $N = m(r+1) + 1 = \dim J^r \mathcal{Y}$ a označme $P = mr + 1$ index poslední netriviální podgrupy Θ^r_P. Uvažujme známou *De Rhamovu posloupnost*

$$0 \to \mathcal{R} \to \Omega^r_0 \to \Omega^r_1 \to \dots \to \Omega^r_N \to 0\,. \tag{3.1}$$

První dvě šipky reprezentují kanonickou injekci a následující značí vnější derivaci d. Posloupnost je exaktní. Nechť $\varrho \in \Theta^r_k\mathcal{V}$. Existuje jednoznačný rozklad $\varrho = \varrho_0 + \mathrm{d}\varrho'$, $\varrho_0 \in \Omega^r_{k,c}$, $\varrho' \in \Omega^r_{k-1,c}$. Je tedy zřejmé, že podposloupnost

$$0 \to \Theta^r_1 \to \Theta^r_2 \to \ldots \to \Theta^r_P \to 0 \tag{3.2}$$

De Rhamovy posloupnosti (3.3) je také exaktní, první šipka reprezentuje kanonickou injekci a všechny zbývající reprezentují vnější derivaci. Odpovídající faktorová posloupnost

$$0 \to \mathcal{R} \to \Omega^r_0 \to \Omega^r_1/\Theta^r_1 \to \ldots \to \Omega^r_P/\Theta^r_P \to \Omega^r_{P+1} \to \ldots \to \Omega^r_N \to 0 \tag{3.3}$$

je rovněž exaktní. Tato faktorová posloupnost se nazývá se *variační posloupnost $r-$tého řádu. Faktorová zobrazení*

$$E^r_k : \Omega^r_k/\Theta^r_k \ni [\varrho] \to E^r_k([\varrho]) \in \Omega^r_{k+1}/\Theta^r_{k+1}$$

pro $1 \le k \le N_r$ a $E^r_0 : \Omega^r_0 \ni f \to E^r_0(f) \in \Omega^r_1/\Theta^r_1$ jsou definována vztahem

$$E^r_k([\varrho]) = [\mathrm{d}\varrho] \ , \tag{3.4}$$

kde $[\varrho]$ značí třídu formy ϱ. Následující diagram ukazuje kompletní schema variační posloupnosti

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & & & \\
 & & 0 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \Theta^r_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & \Theta^r_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d_{P-1}"] & \Theta^r_P \arrow[r, "d"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{R} \arrow[r] & \Omega^r_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, "E^r_0"] & \Omega^r_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "F^r_1"] & \Omega^r_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "F^r_2"] & \cdots \arrow[r, "d_{P-1}"] & \Omega^r_P \arrow[r, "d_P"] \arrow[d, "F^r_P"] & \Omega^r_{P+1} \arrow[r, "d_{P+1}"] & \cdots \arrow[r, "d_N"] & \Omega^r_N \arrow[r] & 0 \\
 & & & \Omega^r_1/\Theta^r_1 \arrow[r, "E^r_1"] \arrow[d] & \Omega^r_2/\Theta^r_2 \arrow[r, "E^r_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "E^r_{P-1}"] & \Omega^r_P/\Theta^r_P \arrow[ur, "E^r_P"] \arrow[d] & & & & \\
 & & & 0 & 0 & & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

3.5 Reprezentace variační posloupnosti

V tomto odstavci jsou využity výsledky práce [23]. Dvě formy ϱ, $\omega \in \Omega_k^r$ nazýváme *ekvivalentní* (píšeme $\varrho \sim \omega$) jestliže $\varrho - \omega \in \Theta_k^r$. relace $\sim$ je ekvivalence na množině Ω_k^r. Odpovídající rozklad definuje faktorovou grupu Ω_k^r/Θ_k^r grupy Ω_k^r vzhledem k normální podgrupě Θ_k^r. Zavedeme následující pojmy: *třída generovaná formou* ϱ je $[\varrho] = \{\omega \in \Omega_k^r \,|\, \omega \sim \varrho\}$, *reprezentant třídy* $[\varrho]$ je libovolná forma $\omega \in [\varrho]$. Zobrazení $F_k^r : \Omega_k^r \ni \varrho \longrightarrow F_k^r(\varrho) = [\varrho] \in \Omega_k^r/\Theta_k^r$ se nazývá *faktorizace*. Každé zobrazení $\Phi_k^r : \Omega_k^r/\Theta_k^r \ni [\varrho] \longrightarrow \varrho_0 \in [\varrho] \subset \Omega_k^r$ které přiřazuje každé třídě $[\varrho]$ nějakého jejího representanta se nazývá *reprezentace* faktorové grupy $\Omega_k^r\mathcal{V}/\Theta_k^r\mathcal{V}$. Reprezentace samozřejmě není jednoznačná. Každá reprezentace je injektivní.
Formy $\varrho \in \Omega_k^r$ a $\omega \in \Omega_k^{r'}$ se nazývají *ekvivalentní v zobecněném smyslu*, jestliže existuje číslo $s \geq r, r'$ pro které $(\pi^{s,r})^*\varrho - (\pi^{s,r'})^*\omega \in \Theta_k^s$. Pak píšeme $\varrho \approx \omega$. Je zřejmé, že formy ϱ a ω pro které $\varrho \sim \omega$ jsou ekvivalentní i v zobecněném smyslu. Nechť $\varrho \approx \omega$, tj. $(\pi^{s,r})^*\varrho - (\pi^{s,r'})^*\omega \in \Omega_k^s$. Pak ϱ a ω jsou ekvivalentní v obvyklém smyslu na $Omega_k^s$. Můžeme definovat odpovídající faktorovou grupu Ω_k^s/Θ_k^s, ve které pracujeme s třídami $[\varrho]$ generovanými formami $\varrho \in (\pi^{s,r})^*(\Omega_k^r)$, tj. s $\pi^{s,r}-$projektabilními formami. Pojem *zobecněné reprezentace* je spojen se zobecněnou ekvivalencí. Nechť r je přirozené číslo. Každé zobrazení $\overline{\Phi}_k^{s,r} : \Omega_k^r/\Theta_k^r \ni [\varrho] \longrightarrow \overline{\Phi}_k^{s,r}([\varrho]) = \varrho_0 \in \Omega_k^s$, definované vztahem $\varrho_0 \approx \omega$ pro každé $\omega \in [\varrho]$ se nazývá *zobecněná reprezentace* faktorové grupy Ω_k^r/Θ_k^r. Každá zobecněná reprezentace je rovněž injektivní. Následující věta zaručuje možnost konstruovat zobecněné reprezentace z obvyklých jednoznačně definovaným způsobem. Věta ukazuje, že $\pi^{r+1,r}-$projektabilita součtu $\varrho = \vartheta_c + \mathrm{d}\theta_c \in \theta_k^{r+1}$, kde $\vartheta_c \in \Omega_{k,c}^{r+1}$ a $\theta_c \in \Omega_{k-1,c}^{r+1}$ implikuje $\pi^{r+1,r}-$projektabilitu obou forem ϑ_c a θ_c:

Věta 3.4. *Nechť $\varrho \in \Theta_k^{r+1}$ je $\pi^{r+1,r}-$projektabilní, tj. tvaru $\varrho = (\pi^{r+1,r})^*\eta$. Pak $\eta \in \Theta_k^r$.*

Důkaz: viz např. [9]

Věta 3.4. má významné důsledky: Vezměme v úvahu diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Theta_k^{r+1} \arrow[r, "\iota_k^{r+1}"] & \Omega_k^{r+1} \arrow[r, "F_k^{r+1}"] & \Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta_k^r \arrow[r, "\iota_k^r"'] \arrow[u, "(\pi^{r+1,r})^*"] & \Omega_k^r \arrow[r, "F_k^r"'] \arrow[u, "(\pi^{r+1,r})^*"] & \Omega_k^r/\Theta_k^r \arrow[r] \arrow[u, "Q_k^{r,r+1}"] & 0
\end{tikzcd}$$

ve kterém ι_k^{r+1}, ι_k^r jsou kanonické injekce, F_k^{r+1}, F_k^r jsou faktorizace a $Q_k^{r,r+1}$ je faktorové zobrazení definované následovně:

$$Q_k^{r,r+1} : \Omega_k^r/\Theta_k^r \ni [\varrho] \longrightarrow Q_k^{r,r+1}([\varrho]) \in \Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1} ,$$

$$Q_k^{r,r+1}[\varrho] = F_k^{r+1}((\pi^{r+1,r})^*\varrho) = [(\pi^{r+1,r})^*\varrho] \Leftrightarrow [\varrho] = F_k^r(\varrho) ,$$

$$Q_k^{r,r+1} \circ F_k^r \ = \ F_k^{r+1} \circ (\pi^{r+1,r})^* \ \ .$$

Důsledek 4. *Faktorové zobrazení $Q_k^{r,r+1}$ je injektivní.*

Důkaz: Protože zobrazení $Q_k^{r,r+1}$ je lineární, postačí dokázat, že $\operatorname{Ker} Q_k^{r,r+1} = 0_{\Omega_k^r/\Theta_k^r} = \Theta_k^r$. Nechť $Q_k^{r,r+1}([\varrho]) = 0_{\Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1}} = \Theta_k^r$. Pak $[(\pi^{r+1,r})^*\varrho] = F_k^{r+1} \circ (\pi^{r+1,r})^*\varrho = Q_k^{r,r+1} \circ F_k^r(\varrho) = Q_k^{r,r+1}([\varrho]) = 0_{\Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1}} = \Theta_k^{r+1}$. Tedy $\varrho \in \Theta_k^r$. ♡

Analogicky můžeme definovat zobrazení $Q^{r,s} : \Omega_k^r/\Theta_k^r \ni [\varrho] \longrightarrow Q_k^{r,s}([\varrho]) = [(\pi^{s,r})^*\varrho] \in \Omega_k^s/\Theta_k^s$, např. $Q_k^{r,s} \circ F_k^r = F_k^s \circ (\pi^{s,r})^*$, které je injektivní.

