Vnoření pokaždé jinak, aneb matematická kámasútra

25. srpna 2003

1 Předmluva

Už od začátku studia se často studenti setkávají s různými definicemi týchž matematických pojmů. Každý profesor či docent používá tu „svoji nejoblíbenější“ definici, stejně jako autoři různých knih, učebních textů a monografií. A co takový chudák student, když se v tom pak nemůže vyznat, tak jako kdysi já? Pokud se však matematici (a fyzici) chtějí spolu domluvit, měly by být definice téhož pojmu navzájem ekvivalentní. Ne vždy tomu tak ve skutečnosti je! Tak jsem se jednoho dne rozhodla, že si v některých pojmech udělám konečně pořádek, vybrala jsem *immersion* (vnoření), *embedding* (vložení) a *submanifold* (podvarieta). Jejich definice jsem nalezla v dostupných textech (většinou partyzánsky zhotovených kopiích knih nakladatelství Springer-Verlag, které mám doma). Všem se omlouvám za hrozný způsob citování literatury i případné chyby. Na vylepšení tohoto textu budu i nadále pracovat a uvítám všechny připomínky, další definice a popřípadě další pojmy, které by mohly být do textu zařazeny. Budu uvažovat výhradně o hladkých varietách a hladkých zobrazeních, i když všechny pojmy lze zobecnit (a mnozí z autorů je v této obecnější verzi uvádí) na kategorii C^p-variet a C^p-morfismů ($p \geq 1$, některé i pro $p \geq 0$).

2 Manifold — varieta

2.1 Topologická varieta

Definice 1 Topologická varieta *je Hausdorffův topologický prostor druhého typu spočetnosti, lokálně homeomorfní s* $\mathbf{R}^n$*. (viz [9], [14])*

Definice 2 Topologická varieta *je separabilní metrizovatelný topologický prostor, lokálně homeomorfní s* $\mathbf{R}^n$*. (viz [13])*

Definice 3 Topologická varieta *je separabilní Hausdorffův topologický prostor, lokálně homeomorfní s* $\mathbf{R}^n$*.*
(viz [3])

Důkaz ekvivalence těchto tří definic topologické variety zde nebudeme opisovat, neboť je uveden v textu „Zápis ze semináře“, který je umístěn na stejné webové stránce.

Definice 4 *Topologickou varietou v obecnějším smyslu nazveme topologický prostor lokálně homeomorfní s* $\mathbf{R}^n$.

Někteří autoři (viz [8]) definují nejprve C^k-diferencovatelnou varietu (tj. v definici 7 místo nekonečné diferencovatelnosti zobrazení $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ požadují pouze diferencovatelnost do řádu k). *Topologickou varietou* pak nazvou C^0-diferencovatelnou varietu.

2.2 Diferencovatelná (hladká) varieta

Definice 5 Atlasem *na topologické varietě* M *nazveme soubor dvojic* (U_i, φ_i), $i \in I$ *(nazývaných* souřadnicové systémy*), splňující následující podmínky:*

AT 1. Pro každé $i \in I$ *je* U_i *otevřená podmnožina* M *a* $\cup_{i \in I} = M$.

AT 2. Pro každé $i \in I$ *je* $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ *homeomorfismem na otevřenou množinu v* $\mathbf{R}^n$.

AT 3. Pro každé $i, j \in I$ *je zobrazení* $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *difeomorfismem (tj. je to bijekce a zobrazení i jeho inverze jsou diferencovatelné třídy* C^∞*) otevřených množin v* $\mathbf{R}^n$.

Hladkou strukturou *nazveme třídu kompatibilních atlasů (atlasy jsou kompatibilní, jestliže jejich sjednocením je opět atlas, kompatibilita je relací ekvivalence).*

Definice 6 Hladkou varietou *nazveme topologickou varietu* M *opatřenou hladkou strukturou ve smyslu definice 5. (viz [9], [3] a většina standardních učebnic diferenciální geometrie).*

Definice 7 Atlasem *na množině* M *nazveme spočetný soubor dvojic* (U_i, φ_i), $i \in I$, *(nazývaných* souřadnicové systémy*), splňující následující podmínky:*

AT 1. Pro každé $i \in I$ *je* $U_i \subset M$ *a* $\cup_{i \in I} = M$.

AT 2. Pro každé $i \in I$ *je* $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ *bijekcí na otevřenou množinu v* $\mathbf{R}^n$.