Následující tvrzení je přímým důsledkem injektivity zobrazení Φ_k^r a důsledku 4.

Důsledek 5. *Nechť (Φ_k^r) je množina reprezentací faktorové grupy Ω_k^r/Θ_k^r. Označme*

$$\overline{\Phi}_k^{s,r} : \Omega_k^r/\Theta_k^r \ni [\varrho] \to \overline{\Phi}_k^{s,r}([\varrho]) = \Phi_k^r \circ Q_k^{r,s}([\varrho]) \in \Omega_k^s .$$

Pak každé zobrazení $\overline{\Phi}_k^{s,r}$ je zobecněnou reprezentací faktorové grupy Ω_k^r/Θ_k^r.

Situaci ilustruje následující diagram.

$$\overline{F}_k^{s,r} = \overline{\Phi}_k^{s,r} \circ F_k^r \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Theta_k^r \arrow[r, "F_k^r"] \arrow[d, "\overline{F}_k^{s,r}"'] & \Omega_k^r \arrow[r] & \Omega_k^r/\Theta_k^r \arrow[r] & 0 \\ & \Omega_k^s & \overline{\Phi}_k^{s,r} & & \end{tikzcd}$$

Nechť (E_k^r), $k = 0, 1, \ldots, P$ je reprezentace variační posloupnosti r-tého řádu a nechť $(\overline{\Phi}_k^{s,r})$ je soubor zobecněných reprezentací faktorových grup Ω_k^r/Θ_k^r. Následující diagram definuje *asociovanou zobecněnou reprezentaci* $(\overline{E}_k^{s,r})$, $k = 0, 1, \ldots, P$ dané variační posloupnosti:

$$\overline{E}_k^{s,r} : \overline{\Phi}_k^{s,r}(\Omega_k^r/\Theta_k^r) \to \omega_{k+1}^s, \quad k = 1, \ldots, , P$$

$$\overline{E}_k^{s,r} = \overline{\Phi}_{k+1}^{s,r} \circ E_k^r \circ \overline{\Phi}_k^{s,r})^{-1} , \quad \overline{E}_0^{s,r} = \overline{\Phi}_1^{s,r} \circ E_0^r .$$

Odpovídající *reprezentace variační posloupnosti* je pak definována jako posloupnost zobrazení $\overline{E}_k^{s,r} : \overline{\Phi}_k^{s,r}(\Omega_k^r/\Theta_k^r) \to \Omega_k^s$, $\overline{E}_k^{s,r} = \overline{\Phi}_k^{s,r} \circ E_k^r \circ (\overline{\Phi}_k^{s,r})^{-1}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \stackrel{E^r_{k-1}}{\longrightarrow} & \Omega^r_k/\Theta^r_k & \stackrel{E^r_k}{\longrightarrow} & \Omega^r_{k+1}/\Theta^r_{k+1} & \stackrel{E^r_{k+1}}{\longrightarrow} & \cdots \\
 & \overline{\Phi}^{s,r}_k & \Big\downarrow & & \Big\downarrow & \overline{\Phi}^{s,r}_{k+1} & \\
\cdots & \underset{\overline{E}^{s,r}_{k-1}}{\longrightarrow} & \Omega^t_k & \underset{\overline{E}^{s,r}_k}{\longrightarrow} & \Omega^s_{k+1} & \underset{\overline{E}^{s,r}_{k+1}}{\longrightarrow} & \cdots
\end{array}$$

Nyní můžeme formulovat *problém reprezentace*: Pro dané číslo r hledáme číslo s a takový soubor zobecněných reprezentací $(\overline{\Phi}^{s,r}_k)$ tak, aby reprezentanti $\overline{\Phi}^{s,r}_k([\varrho])$ tříd $[\varrho] \in \Omega^r_k/\Theta^r_k$ pro $k = 1, 2, 3$ měli obvyklý fyzikální význam. Požadujeme tedy, aby třída forem obsahující lagrangián r-tého řádu byla reprezentována lagrangiánem samotným, třída obsahující vnější derivaci lagrangiánu byla reprezentována odpovídající Eulerovou-Lagrangeovou formou a třída obsahující dynamickou formu $\mathcal{E} = E_\sigma \omega^\sigma \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^r_2$ její Helmohltzovou-Soninovou formou, jejíž koeficienty jsou levé strany Helmholtzových-Soninových variačních podmínek:

$$\overline{\Phi}^{s,r}_k([\lambda] = (\pi^{s,r})^* \lambda \ , \ \overline{\Phi}^{s,r}_k([\mathrm{d}\lambda]) = \mathcal{E}_\lambda \ , \ \overline{\Phi}^{s,r}_k([\mathrm{d}\mathcal{E}]) = \mathcal{H}_\lambda \ .$$

Diagram ukazuje, že stačí konstruovat příslušná zobrazení $(\overline{F}^{s,r}_k$. Konstrukce vychází z $(k-1)$-kontaktní komponenty formy $\varrho \in \Omega^r_k$ a spočívá v odečítání $k-$kontaktních $k-$forem a vnějších derivací vhodně vybraných $(k-1)-$kontaktních $(k-1)-$forem, ve shodě s definicí faktorizačních zobrazení.

Kapitola 4

Variační posloupnost na $P_1^r\mathcal{Y}$

V této kapitole jsou definovány základní pojmy potřebné pro formulaci teorie variační posloupnosti na Grassmannových fibracích obecného řádu pro mechaniku. V závěrečném odstavci zavádíme variační posloupnost.

4.1 Prodloužení podvariety

Nechť $\mathcal{Y}$ je varieta dimenze $n+m$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$ je n-rozměrná podvarieta, $A_{\mathcal{Y}}$ atlas na $\mathcal{Y}$. Nechť $y \in \mathcal{Y}$ je libovolný bod a $(\mathcal{V}, \psi) \in A_{\mathcal{Y}}$ souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$ na $\mathcal{Y}$ takový, že $y \in \mathcal{V}$. Zvolme jednu z možných parametrizací f kousku podvariety $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$, $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{Y}, \mathcal{S} \cap \mathcal{V} = \operatorname{Im} f$. Nechť tr_x je translace v $\mathcal{R}^n$ definovaná vztahem (2.8). Označme

$$\kappa : \mathcal{S} \ni y \to \kappa(y) = [\mathcal{S}]_y^r = [J_0^r(f \circ tr_x)] = \rho_n^r(J_x^r f) \in P_n^r\mathcal{Y}, \tag{4.1}$$

kde $y = f(x)$. Množinu

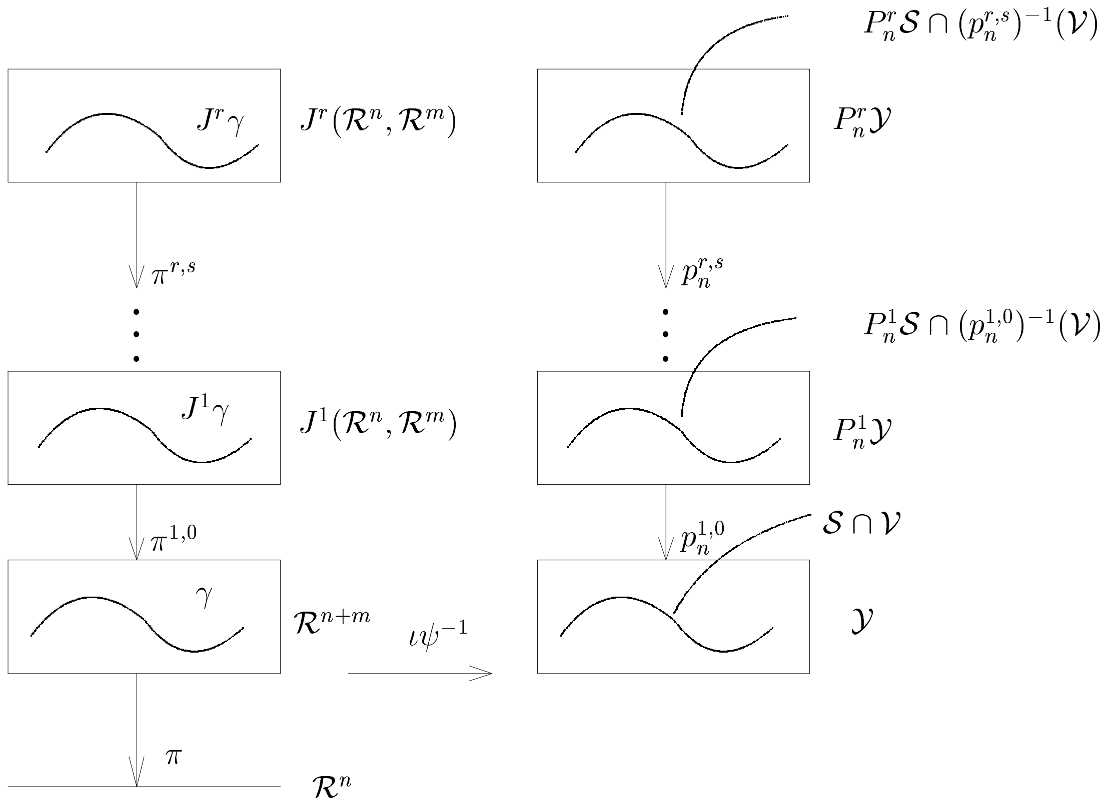
$$P_n^r\mathcal{S} = \{[\mathcal{S}]_y^r | y \in \mathcal{S}\}$$

nazveme *r-tým prodloužením podvariety $\mathcal{S}$*. Dále označme kanonickou inkluzi

$$\iota : P_n^r\mathcal{S} \to P_n^r\mathcal{Y} \tag{4.2}$$

4.2 Souřadnice

Nechť $\{(\mathcal{U}_\pi, \phi_\pi)\}$ je atlas na $P_n^r\mathcal{Y}$ definovaný vztahy (2.9),resp.(2.10),(2.11). Souřadnicový sytém $(\mathcal{V}, \psi)$ představuje lokální fibraci definovanou vztahem (2.12). Nechť $\mathcal{S}$ je podvarieta variety $\mathcal{Y}$ taková, že zobrazení $p_n|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{V}}$ je regulární, pak existuje řez γ fibrované variety $(\mathcal{V}, p_n, p_n(\mathcal{V}))$ takový, že $\operatorname{Im}\gamma = \mathcal{S} \cap \mathcal{V}$. Označme $J^k\gamma, 1 \leq k \leq r$, prodloužení řezu. Situaci znázorňuje obr.7. (V obrázku značí $\pi^{r,s}, r > s$ resp. π kartézskou projekci na $\mathcal{R}^n$).



Obr. 7: Lokální fibrace

Zřejmě platí:

$$\Phi_\pi(p_n^{r,s}[J_0^r f]) = \pi^{r,s}(\Phi_\pi([J_0^r f]))$$

V dalším textu budeme pracovat s lokálními fibrovanými souřadnicovými systémy, které jsou definovány vztahy (2.12). Proveďme pro případ $n = 1$, jemuž se budeme především věnovat, změnu ve způsobu označování složek souřadnicových zobrazení. Dřívější označení $(\mathcal{V}, \psi), \psi = (y^\sigma), 1 \leq \sigma \leq m + 1$ zaměníme označením $(\mathcal{U}_0, \varphi_0), \varphi_0(y^0, (y^\alpha)), 1 \leq \alpha \leq m$. V lokálním fibrovaném souřadnicovém systému má v pořadí prvá souřadnice bodu $y \in \mathcal{U}_0$ tj $y^0(y)$ význam souřadnice projekce $p_n(y)$ (viz. (2.12)) tohoto bodu na bázi fibrované variety $(\mathcal{U}_0, p_n, p_n(\mathcal{U}_0))$, zatímco $(y^1(y), \ldots, y^m(y))$ představují souřadnice ve vrstvě.

Nechť $f : \mathcal{R} \ni s \to f(s) \in \mathcal{R}^{m+1}$ je parametrizace jednorozměrné podvariety $\mathcal{S} \cap \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{Y}$ taková, že $\frac{\mathrm{d}y^0 f(0)}{\mathrm{d}s} \neq 0$. Označme dále jako $(\mathcal{U}, \varphi), \varphi = (y^0, y^1, \ldots, y^m, y_1^1 \ldots, y_1^m, \ldots, y_r^1, \ldots y_r^m)$ souřadnicový systém na $P_1^r\mathcal{Y}$ asociovaný s $(\mathcal{U}_0, \varphi_0)$ (viz odst 2.4).

4.3 Kontaktní formy

Nechť $\mathcal{W}$ je otevřená podmnožina variety $\mathcal{Y}$. Označíme $\Omega_0^r\mathcal{W}$ okruh hladkých funkcí na $(p_n^{r,0})^{-1}(\mathcal{W})$. $\Omega_0^r\mathcal{W}$-modul hladkých diferenciálních k-forem je označen $\Omega_k^r\mathcal{W}$. Formu $\eta \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ nazveme *kontaktní*, jesliže pro každou n-rozměrnou podvarietu $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$ platí

$$\iota^*\eta = 0 \tag{4.3}$$

kde ι je definováno vztahem (4.2).

Označme dále

$$J^r f : \mathcal{R}^n \to J^r(\mathcal{R}^n, \mathcal{Y})$$

zobrazení definované vztahem

$$(J^r f)(x) = J_x^r f.$$

Platí následující tvrzení:
Věta 4.1.: *Forma $\eta \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ je kontaktní právě tehdy, když*

$$(\rho_n^r \circ J^r f)^*\eta = 0 \tag{4.4}$$

pro libovolné vnoření $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{Y}$, kde ρ_n^r je definováno vztahem (2.7).

Důkaz: Důkaz tohoto tvrzení je zřejmý přímo z definice kontaktnosti a ze skutečnosti, že každé vnoření $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{Y}$ definuje jistou k-rozměrnou podvarietu v $\mathcal{Y}$.

♡

V další části této kapitoly uvažujeme pouze případ $n = 1$. Označme

$$\omega^\alpha = \mathrm{d}y^\alpha - y_1^\alpha \mathrm{d}y^0, \ \omega_l^\alpha = \mathrm{d}y_l^\alpha - y_{l+1}^\alpha \mathrm{d}y^0$$

kde $1 \leq l \leq r-1$.

Věta 4.2.: *Forma $\eta \in \Omega_1^r\mathcal{W}$ je kontaktní právě tehdy, jestliže pro každý bod $y \in \mathcal{W}$ existuje souřadnicový systém (U_0, φ_0), $\varphi_0 = (y^0, (y^\alpha))$, $\alpha = 1, \ldots, m$, na $\mathcal{Y}$ takový, že $y \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{W}$ a s ním asociovaný souřadnicový systém (U, φ), $\varphi = (y^0, (y^\alpha), (y_1^\alpha), \ldots, (y_r^\alpha))$, $\alpha = 1, \ldots, m$ na $P_1^r\mathcal{Y}$, v němž je forma η vyjádřena ve tvaru*

$$\eta = \sum_{l=0}^{r-1} A_\alpha^l \, \omega_l^\alpha \,, \quad \alpha = 1, \ldots, m \,. \tag{4.5}$$

Důkaz:
(1) $\Rightarrow$: Nechť forma $\eta \in \Omega_1^r\mathcal{W}$ je kontaktní. Zvolme libovolný bod $y \in \mathcal{W}$ a souřadnicový systém (U_0, φ_0), $\varphi_0 = (y^0, (y^\alpha))$, $\alpha = 1, \ldots, m$, a sním asociovaný souřadnicový

systém (U,φ), $\varphi=(y^0,y^\alpha,(y_1^\alpha),\dots,(y_r^\alpha))$, $\alpha=1,\dots,m$, tak, aby $y\in U_0$. Souřadnicové vyjádření formy η má obecně tvar

$$\eta = B\mathrm{d}y^0 + \sum_{l=0}^{r} A_\alpha^l \,\mathrm{d}y_l^\alpha\,, \quad B,\, A_\alpha^l \in \Omega_0^r\mathcal{W}\,.$$