AT 3. Pro každé $i, j \in I$ *je zobrazení* $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ *difeomorfismem (tj. je to bijekce a zobrazení i jeho inverze jsou diferencovatelné třídy* C^∞*) otevřených množin v* $\mathbf{R}^n$.

AT 4. Pro libovolné dva různé body $x_1, x_2 \in M$ *existují indexy* i, k *a množiny* $V_1, V_2 \subset M$ *takové, že platí* $x_1 \in V_1 \subset U_i$, $x_2 \in V_2 \subset U_i$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $\varphi_i(V_1)$ *a* $\varphi_k(V_2)$ *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$.

Hladkou strukturou *nazveme třídu kompatibilních atlasů (atlasy jsou kompatibilní, jestliže jejich sjednocením je opět atlas, kompatibilita je relací ekvivalence).*

Definice 8 Hladkou varietou *nazveme množinu M opatřenou hladkou strukturou ve smyslu definice 7 a navíc opatřenou topologií kompatibilní s atlasem (tj. topologie tvořená všemi množinami U_i z úplného atlasu — atlas, který vznikne sjednocením všech kompatibilních atlasů).*

Je vidět, že definice 6 a 8 jsou ekvivalentní. Je totiž jedno, zda množinu s topologií opatříme atlasem, ve kterém jsou zobrazení φ_i apriori homeomorfismy, nebo jestli množinu bez topologie opatříme atlasem, kde φ_i jsou bijekce na otevřenou množinu, a topologii zkonstruujeme dodatečně tak, aby se z φ_i staly homeomorfismy. U definice 8 je spočetnost báze topologie zaručena spočetností systému (U_i, φ_i) a Hausdorffovost axiomem AT 4 (viz např. [14] - důkaz teorému o diferencovatelné struktuře). S vynecháním těchto dvou předpokladů bychom získali obecnější definici (stejně jako vynecháním předpokladu Hausdorffovosti a spočetnosti báze u definice topologické variety a následným použitím definice 6). Někdy se o varietách bez požadavku Hausdorffovosti a spočetnosti báze mluví jako o varietách v obecnějším smyslu (viz definice 4).

Definice 9 Atlasem *na množině M nazveme soubor dvojic (U_i, φ_i), $i \in I$, (nazývaných* souřadnicové systémy*), splňující následující podmínky:*

AT 1. Pro každé $i \in I$ je $U_i \subset M$ a $\cup_{i \in I} = M$.

AT 2. Pro každé $i \in I$ je $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ bijekce na otevřenou množinu Banachova prostoru E_i a pro každé $i, j \in I$ je $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ otevřená v E_i.

AT 3. Pro každé $i, j \in I$ je zobrazení $\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ C^∞-isomorfismem banachových prostorů (podrobněji viz [11]).

Hladkou strukturou *nazveme třídu kompatibilních atlasů (atlasy jsou kompatibilní, jestliže jejich sjednocením je opět atlas, kompatibilita je relací ekvivalence).*

Definice 10 Hladkou varietou *nazveme množinu M opatřenou hladkou strukturou ve smyslu definice 7. (viz [11])*

Poznámka: Množinu M lze jednoznačně opatřit topologií tak, aby U_i byly otevřené množiny a φ_i homeomorfismy. Myslím, že v definici by mělo být uvedeno (autor to tam neuvádí), že hladká varieta je opatřena také touto topologií (určitě by bylo možné, opatřit ji jinou topologií, která by neodpovídala příslušné hladké struktuře - a to by teda byla hrůza).

Definice 10 není ekvivalentní s předchozími, je obecnější. S použitím této definice nemusí být výsledná topologie Hausdorffova a mít spočetnou bázi. Je to definice také pro nekonečněrozměrné variety.

3 Immersion — vnoření

Immersion podle anglického slovníku znamená *ponoření, ponor*, v matematickém slovníku na internetu je jako překlad uvedeno *vnoření.*

Definice 11 *Hladké zobrazení $f : M \to N$ dvou hladkých variet dimenzí m a n, $m \leq n$ nazveme* vnořením, *jestliže pro každé $x \in M$ má tečné zobrazení $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ hodnost m. (viz [3], [1])*

Definice 12 *Hladké zobrazení $f : M \to N$ dvou hladkých variet nazveme* vnořením, *jestliže pro každé $x \in M$ je tečné zobrazení $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ injektivní. (viz [4], [5], [2])*

Definice 13 *Hladké zobrazení $f : M \to N$ dvou hladkých variet nazveme* vnořením, *jestliže pro každé $x \in M$ je tečné zobrazení $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ lineární izomorfismus na podprostor. (viz [7])*