Nechť $f:\mathcal{R}\ni s\to f(s)\in\mathcal{Y}$ je vnoření a nechť je v daném souřadnicovém systému splněna podmínka $\frac{dy^0 f(0)}{ds}\neq 0$. Označme $\kappa=\rho_n^r\circ J^r f$. Pak

$$(\rho_n^r\circ J^r f)^*\eta = (\kappa^*\eta) = (B\circ\kappa)\frac{dy^0 f}{\partial s}ds + \sum_{l=0}^{r-1}(A_\alpha^l\circ\kappa)\frac{dy_l^\alpha f}{ds}ds + (A_\alpha^r\circ\kappa)\frac{dy_r^\alpha f}{ds}ds =$$

$$\left[(B\circ\kappa)+\sum_{l=0}^{r-1}(A_\alpha^l y_{l+1}^\alpha)\circ\kappa + (A_\alpha^r y_{r+1}^\alpha)\circ\kappa\right]\frac{dy^0 f}{ds}ds$$

$$(\rho_n^r\circ J^r f)^*\eta = 0 \Leftrightarrow A_\alpha^r = 0,\; B+\sum_{l=0}^{r-1}A_\alpha^l y_{l+1}^\alpha = 0$$

a tedy

$$\eta = \sum_{l=0}^{r-1} A_\alpha^l (dy_l^\alpha - y_{l+1}^\alpha dy^0),\; 1\leq\alpha\leq m.$$

Poznámka: Uvědomíme-li si, že každý souřadnicový systém (U_0,φ_0) na $\mathcal{Y}$, jakož i s ním asociovaný souřadnicový systém (U,φ) na $P_1^r\mathcal{Y}$, představuje lokální fibraci (2.12), mohli bychom k důkazu této části tvrzení bezprostředně použít výsledků získaných pro vyjádření kontaktních forem na fibrovaných varietách (viz například [8]).

(2) $\Leftarrow$: Nechť $y\in\mathcal{Y}$, (U_0,φ_0), $\varphi_0=(y^0,(y^\alpha))$, $\alpha=1,\dots,m$ a nechť forma η má v souřadnicovém systému (U,φ), $\varphi=(y^0,(y^\alpha),(y_1^\alpha),\dots,(y_r^\alpha))$, $\alpha=1,\dots,m$, asociovaném s (U_0,φ_0), vyjádření (4.5). Ukážeme invariantnost vyjádření (4.5) této formy při souřadnicových přechodech a odvodíme transormační vztahy pro koeficienty A_α^l. Nechť $(\overline{\mathcal{U}}_0,\overline{\varphi}_0)$ je souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ takový, že $\mathcal{U}_0\cap\overline{\mathcal{U}}_0\neq\emptyset$ a nechť $(\overline{\mathcal{U}},\overline{\varphi})$, $\overline{\varphi}=(\overline{y}^0,(\overline{y}^\beta),(\overline{y}_1^\beta),\dots,(\overline{y}_r^\beta))$ s ním asociovaný souřadnicový systém na $P_1^r\mathcal{Y}$. Transformační rovnice

$$\overline{\varphi}_0\varphi_0^{-1}:\varphi_0(\mathcal{U}_0\cap\overline{\mathcal{U}}_0)\to\overline{\varphi}_0(\mathcal{U}_0\cap\overline{\mathcal{U}}_0)$$

mají tvar

$$\overline{y}^0 = \overline{y}^0(y^0,y^1,\dots,y^m)$$

$$\overline{y}^\beta = \overline{y}^\beta(y^0,y^1,\dots,y^m) \text{ pro } 1\leq\beta\leq m.$$

Na $\overline{\mathcal{U}}\cap\mathcal{U}$ platí pro všechna $0\leq l\leq r-1$, $1\leq\beta\leq m$:

$$\overline{\omega}_l^\beta = \mathrm{d}\overline{y}_l^\beta - \overline{y}_{l+1}^\beta \mathrm{d}\overline{y}^0 = \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha}\mathrm{d}y_i^\alpha - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}\mathrm{d}y^\alpha =$$

$$\frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha}\mathrm{d}y_i^\alpha - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 + \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha} y_1^\alpha \mathrm{d}y^0 - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha} y_1^\alpha \mathrm{d}y^0 - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}\mathrm{d}y^\alpha =$$

$$\frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha}\mathrm{d}y_i^\alpha - \overline{y}_{l+1}^\beta \left(\frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^0} + \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha} y_1^\alpha\right)\mathrm{d}y^0 - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}(\mathrm{d}y^\alpha - y_1^\alpha \mathrm{d}y^0).$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$\overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\mathrm{d}\overline{y}^0}{\mathrm{d}y^0} = \frac{\mathrm{d}\overline{y}_l^\beta}{\mathrm{d}y^0}, \text{ tj.}$$

$$\overline{y}_{l+1}^\beta \left(\frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^0} + \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha} y_1^\alpha\right) = \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y^0} + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha} y_{i+1}^\alpha,$$

dostáváme

$$\overline{\omega}_l^\beta = \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha}\mathrm{d}y_i^\alpha - \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 - \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha} y_{i+1}^\alpha \mathrm{d}y^0 - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}(\mathrm{d}y^\alpha - y_1^\alpha \mathrm{d}y^0) =$$

$$\sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha}(\mathrm{d}y_i^\alpha - y_{i+1}^\alpha \mathrm{d}y^0) - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}(\mathrm{d}y^\alpha - y_1^\alpha \mathrm{d}y^0) \Rightarrow$$

$$\overline{\omega}_l^\beta = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y_i^\alpha}\omega_i^\alpha + \left(\frac{\partial \overline{y}_l^\beta}{\partial y^\alpha} - \overline{y}_{l+1}^\beta \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}\right)\omega^\alpha \tag{4.6}$$

Přitom klademe $y_0^\alpha = y^\alpha$, $\omega_0^\alpha = \omega^\alpha$, atd.

Uvažme libovolnou jednorozměrnou podvarietu $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$, $y \in \mathcal{S}$, takovou, že existuje řez γ lokální projekce p_1, pro který $\operatorname{Im}\gamma = \mathcal{S} \cap \mathcal{U}_0$. Ze souřadnicového vyjádření formy η a užitím výsledků získaných pro fibrované variety pak bezprostředně plyne vztah $(\rho_1^r \circ J^r\gamma)^*\eta = 0$, kde $J^r\gamma$ je r-té jetové prodloužení řezu γ. Řez γ je ovšem vnořením. Forma η tedy splňuje definiční vztah kontaktnosti (4.3) pro případ každé podvariety $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$, kterou lze v daném souřadnicovém systému vyjádřit jako řez příslušné lokální projekce. Zbývá prověřit platnost vztahu (4.3) pro případ zbývajících podvariet. Nechť $\mathcal{S}_0$ je podvarieta v $\mathcal{Y}$, pro kterou neexistuje řez projekce p_1 v bodě y tak, aby platilo $\operatorname{Im}\gamma = \mathcal{S}_0 \cap U_0$. Nechť $f : \mathcal{R} \ni s \to f(s) \in \mathcal{Y}$ je vnoření takové, že $f(0) = y$ a nechť $[J_0^r f] \in P_1^r\mathcal{Y}$ je příslušný kontaktní element v bodě y. Pak v libovolné otevřené množině $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ obsahující $[J_0^r f]$ leží alespoň jeden kontaktní element $[J_0^r g]$ takový, že $g : \mathcal{R} \to \mathcal{Y}$ je vnoření a existuje řez γ lokální projekce p_1 takový, že $\operatorname{Im}\gamma = \operatorname{Im} g \cap \mathcal{U}_0$. Ze spojitosti formy η pak již plyne požadovaný vztah (4.3).

$\heartsuit$

Formu $\eta \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ nazveme *k-kontaktní*, jestliže pro každý bod $y \in \mathcal{W}$ existuje souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ $(\mathcal{U}_0, \varphi_0)$, $\varphi_0 = y^0, (y^\alpha))$, $\alpha = 1, \dots, m$, $y \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{W}$ a s ním asociovaný souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (y^0, (y^\alpha), (y_1^\alpha), \dots, (y_r^\alpha))$, $\alpha = 1, \dots, m$, na $P_1^r\mathcal{Y}$, v němž je forma η vyjádřena ve tvaru:

$$\eta = A_{\alpha_1}^{j_1} \dots _{\alpha_k}^{j_k} \, \omega_{j_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_k}^{\alpha_k} \,, \tag{4.7}$$

kde $0 \leq j_s \leq r-1$ a koeficienty $A_{\alpha_1}^{j_1} \dots _{\alpha_k}^{j_k} \in \Omega_0^r\mathcal{W}$ jsou antisymetrické v multiindexech $\binom{j_q}{\alpha_q, 1 \leq q \leq k}$.