Definice 14 *Hladké zobrazení $f : M \to N$ dvou hladkých variet nazveme* vnořením, *jestliže $\dim M \leq \dim N$ a pro každé $x \in M$ existuje souřadnicové vyjádření, které je restrikcí vložení kartézských prostorů, tj. existují souřadnicové systémy (U, u) na M, $x \in U$ a (V, v) na N, $f(U) \subset V$, že*

$$v \circ f \circ u^{-1} : (u^1, \dots, u^m) \to (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0). \tag{1}$$

Příslušné souřadnicové systémy se nazývají adaptované k vnoření f v bodě x. *(viz [8])*

Definice 15 *Zobrazení $f : M \to N$ dvou hladkých variet nazveme* vnořením, *jestliže ke každému $x \in M$ existuje jeho okolí U takové, že $f|_U : U \to f(U)$ je difeomorfismem na nějakou podvarietu (chápanou ve smyslu definice 30 pro konečněrozměrné variety a ve smyslu definice 31 obecněji). (viz [11], [7])*

I když je to triviální, ukážeme, že tyto definice jsou ekvivalentní.

11→12: Předpokládejme, že zobrazení $T_x f$ má hodnost m, pak $ker(T_x f) = \vec{o}_{T_x M}$, $T_x f(\xi) = T_x f(\eta) \Rightarrow T_x f(\xi - \eta) = \vec{o}_{T_{(f(x))} N} \Rightarrow (\xi - \eta) \in ker(T_x f) \Rightarrow \xi = \eta$ a tedy zobrazení $T_x f$ je injektivní.

12⇒13: Injektivní lineární zobrazení je vždy izomorfismem na podprostor.

13⇒14: Důkaz je poněkud delší, s pomocí teorému o inverzním zobrazení (*Inverse mapping theorem* — [11]), lze ho najít ve většině učebnic diferenciální geometrie, [1]. Časem ho sem doplním.

14⇒15: Předpokládejme že ke každému $x \in M$ existují souřadnicové systémy uvedené v definici 5 a souřadnicové vyjádření má tvar (1), pak zúžení $f|_U : U \to f(U)$ na $f(U)$ bude v příslušných indukovaných souřadnicích reprezentováno identitou, a tedy f je lokálně difeomorfismus na svůj image.

15⇒11: Je-li f lokálně difeomorfismus na svůj image, pak má zřejmě tečné zobrazení v každém bodě hodnost m.

♡

Poznámka: Všechny uvedené definice se vztahovaly ke konečněrozměrným varietám. Pro případ obecnějších variet ve smyslu definice 10 lze použít pouze definici 15 nebo definici 16 uvedenou níže, která je paralelní k definici 12 pro obecnější případ nekonečněrozměrných variet.

Definice 16 *Hladké zobrazení $f : M \to N$ nazveme* vnořením, *jestliže pro každé $x \in M$ je zobrazení $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ injektivní a jeho image má rozklad (tj.* $\mathrm{Im} T_x M$ *je uzavřeným podprostorem $T_{f(x)} N$, ke kterému existuje uzavřený doplněk).*

15⇔16 Důkaz lze provést opět užitím věty o inverzním zobrazení, viz [11].

Poznámka: V konečné dimenzi má každý podprostor rozklad. Mé znalosti o nekonečných dimenzích jsou zatím natolik chabé, že nedokážu uvést příklad, kdy tomu tak není. Uvítám jakýkoli.

4 Immersed submanifold — vnořená podvarieta

Definice 17 *Nechť N je hladká varieta, $M \subset N$ je podmnožina uvažovaná se strukturou hladké variety. M nazveme* vnořenou podvarietou *jestliže kanonická inkluze $i : M \to N$ je vnoření. (viz [12])*

Definice 18 Vnořenou podvarietou *nazveme dvojici (M, i), kde $i : M \to N$ je injektivní vnoření. (viz [3])*

Definice 19 Vnořenou podvarietou *nazveme definiční obor vnoření. (viz [8])*

Definice 20 Vnořenou podvarietou *nazveme image vnoření. (viz [7])*

Definice 21 Vnořenou podvarietou *nazveme image injektivního vnoření. (viz [1], [4])*

Na první pohled je vidět, že tyto definice ekvivalentní nejsou. Budeme se tedy zabývat rozdílem mezi nimi. Především poslední definice 20 a 21 nemají příliš smysl, neboť jsou množinové, neříkají nic o struktuře, a tedy různá vnoření různých objektů, která dávají stejný image hází do jednoho pytle. Uvedeme si příklady.

Příklad 1: Uvažme vnoření f kružnice S^1 do sféry S^2 tak, že ztotožníme body kružnice s body na rovníku (v lokálních souřadnicích každý dokáže zapsat), dále uvažme vnoření g reálné přímky $\mathbf{R}$ do sféry S^2 tak, že ji na rovník namotáme. Image f a g je stejný a podle definice 20 je (toutéž) vnořenou podvarietou sféry. To je blbost, co?

Příklad 2: Definice 21 je o něco lepší, ale když uvážíme dvě injektivní vnoření:
$f : (-\pi, \pi) \ni t \to (\sin^3 t, \sin t \cos t) \in \mathbf{R}^2$,
$g : (0, 2\pi) \ni t \to (\sin^3 t, \sin t \cos t) \in \mathbf{R}^2$,
jejich image je stejný — „osmička“, ale vnoření jsou jiná. Finální topologie na obraze určené zobrazeními f a g jsou různé (a zároveň různé od topologie indukované).

Ukážeme že definice 17 a 18 jsou ekvivalentní.

17⇒18: Je-li M vnořená podvarieta ve smyslu definice 17, pak dvojice (M, i), kde i je kanonická inkluze je vnořenou podvarietou ve smyslu definice 18, neboť kanonická inkluze je vždy injektivní.

18 ⇒17: Nechť dvojice (M, i) je vnořenou podvarietou ve smyslu definice 18, pak na obraze $i(M)$ můžeme pomocí i zavést hladkou strukturu. Jak? Nechť $i' : M \to i(M)$ je zobrazení i zúžené na obraz $i(M)$. Uvažujme na $i(M)$ finální topologii a ke každé mapě (U, u) na M vezmeme mapu $(i(U), u \circ i'^{-1})$ na $i(M)$ (neboť i' je bijekce). S takto zavedenou hladkou strukturou na $i(M)$ je zobrazení $i' : M \to i(M)$ zřejmě difeomorfismus. $i(M)$ je podmnožinou N a s uvažovanou hladkou strukturou na $i(M)$ je kanonická inkluze $\iota : i(M) \to N$ vnoření, neboť $\iota = i \circ i'^{-1}$. Tedy M je, až na difeomorfismus, vnořenou podvarietou ve smyslu definice 11.

♡

Co se týče definice 19, pokud má autor na mysli „definiční obor konkrétního vnoření spolu s hladkou strukturou“ pak je tato definice ekvivalentní definicím 17 a 18, v opačném případě je to podobná blbost jako definice 20 a 21.

5 Embedding (imbedding) — vložení (poprvé)

Podle anglického slovníku slovo *embed* znamená *pevně zasadit, zapustit, usadit se*, v matematickém slovníku je jako překlad slova *embedding* i *imbedding* uvedeno *vnoření* (stejně jako u slova immersion), matematici však užívají *vložení*. Nevím, proč se někde používá slova *imbedding* a jestli vůbec takové slovo v angličtině existuje. Myslím, že slovo *imbedding* se do matematické terminologie dostalo omylem a znamená to stejné jako *embedding* (překlep sekretářky — asi si spletla pravou a levou ruku).

Definice 22 *Vnoření $f : M \to N$, které je současně homeomorfismem na svůj image $f(M)$, uvažovaný s indukovanou topologií, se nazývá* vložením. *(viz [1], [5], [7]).*

Definice 23 Vložením *nazveme takové injektivní vnoření $f : M \to N$, že ke každému $x \in M$ existují adaptované souřadnice (viz definice 14) (U, φ), $x \in U$, (V, ψ), $f(x) \in V$, $V \subset f(U)$ tak, že*

$$f(V) = f(M) \cap V. \qquad (2)$$

(viz [8]).

Poznámka: Mohlo by se zdát, že podmínka injektivnosti plyne z vlastosti (2) a tudíž je nadbytečná, ale není tomu tak. Uvažme reálnou osu R namotanou na S^1 vztahem $R \ni t \to (\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2$. Zobrazení splňuje (2) a přitom není injektivní.

Také by se mohlo zdát, že požadavek adaptovanosti souřadnicových systémů je nadbytečný, ale není. Uvažme zobrazení $f : (0, 2\pi) \ni t \to (\sin^3 t, \sin t \cos t) \in \mathbf{R}^2$, které zřejmě není vložením ve smyslu definice 23. Přesto je pro globální souřadnicové systémy $((0, 2\pi), \mathrm{id}_{(0,2\pi)})$ a $(\mathbf{R}^2, \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$ podmínka (2) splněna.