Formu $\eta \in \Omega_k^r\mathcal{W}$ nazveme $(k-1)$-*kontaktní*, jestliže pro každý bod $y \in \mathcal{W}$ existuje souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ $(\mathcal{U}_0, \varphi_0)$, $\varphi_0 = y^0, (y^\alpha))$, $\alpha = 1, \dots, m$, $y \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{W}$ a s ním asociovaný souřadnicový systém (U, φ), $\varphi = (y^0, (y^\alpha), (y_1^\alpha), \dots, (y_r^\alpha))$, $\alpha = 1, \dots, m$, na $P_1^r\mathcal{Y}$, v němž je forma η vyjádřena ve tvaru:

$$\eta = A_{\alpha_1}^{j_1} \dots _{\alpha_k}^{j_k} \, \omega_{j_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_k}^{\alpha_k} + B_{\alpha_1}^{j_1} \dots _{\alpha_{k-1}}^{j_{k-1}} \, \omega_{j_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{k-1}}^{\alpha_{k-1}} \wedge \mathrm{d}y^0 \,, \tag{4.8}$$

kde $0 \leq j_s \leq r-1$ a koeficienty $A_{\alpha_1}^{j_1} \dots _{\alpha_k}^{j_k} \in \Omega_0^r\mathcal{W}, B_{\alpha_1}^{j_1} \dots _{\alpha_{k-1}}^{j_{k-1}} \in \Omega_0^r\mathcal{W}$ jsou antisymetrické v multiindexech $\binom{\alpha_q}{j_q}$, přičemž alespoň jeden z koeficientů $B_{\alpha_1}^{j_1} \dots _{\alpha_{k-1}}^{j_{k-1}}$ je nenulový.

Věta 4.3.: *k-kontaktní k-forma resp. $(k-1)$-kontaktní k-forma mají v každém souřadnicovém systému vyjádření (4.7), resp. (4.8)*

Důkaz: Věta plyne z transformačních vztahů (4.6) a vztahu

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\overline{y}^0 = \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^0}\mathrm{d}y^0 + \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}\mathrm{d}y^\alpha = \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}(\mathrm{d}y^\alpha - y_1^\alpha \mathrm{d}y^0) + (\frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^0} + \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}y_1^\alpha)\mathrm{d}y^0 = \\ = \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}\omega^\alpha + (\frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^0} + \frac{\partial \overline{y}^0}{\partial y^\alpha}y_1^\alpha)\mathrm{d}y^0\end{aligned} \tag{4.9}$$

$\heartsuit$

Forma $A\mathrm{d}y^0$ odpovídá v dané lokální fibraci tzv. horizontální formě, definované v kapitole 3. pro fibrované variety. Ze vztahu (4.9) vidíme, že v jiné lokální fibraci forma tento tvar již nemusí mít. Formulace variační úlohy na $P_1^r\mathcal{Y}$ bude tedy podstatně obtížnější, neboť nemůžeme použít definice Lagrangiánu jakožto horizontální formy.

Pozn.: Formu $\eta \in \Omega_p^r\mathcal{W}$ nazveme *k-kontaktní*, $1 \leq k \leq p$, jestliže ke každému $y \in \mathcal{W}$ existuje souřadnicový systém $(\mathcal{U}_0, \varphi_0)$ na $\mathcal{Y}$ a s ním asociovaný souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$ na $P_n^r\mathcal{Y}$, takový, že $y \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{W}$ a forma η má souřadnicové vyjádření

$$\eta = \omega_{I_1}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \omega_{I_k}^{\alpha_k} \wedge \chi_{\alpha_1}^{I_1} \dots _{\alpha_k}^{I_k}$$

kde $\chi^{I_1}_{\alpha_1}\dots{}^{I_k}_{\alpha_k}$ jsou $(p-k)$ formy, z nichž alespoň jedna není kontaktní a $1 \leq \alpha_q \leq m$, $1 \leq q \leq k$, $0 \leq |I_q| \leq r-1$, $\omega^\alpha_0 = \omega^\alpha$. Ze vztahu (4.6) a nezávislosti kontaktnosti na volbě souřadnicového systému plyne, že vyjádření k-kontaktní p-formy má tento tvar v každém souřadnicovém systému.

Označme $\Omega^r_{p,c}\mathcal{W} \subset \Omega^r_p\mathcal{W}$ pro $1 \leq p \leq mr$ submodul p-kontaktních p-forem, $\Theta^r_1\mathcal{W} = \Omega^r_{1,c}\mathcal{W}$, $\Theta^r_k\mathcal{W} = \Omega^r_{k,c}\mathcal{W} + \mathrm{d}\Omega^r_{k-1,c}\mathcal{W}$. $\Theta^r_k\mathcal{W}$ je podgrupou grupy $(\Omega^r_k\mathcal{W}, +)$. Posloupnost zobrazení

$$(E_j : \Omega^r_j/\Theta^r_j \ni [\eta] \to [\mathrm{d}\eta] \in \Omega^r_{j+1}/\Theta^r_{j+1})$$

je *variační posloupností na* $P^r_1\mathcal{Y}$.

Kapitola 5

Variační úloha na $P_n^r\mathcal{Y}$

V této kapitole formulujeme variační úlohu na $P_n^r\mathcal{Y}$ pro případ orientované Riemannovy variety $\mathcal{Y}$. Funkcionál akce konstruujeme pomocí objemových elementů indukovaných na podvarietách $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$. Souřadnicová vyjádření aplikujeme na neparametrizované fyzikální úlohy.

5.1 Objemový element a funkcionál akce

Nechť $(\mathcal{Y}, g, Or)$ je orientovaná Riemannova varieta dimenze $n+m$ s metrikou g a orientací Or. Nechť $\omega \in \Lambda^{n+m}T\mathcal{Y}$ je objemový element na $\mathcal{Y}$ indukovaný metrikou g a kompatibilní s orientací Or. V lokálních souřadnicových systémech $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq n+m$ na $\mathcal{Y}$, v nichž má g normální tvar ($g = \delta_{\sigma\nu}\mathrm{d}x^\sigma \otimes \mathrm{d}x^\nu$) a které jsou kompatibilní s orietací Or, tedy platí

$$\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{n+m}.$$

Označme

$$T_m\mathcal{Y} = \bigcup_{y\in\mathcal{Y}} \underbrace{T_y\mathcal{Y} \times \ldots \times T_y\mathcal{Y}}_{m-\text{krát}}$$

(s indukovanou strukturou diferencovatelné variety). Pro libovolný bod $z_0 \in P_n^r\mathcal{Y}$ existuje otevřené okolí $\mathcal{W}$, $z_0 \in \mathcal{W}$, na němž lze definovat hladké zobrazení

$$\mu : \mathcal{W} \ni z \to \mu(z) = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in T_m\mathcal{Y}$$

s vlastnostmi

(1) $\xi_1, \ldots, \xi_m \in T_{p_n^r(z)}\mathcal{Y}$ kde p_n^r je projekce definovaná vztahem (2.12),

(2) vektory $\xi_1, \ldots, \xi_m$ jsou ortonormální vzhledem ke skalárnímu součinu zadanému metrikou g, tj. $g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, ..., m$,

(3) $\xi_1,\dots,\xi_m$ generují podprostor $T^{\perp}_{p^r_n(z)}\mathcal{S} \subset T_{p^r_n(z)}\mathcal{Y}$, pokud $z = [\mathcal{S}]^r_{p^r_n(z)}$, kde $T^{\perp}_{p^r_n(z)}\mathcal{S}$ je ortogonální doplněk prostoru $T_{p^r_n(z)}\mathcal{S}$, kde $\mathcal{S}$ je reprezentant kontaktního elementu z. (Za $\mathcal{S}$ zvolíme orientabilní podvarietu $\mathcal{S}\subset\mathcal{Y}$ s indukovanou metrikou $g_{\mathcal{S}}$, vybereme jednu z možných orientací a označíme $Or_{\mathcal{S}}$.)

(4) jestliže báze vektorů $\zeta_1,\dots,\zeta_n \in T_{p^r_n(z)}\mathcal{S}$ náleží orientaci $Or_{\mathcal{S}}$, pak $(\zeta_1,\dots,\zeta_n,\xi_1,\dots,\xi_m)\in Or$

Definujme n-formu $\rho_{\mathcal{S}}$ na $\mathcal{W}$ vztahem

$$\rho_{\mathcal{S}} = (-1)^{mn}(p^r_n)^* i_{\xi_m}\dots i_{\xi_1}\omega \tag{5.1}$$

tj. pro libovolné vektory $\eta_1,\dots,\eta_n\in T_zP^r_n\mathcal{Y}$, $z\in\mathcal{W}$, platí

$$\rho_{\mathcal{S}}(z)(\eta_1,\dots,\eta_n) = \omega(p^r_n(z))(T_{p^r_n}.\eta_1,\dots,T_{p^r_n}\eta_n,\xi_1,\dots,\xi_m)$$

Vzhledem k tomu, že $\omega_{\mathcal{S}} = (-1)^{mn} i_{\xi_m}\dots i_{\xi_1}\omega$ je objemový element indukovaný na podvarietě $\mathcal{S}$ metrikou $g_{\mathcal{S}}$ a kompatibilní se zvolenou orientací $Or_{\mathcal{S}}$, platí $\rho_{\mathcal{S}} = (p^r_n)^*\omega_{\mathcal{S}}$. (Báze, v níž má metrika normální tvar a která náleží dané orientaci, není určena jednoznačně, avšak formy ω a $\rho_{\mathcal{S}}$ jsou na volbě konkrétní z nich nezávislé.)
Nechť $L\in\mathcal{F}(P^r_n\mathcal{Y},\mathcal{R})$ je funkce definovaná na $P^r_n\mathcal{Y}$. Formu $\lambda_{L,\mathcal{S}} = L\rho_{\mathcal{S}}$ nazveme *lagrangiánem.* Poznamenejme, že vektory $(\eta_1,\dots,\eta_n)\in T_z\mathcal{W}$, $z\in\mathcal{W}$ anulují formu $\rho_{\mathcal{S}}$ a tedy i lagrangián $\lambda_{L,\mathcal{S}}$, jestliže tečný obraz (zobrazením Tp^r_n) alespoň jednoho z nich je prvkem prostoru $T^{\perp}_{p^r_n(z)}\mathcal{S}$.
Nechť $\{\mathcal{S}\}$ je množina všech n-rozměrných podvariet variety $\mathcal{Y}$ s indukovanou metrikou a orientací. *Funkcionálem akce pro funkci* L nazveme zobrazení

$$S_L : \{\mathcal{S}\}\ni\mathcal{S}\to S_L(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}}\kappa^*\lambda_{L,\mathcal{S}} \tag{5.2}$$

kde κ je definováno vztahem (4.1).
Nechť $f:\mathcal{R}^n\to\mathcal{S}$ je libovolná parametrizace podvariety $\mathcal{S}$. Pak

$$S_L = \int_{\mathcal{S}}\kappa^*\lambda_{L,\mathcal{S}} \tag{5.3}$$

$$S_L = \int_{f^{-1}(\mathcal{S})} f^*\kappa^*\lambda_{L,\mathcal{S}}.$$

Nechť ζ je hladké vektorové pole na otevřené množině $\mathcal{W}\subset\mathcal{Y}$ obsahující podvarietu $\mathcal{S}$, α_t jeho lokální jednoparametrická grupa. Pak pro každé t je $\alpha_t : \mathcal{W}\ni y\to \alpha_t(y)\in\alpha_t(\mathcal{W})$ difeomorfismus. Definujme

$$\mathcal{S}_t = \{\alpha_t(y)\mid y\in\mathcal{S}\}\,.$$

$\mathcal{S}_t$ je podvarietou variety $\mathcal{Y}$, kterou nazveme *variací* (*deformací*) podvariety $\mathcal{S}$. Podvarietu $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$ nazveme *extremálou* akce S_L, jestliže pro každý systém jejích deformací $\mathcal{S}_t$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ platí

$$\frac{\mathrm{d}S_L(\mathcal{S}_t)}{\mathrm{d}t} \,|_{t=0} = 0$$

5.2 Souřadnicová vyjádření

Nechť $\mathcal{S} \subset \mathcal{Y}$ je n-rozměrná orientabilní podvarieta $(n+m)$-rozměrné orientované Riemannovy variety $(\mathcal{Y}, g, Or)$. Označme $g_{\mathcal{S}}$ indukovanou metriku na $\mathcal{S}$ a zvolme orientaci $Or_{\mathcal{S}}$. Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^j, x^\alpha)$, $1 \le j \le n$, $n+1 \le \alpha \le n+m$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ je souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$ takový, že v něm objemový element ω indukovaný metrikou g a kompatibilní s orientací Or má tvar

$$\omega = \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}x^{n+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{n+m}.$$

Souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$ lze navíc volit tak, aby $x^\alpha(y) = 0$, $n+1 \le \alpha \le n+m$ pro libovolný bod $y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{S}$. Pro $\rho_{\mathcal{S}}$ pak platí $\rho_{\mathcal{S}} = \pm \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n$.
Nechť $f : \mathcal{R}^n \ni (u^1, \ldots, u^n) \to f(u^1 \ldots, u^n) \in \mathcal{S}$ je libovolná parametrizace podvariety $\mathcal{S}$. Platí

$$(\kappa \circ f)^* \rho_{\mathcal{S}} = (\kappa \circ f)^* \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n =$$
$$= \frac{\partial x^1}{\partial u^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial u^{j_n}} \mathrm{d}u^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^{j_k} = (\det X) \mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^n$$

kde jsme označili $X = (\frac{\partial x^i}{\partial u^j})$, $1 \le i, j \le n$. Souřadnicové vyjádření indukované metriky v souřadnicích $(\mathcal{U}, \varphi)$ má tvar

$$g_{\mathcal{S}} = \delta_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \,.$$

Pak

$$f^* g_{\mathcal{S}} = \delta_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^j}{\partial u^l} \mathrm{d}u^k \otimes \mathrm{d}u^l = (XX^T)_{kl} \mathrm{d}u^k \otimes \mathrm{d}u^l \,,$$

kde X^T je matice transponovaná k X. Nechť $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (y^\sigma)$, $1 \le \sigma \le n+m$, je souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$, takový, že $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Platí:

$$g_{\mathcal{S}} = g_{\sigma\nu} \mathrm{d}y^\sigma \otimes \mathrm{d}y^\nu \,,$$

tj.

$$f^* g_{\mathcal{S}} = (g_{\sigma\nu} \circ f) \frac{\partial y^\sigma}{\partial u^k} \frac{\partial y^\nu}{\partial u^l} \mathrm{d}u^k \otimes \mathrm{d}u^l = (Y(G \circ f)Y^T)_{kl} \mathrm{d}u_k \otimes \mathrm{d}u_l \,,$$

kde $Y = (\frac{\partial y^\sigma}{\partial u^j})$, $1 \le j \le n$, $1 \le \sigma \le n+m$. Platí tedy

$$XX^T = Y(G \circ f)Y^T \,, \quad \text{tj.} \quad |\det X| = \sqrt{\det(Y(G \circ f)Y^T)} \,.$$

Označme

$$\tilde{G} = Y(G \circ f)Y^T$$

Nechť $\lambda_{L,\mathcal{S}}$ je lagrangián. Pak pro akci S_L platí

$$S_L = \int\limits_{\mathcal{S}} \kappa^*\lambda_{L,\mathcal{S}} = \int\limits_{f^{-1}(\mathcal{S})} f^*\kappa^*\lambda_{L,\mathcal{S}} = [(L\circ\kappa)\circ f]\, f^*\kappa^*\rho_{\mathcal{S}} =$$

$$\pm \int\limits_{f^{-1}(\mathcal{S})} \sqrt{\det\left((g_{\sigma\nu}\circ f)\frac{\partial y^\sigma}{\partial u^i}\frac{\partial y^\nu}{\partial u^l}\right)}\,\mathrm{d}u^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}u^n,$$

kde znaménko + resp. $-$ se týká případu, kdy parametrizace f je souhlasná resp. nesouhlasná se zvolenou orientací $Or_{\mathcal{S}}$. Pro vyjádření formy $\rho_{\mathcal{S}}\in\Lambda^n T\mathcal{W}$ tedy platí

$$\rho_{\mathcal{S}} = \sqrt{\det(g_{\sigma\nu}y^\sigma_i y^\nu_l)}\,\mathrm{d}y^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}y^n,\ 1\le i,l\le n$$

5.3 Příklady

Příklad 1: Nechť $n=1, r=1$, $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi=(y^0,y^1,\ldots,y^m)$ je souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$, $g=\mathrm{d}y^0\otimes\mathrm{d}y^0+\delta_{\alpha\beta}\mathrm{d}y^\alpha\otimes\mathrm{d}y^\beta$, α, $\beta=1,\ldots,m$. Nechť $f:\mathcal{R}\ni u^1\to f(u^1)=(y^0(u^1),y^1(u^1),\ldots,y^m(u^1))$, přičemž $y^0(u^1)=u^1$, je parametrizace křivky $\mathcal{C}\subset\mathcal{Y}$. Nechť $L=1$. Pak

$$S_L = \int\limits_{f^{-1}(\mathcal{C})} \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y^1}{\mathrm{d}y^0}\right)+\ldots+\left(\frac{\mathrm{d}y^m}{\mathrm{d}y^0}\right)}\mathrm{d}y^0,$$

což je očekávaný výraz pro délku křivky $\mathcal{C}$.