Definice 24 Vložením *nazýváme takové injektivní vnoření $f : M \to N$, pro které finální topologie na $f(M)$ splývá s indukovanou.*

Ekvivalence definice 22 a 24 je zřejmá, dokážeme tedy ekvivalenci 22 a 23:

22⇒ 23 Předpokládejme, že zobrazení f je homeomorfismem na svůj image, opatřený indukovanou topologií. Pak každá otevřená množina $U \subset M$ se zobrazí na množinu tvaru $f(U) = W \cap f(M)$, kde W je otevřená v N. Nechť $x \in M$ a (U, φ), (V, ψ) jsou adaptované souřadnicové systémy k f v bodě x. Platí $f(U) \subset V \cap f(M)$ a současně $f(U) = W \cap f(M)$, tedy $W \subset V$. V případě, kdy $W \subset V$ můžeme místo souřadnicový systém (V, ψ) nahradit $(W, \psi|_W)$ a tím získat systémy adaptované k f a splňující podmínku (2).

23⇒ 22 Nechť $f' : M \to f(M)$ je zobrazení, které vznikne zúžením f. Ukážeme spojitost f' (v indukované topologii na $f(M)$). Zvolme libovolné okolí V' bodu $f'(x)$, $V' = W \cap f(M)$, ze spojitosti $f : M \to N$ nalezneme okolí U' bodu x tak, že $f(U') \subset W$ a tedy $f'(U') \subset V'$.

Ukážeme spojitost f'^{-1}. Nechť (U, φ), (V, ψ) jsou adaptované souřadnice v bodě x splňující podmínku (2). Zvolme libovolné okolí U' bodu x. Je-li $U \subset U'$, pak $f'^{-1}(V \cap f(M)) \subset U'$ a důkaz je hotov. Předpokládejme tedy, že $U' \subset U$, $U' \neq U$. Pak $(U', \varphi|U')$, (V, ψ) jsou také adaptované k f, tj. souřadnicové vyjádření má tvar $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : (x^1, \ldots, x^m) \to (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$. Označme $W = \psi^{-1}(\varphi(U') \times o)$, kde o je okolí bodu $0 \in \mathbf{R}^{n-m}$ takové, že $(\varphi(U') \times o) \subset \psi(V)$. Ukážeme nyní platnost podmínky $f'^{-1}(W \cap f(M)) = U'$ ze které již plyne spojitost f'^{-1}. Předpokládejme, že existuje $y \in W \cap f(M)$, pro které $f'^{-1}(y) \notin U'$, pak nutně $\psi(y) \notin \varphi(U') \times 0_{\mathbf{R}^{n-m}}$ a tedy také $f'^{-1}(y) \notin U$, současně však $y \in V$. Dostáváme spor s předpokladem, že adaptované systémy (U, φ), (V, ψ) splňují podmínku (2).

♡

Definice 25 *Injektivní vložení nazýváme* vložením. *(viz [4]).*

Příklad 3: Defnice 24 není ekvivalentní s předchozími. Například injektivní vnoření $f : (0, 2\pi) \ni t \to (\sin^3 t, \sin t \cos t) \in \mathbf{R}^2$ zmíněné výše, není vložením ve smyslu definic 22 a 23. Finální topologie určená zobrazením f se liší od topologie indukované z $\mathbf{R}^2$.

Příklad 4: Uvažujme disjunktní sjednocení $M = \cup_{i=1}^{\infty}\mathbf{R}$ a zobrazení $f : M \ni t_i \to (q_i, t_i) \in \mathbf{R}^2$, $q_i \in Q$. (Spočetně mnoho reálných os ztotožníme s přímkami rovnoběžnými s osou y a protínajícími osu x postupně ve všech racionálních číslech - těch je také spočetně mnoho). Množina racionálních čísel je ovšem hustá v $\mathbf{R}$, finální topologie se bude lišit od indukované. Opět máme příklad injektivního vnoření, které není vložením ve smyslu definicí 22 a 23.

Poznámka: Definice 24 je také použita pro vložení v [15]. Autor však rozlišuje případy, kdy finální topologie na obraze je totožná s indukovanou a kdy není, jak uvidíme dále v kapitole podvarieta.

Nyní přejdeme k definici podvariety, nebo též vložené podvariety. Další definice pojmu embedding uvedeme (z důvodu, které jistě po přečtení pochopíte) až v kapitole následující.

6 Submanifold — podvarieta

Definice 26 Vloženou podvarietou *nazýváme obraz vložení. (viz [8], [7], [5]).*

Definice 27 Podvarietou *nazýváme obraz injektivního vnoření. (viz [4]).*

Definice 26 a 27 jsou množinové, tedy nicneříkající.

Definice 28 *Množinu $M \subset N$ nazýváme* podvarietou*, jestliže kanonická inkluze $i : M \to N$ je injektivní vnoření. Je-li navíc topologie na M totožná s indukovanou, pak M nazýváme* regulární podvarietou*. (viz [15])*

Definice 29 Podvarietou *M variety N nazveme takovou podmnožinu, že kanonická inkluze je vložením (ve smyslu definic 22-24). (viz [2] [12]).*

Je vidět, že rozdíl mezi definicemi 28 a 29 je pouze terminologický.

Definice 30 Podvarietou *M variety N se nazývá taková podmnožina, že ke každému $x \in M$ existuje souřadnicový systém (U, φ), $x \in U$ pro který platí $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap (\mathbf{R}^m \times 0_{\mathbf{R}^{n-m}})$. Množinu M pak navíc uvažujeme s indukovanou hladkou strukturou m-rozměrné variety (danou atlasem $(U_i \cap M, \varphi_i|_{U_i \cap M})$, kde (U_i, φ_i) probíhá atlas n-rozměrné variety N). (viz [3]).*

Ekvivalenci posledních dvou definic lze dokázat poměrně snadno s použitím definice 23 pro vložení.

$\heartsuit$

Pro ilustraci uvádíme zkráceně definici podvariety pro případ nekonečněrozměrných variet.

Definice 31 *Nechť M je podmnožina variety N taková, že pro každý bod $y \in M$ existuje souřadnicový systém (V, ψ) na N, $y \in V$ (ve smyslu definice 9), že ψ je izomorfismem (difeomorfismem) V na součin $V_1 \times V_2$, kde V_1 je otevřená v nějakém Banachově prostoru E_1 a V_2 je otevřená v nějakém Banachově prostoru E_2 a platí $\psi(M \cap V) = V_1 \times a_2$ pro nějaký bod $a_2 \in V_2$. Pak množinu M opatřenou indukovanou hladkou strukturou (podrobněji viz [11]) nazýváme* podvarietou.

7 Embedding — vložení (podruhé)

Definice 32 Vložení *je takové injektivní hladké zobrazení* $M \to N$*, že* $f(M) \subset N$ *je podvarieta (ve smyslu definice 30) a zúžené zobrazení* $f' : M \to f(M)$ *je difeomorfismus. (viz [3]).*

Poznámka: Předpoklad injektivnosti a hladkosti zobrazení f je nadbytečný, neboť plyne z požadavku difeomorfnosti f'.

Definice 32 je ekvivalentní definicím 22-24. Důkaz je opět snadný.

♡

8 Na závěr něco k zamyšlení

Zobrazení topologických prostorů se nazývá *vlastní*, jestliže vzor každé kompaktní množiny je kompaktní množina. Platí věta (viz [7]), že každé vlastní injektivní vnoření je současně vložením (ve smyslu 22-24 a 32). Je to také naopak? Lze o každém vložení prohlásit, že je vlastní? Pokud ano, máme hned na světě novou definici pojmu vložení — vlastní injektivní vnoření. Nebo se pokusíte najít protipříklad?

9 A další přidružené pojmy

9.1 Univerzální vlastnost

9.2 Iniciální podvarieta

Reference

[1] L. Conlon: Differentiable Manifolds, A 1st course, 1993

[2] CRC Concise Encyclopedia of Mathematics

[3] I. Kolář, P. Michor, J. Slovák: Natural Operations in Differential Geometry, 1993

[4] M. Nakahara: Geometry, Topology and Physics

[5] J. Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis

[6] T. Okubo: Differential Geometry

[7] Hawking, Ellis: The Large Scale Structure of Space-Time

[8] L. Klapka: Geometrie, učební text, Opava

[9] D. Krupka: Většina jeho starších textů

[10] D. Krupka: Některé jeho novější texty

[11] S. Lange: Differential and Riemannian manifolds, 1996

[12] D. Krupka, J. Janyška: Lectures on Differential Invariants

[13] P. Michor: www....

[14] J. Musilová: Integrování na varietách (text k přednášce)

[15] T. Okubo:Differential Geometry