Příklad 2: Nechť $n=2$, $r=1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{R}^3$, $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi=(x,y,z)$, $g=\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$, $\mathcal{P}\subset\mathcal{R}^3$ je hladký kousek plochy, $f:\mathcal{R}^2\ni(u,v)\to f(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\in\mathcal{R}^3$ je jeho parametrizace. Nechť $L=1$. Pak

$$S_L = \int\limits_{f^{-1}(\mathcal{P})} \sqrt{\det\tilde{G}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\,,$$

kde

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{pmatrix},$$

neboť

$$f^*g_{\mathcal{P}} = f^*(\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z) =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}u+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right](\mathrm{d}u\otimes\mathrm{d}v+\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}u)+$$
$$+\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}v\otimes\mathrm{d}v\,.$$

Akce S_L má význam plošného obsahu kousku plochy $\mathcal{P}$.

Příklad 3: Nechť $n=2$, $r=1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{R}^3$, $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi=(y^1,y^2,y^3)$, $g=\mathrm{d}y^1\otimes\mathrm{d}y^1+\mathrm{d}y^2\otimes\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}y^3\otimes\mathrm{d}y^3$, $\mathcal{P}\subset\mathcal{R}^3$ je hladký kousek plochy, $f:\mathcal{R}^2\ni(y^1,y^2)\to f(y^1,y^2)=(y^1,y^2,y^3(y^1,y^2))\in\mathcal{R}^3$ je jeho parametrizace.

$$f^*g_{\mathcal{P}}=f^*g=\mathrm{d}y^1\otimes\mathrm{d}y^1+\mathrm{d}y^2\otimes\mathrm{d}y^2+$$
$$+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^1}\mathrm{d}y^1+\frac{\partial y^3}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2\right)\otimes\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^1}\mathrm{d}y^1+\frac{\partial y^3}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2\right)=$$
$$=\left[1+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^1}\right)^2\right]\mathrm{d}y^1\otimes\mathrm{d}y^1+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^1}\right)\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^2}\right)(\mathrm{d}y^1\otimes\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}y^2\otimes\mathrm{d}y^1)+$$
$$+\left[1+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^2}\right)^2\right]\mathrm{d}y^2\otimes\mathrm{d}y^2\,.$$

Nechť $L=1$, pak

$$S_L=\int\limits_{f^{-1}(\mathcal{P})}\left\{\left[1+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^2}\right)^2\right]-\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^1}\right)^2\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^2}\right)^2\right\}\mathrm{d}y^1\wedge\mathrm{d}y^2=$$
$$\int\limits_{f^{-1}(\mathcal{P})}\left[1+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^1}\right)^2+\left(\frac{\partial y^3}{\partial y^2}\right)^2\right]\mathrm{d}y^1\wedge\mathrm{d}y^2$$

Příklad 4: Nechť je euklidovská metrika.

$$g=\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$$

Metrika indukovaná na sféře

$$S^2: x=\cos\phi\sin\theta,\ y=\sin\phi\sin\theta,\ z=\cos\theta$$

má tvar

$$(S^2)^*g=\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi\otimes\mathrm{d}\phi+\mathrm{d}\theta\otimes\mathrm{d}\theta$$

Hledáme geodetické čáry na této sféře, tj. $L = 1$:

$$S_L \int\limits_{f^{-1}(\mathcal{C})} \sqrt{\sin^2\theta \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{pro} \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi} \neq 0.$$

Poněvadž je souřadnice ϕ cyklická, má Eulerova-Lagrangeova rovnice první integrál

$$\frac{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\sin^2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + 1}} = K\,,$$

po úpravě

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{K^2}{\sin^2\theta(\sin^2\theta - K^2)}\,.$$

Řešení

$$\cot\theta = P\sin\phi + Q\cos\phi \tag{5.4}$$

Jedná se o rovnice hlavních kružnic na sféře, řešení nezahrnuje rovník (θ=konst). Toto řešení získáme v jiném souřadnicovém systému, kde

$$S_L = \int\limits_{f^{-1}(\mathcal{C})} \sqrt{\sin^2\theta + \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi \quad \text{pro} \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi} \neq 0\,.$$

Eulerova-Lagrangeova rovnice vede na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\phi^2}\sin\theta - 2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta = 0$$

a po zavedení substituce $u = \cot\theta$ přejde v rovnici harmonického oscilátoru

$$u'' + u = 0\,.$$

Její řešení je dáno vztahem (5.4), nezahrnuje však poledníky (ϕ =konst.)

Příklad 5: Nechť $\mathcal{Y}$ je n-rozměrná Riemannova varieta s metrikou g, $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$. Hledáme geodetické čáry na této varietě, tj. minimum funkcionálu akce dané vztahem (5.3):

$$S = \int\limits_{f^{-1}(\mathcal{C})} \sqrt{g_{\sigma\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}u}}\mathrm{d}u$$

příslušné Eulerovy-Lagrangeovy rovnice mají tvar:

$$\frac{1}{2\sqrt{g_{\sigma\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}u}}}\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{g_{\sigma j}}{\sqrt{g_{\sigma\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}u}}}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}u} = 0$$

je-li parametrem délka oblouku s, pak $\sqrt{g_{\sigma\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}u}} = 1$ a rovnice přejdou ve tvar:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}g_{\sigma j}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}$$

neboli

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} + g_{\sigma j}\frac{\mathrm{d}^2 y^\sigma}{\mathrm{d}s^2}$$

vzhledem k tomu, že platí

$$\frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial y^\sigma}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\nu j}}{\partial y^\sigma}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s}$$

dostáváme

$$g_{\sigma j}\frac{\mathrm{d}^2 y^\sigma}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial y^j}\right)\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = 0$$

násobením rovností g^{hj} a sečtením přes j dostaneme

$$g^{hj}g_{\sigma j}\frac{\mathrm{d}^2 y^\sigma}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}g^{hj}\left(\frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial y^j}\right)\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = 0$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 y^h}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}g^{hj}\left(\frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial y^j}\right)\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Označme

$$\Gamma_{j\sigma\nu} = \frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial y^\nu} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial y^j}$$

a obdržíme konečný tvar rovnic pro geodetické čáry

$$\frac{\mathrm{d}^2 y^h}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}g^{hj}\Gamma_{j\sigma\nu}\frac{\mathrm{d}y^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y^\nu}{\mathrm{d}s} = 0.$$

Pozn.: Ve výpočtech používáme Einsteinovy sčítací symboliky a vztahu

$$g^{hj}g_{ij} = \delta_i^h\,.$$

Příklad 6: Hledáme možné tvary trajektorií při pohybu těles v centrálním gravitačním poli, např. pohyby planet kolem Slunce. Nezajímáme se přitom o konkrétní časovou závislost polohy tělesa (neparametrizovaná úloha).
Pro Lagrangeovu funkci, vyjádřenou ve válcových souřadnicích ve tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\kappa mM}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

je souřadnice ϕ cyklická, zachovává se tedy zobecněný impuls p_ϕ (moment hybnosti). Trajektorií tělesa je rovinná křivka, lze položit $z = 0$. Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, zachovává se mechanická energie tělesa. Zákon zachování energie ve tvaru

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r} = E, \quad \alpha = \kappa mM\,,$$

představuje vazební podmínku pro variační úlohu s lagrangiánem

$$\lambda = \left[\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{r}\right]\mathrm{d}t.$$

Hledáme tedy stacionární trajektorie akce pouze na podmnožině křivek, pro něž fázová trajektorie leží na vazební ploše určené zákonem zachování energie. Tento problém lze převést na úlohu o nalezení extremál tzv. *redukované akce* (viz například [16])

$$\overline{S} = \int \overline{L}\,\mathrm{d}t\,, \quad \overline{L} = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2\,,$$

kde do lagrangiánu dosadíme vazební podmínku: $\overline{L} = 2(E + \alpha r^{-1})$. Ze vztahu

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r}$$

dále plyne

$$\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + r^2\right]}\,\mathrm{d}\phi \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\mathrm{d}t = \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)}\,\mathrm{d}l\,,$$

kde $\mathrm{d}l$ je délkový element trajektorie. Redukovaná akce pro neparametrizovaný problém má pak tvar

$$\overline{S} = \sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)}\,\mathrm{d}l\,.$$

Poznámka: Vzhledem k tomu, že platí $\sqrt{2m(E + \frac{\alpha}{r})} = mv$, je výsledek v souhlasu s tzv. *Maupertuisovým-Eulerovým princpem* [25], který pro nalezení skutečné trajektorie v řadě mechanických úloh požaduje stacionárnost akce

$$S_{ME} = \int_{\mathcal{C}} v\mathrm{d}l$$

a je jistou mechanickou analogií Fermatova principu.
Nechť v úloze o pohybu planet jsou r_0 počáteční vzdálenost planety od Slunce a v_0 velikost počáteční rychlosti. Označme $h = \frac{2E}{\alpha}$, kde $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\alpha}{r_0} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r}$. Pak

$$\overline{S} = \sqrt{m\alpha}\int_{\mathcal{C}} \sqrt{h + \frac{2}{r}}\,\mathrm{d}l.$$

Odpovídající úloha na Grassmannově fibraci je formulována takto:

$$P : x = r\sin\phi\,, \quad y = r\cos\phi\,,$$

$$g = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y\,, \quad P^*g = r^2\mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}r \otimes \mathrm{d}r$$

$$L = \sqrt{\frac{2}{r} + h}$$

$$S_L = \int_{f^{-1}(\mathcal{C})} L\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi \quad \text{pro} \quad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} \neq 0.$$

Řešení příslušné Eulerovy-Lagrangeovy rovnice je

$$r = \frac{C^2}{1 + \sqrt{1 + hC^2}\cos(\phi + B)}$$

a dává pro

- $h < 0, e < 1, v_0^2 < \frac{2h}{r_0}$ ... elipsu
- $h = 0, e = 1, v_0^2 = \frac{2h}{r_0}$ ... parabolu
- $h > 0, e > 1, v_0^2 > \frac{2h}{r_0}$ ... hyperbolu

Úlohu lze zobecnit pro libovolý tvar potenciální energie nezávislé explicitně na čase (viz například [16]).

Kapitola 6

Závěr: Perspektivy variační posloupnosti

Variační posloupnost poskytuje principiálně nový přístup k řešení lokálních i globálních variačních problémů. Právě proto je tato problematika v popředí zájmu matematiků a fyziků, zabývajících se geometrickými přístupy ve variačním počtu.
Variační posloupnost na jetových prodlouženích fibrovaných variet již našla své uplatnění v řešení řady fyzikálních problémů (z nichž některé zmiňujeme v úvodu této práce) a současně umožňuje podstatně elegantnější formulaci variační teorie jak v mechanice, tak v teorii pole.
Očekáváme, že variační posloupnost na Grassmannových fibracích, budovaná v této práci, se analogicky uplatní při řešení neparametrizovaných variačních problémů, které jsou ve fyzice neméně důležité.
Předmětem další práce v této oblasti je
• vyjasnění role variační posloupnosti pro řešení otázek spojených s variační úlohou formulovanou v kapitole 5: variační ekvivalence (tj. triviální variační úloha) a variačnost rovnic,
• studium reprezentace variační posloupnosti na Grassmannových fibracích pro mechaniku,
• zobecnění pojmu kontaktních forem na Grassmannových fibracích pro vícerozměrné úlohy ($n > 1$) a vybudování variační posloupnosti,
• studium fyzikálních aplikací.
Jednou z nejdůležitějších, avšak obtížných, otázek je problém globálnosti definovaných pojmů. Dosavadní výsledky mnoha variačních problémů nám ukazují, že jedině variační posloupnost je umožní získat v plné obecnosti, a jsou tak dokladem toho, jak „silný nástroj“ máme k dispozici.

Kapitola 7

Literatura

[1] J. Bernoulli: Problema novum, ad cujus solutionem Mathematici invitantur. Acta Eruditorum, 1696, 269.

[2] J. Dieudonné: Éléments d'analyse. Gauthier-Villars, 1972.

[3] P. de Fermat: Synthesis ad refractiones. Ouvres P. Fermat, 1, Paris 1891,173.

[4] D.R. Grigore, D. Krupka: Invariants of velocities and higher-order Grassmann bundles. Journal of Geometry and Physics **24** (1996), 244-264.

[5] H. Helmholtz: Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung. J. reine u. angewandte Math. Bd. C, 2 (1887), 137–166.

[6] M. Krbek: Variační posloupnost v mechanice a teorii pole. Diplomová práce. Masarykova Universita, Brno 1998.

[7] D. Krupka: Some geometric aspects of variational problems in fibered manifolds. Folia Fac. Sci Nat. Univ. Purk. Brno, **XIV** (1973), 10, pp 65.

[8] D. Krupka: Variational sequences on finite order jet spaces. Ve sborníku: Differential Geometry and Applications. World Scientific, Singapore 1990, 236–254.

[9] D. Krupka: Lectures on variational sequences. Open Education & Sciences, Opava 1995, pp 86.

[10] D. Krupka: The geometry of Lagrangean structures. Preprint Series in Global Analysis No. GA 7/97, Silesian University, Opava 1997, pp 82.

[11] D Krupka: Variational sequences in mechanics. Calc. Var. **5** (1997), 557–583.

[12] M. Krupka: Natural operators on vector fields and vector distributions. PhD thesis. Masaryk University, Brno, 1995.

[13] O. Krupková: A note on the Helmholtz conditions. Ve sborníku: Differential Geometry and its Applications, Brno, srpen 1986. Universita J. E. Purkyně, Brno 1986, 181–187.

[14] O. Krupková: Variational metrics in $\mathcal{R} \times TM$ and the geometry of nonconservative mechanics. Math. Slovaca **44** (1994), No. 3, 315–335.

[15] O. Krupková: The geometry of ordinary variational equations. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin 1998.

[16] L. D. Landau, E. M. Lifšic: Mechanika. Kurs teoretičeskoj fiziki, tom I, Nauka, Moskva 1973.

[17] L. D. Landau, E. M. Lifšic: Teorija polja. Kurs teoretičeskoj fiziki, tom II, Nauka, Moskva 1973.

[18] M. Mráz: Variační princip ve fyzice. Diplomová práce. Masarykova Universita, Brno 1998.

[19] J. Musilová: Variational sequence in higher order mechanics. Ve sborníku: Differential Geometry and its Applications, Brno, září 1995. Masarykova Universita, Brno 1996, 611–624.

[20] J. Musilová, D. Krupka, O. Krupková: Variační posloupnost ve fyzikálních teoriích. Čs. čas. fyz. **48** (1998), 5, 329–341.

[21] J. Musilová, J. Novotný, M. Mráz, Variačnost a silová pole v klasické fyzice. Čs. čas. fyz. **48** (1998), 5, 320–328.

[22] J. Musilová, M. Krbek: A note to the representation of variational sequence in mechanics. Preprint Series on Global Analysis No. GA 5/1998, Silesian University, Opava 1998, pp 14.

[23] M. Nakahara, Geometry, topology and physics. Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia 1995.

[24] J. Novotný, On the inverse variational problem in the classical mechanics. Ve sborníku: Differential Geometry and its Applications. Charles University, Prague 1981, 189–195.

[25] L. S Pollak (red.): Varijacionnyje principy mechaniki. Gosudarstvennoje izdatelstvo fiziko–matematičeskoj literatury, Moskva 1959.

[26] M. Spivak: Matematičeskij analiz na mnogoobrazijach. Mir, Moskva 1968.

[27] J. Štefánek: Variational sequences in higher order mechanics. Ve sborníku: Differential Geometry and its Applications, Brno, září 1995, Masarykova Universita, Brno 1996, 469–478.

Soupis oprav

strana	řádek/vztah	chybné	má být
20	-10	[19]	[20]
37	-2	rho^r_n	ρ^r_n
39	+4	[20,23,28]	[19,22,27]
40	+3	[24,27]	[23,26]
53	+3	$\ldots + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \bar{(y)}^{\beta}_{l}}{\partial y^{\alpha}_{i}} \mathrm{d}y^{\alpha}_{i} - \ldots$	$\ldots + \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}^{\beta}_{l}}{\partial y^{\alpha}_{i}} \mathrm{d}y^{\alpha}_{i} - \ldots$
53	+6	$\sum_{i=1}^{l}$	$\sum_{i=0}^{l}$
53	(4.3)	$\omega^{\beta}_{l} = \sum_{i=0}^{l} \frac{\partial \overline{y}^{\beta}_{l}}{\partial y^{\alpha}_{i}} \omega^{\sigma}_{i} + \ldots$	$\overline{\omega}^{\beta}_{l} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \overline{y}^{\beta}_{l}}{\partial y^{\alpha}_{i}} \omega^{\alpha}_{i} + \ldots$
55	-2	$(E_i : \Omega^r_j/\Theta^r_j \ni [\eta] \Rightarrow [\mathrm{d}\eta] \in \ldots$	$(E_j : \Omega^r_j/\Theta^r_j \ni [\eta] \to [\mathrm{d}\eta] \in \ldots$
59	+16	$\ldots u^{j_1} \wedge \ldots \wedge u^{j_k} \ldots$	$\ldots \mathrm{d}u^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^{j_k} \ldots$
59	+16	$\ldots u^1 \wedge \ldots \wedge u^n$	$\ldots \mathrm{d}u^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^n$
64	-9	[17]	[16]
65	+3	[26]	[25]
65	-1	[17]	[16]
69	-5	položka [12]	vypustit, zbytek přečíslovat