Předmluva

Tento text vzniká na základě diskusí, vedených v semináři „Čtení knihy Natural Operations in Differential Geometry, autorů I. Kolář, P. Michor a J. Slovák", konaném každý čtvrtek v 9.00 v posluchárně F3. Knihu lze nalézt mj. na www.math.muni.cz/˜slovak. Text zatím nemá žádnou rozumnou formu (a možná ani nebude mít), je sepisován zejména proto, aby účastníci nezapomněli, o čem vlastně seminář byl. Mohl by však být užitečný pro začátečníka v diferenciální geometrii, který se rozhodl knihou též prokousat. Číslo u každé podkapitoly je odkazem na podkapitolu v knize, ke které se náš text vztahuje (proto se některá čísla objevují víckrát a jiná vůbec - to když jsme k příslušné podkapitole nevedli žádné diskuse).

Účastníci

1 Differentiable manifolds

1.1 Lokální homeomorfnost

Existuje několik definic pojmu *lokální homeomorfnost s* $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^n$ rozumíme vždy s topologií přirozenou, resp. jeho podmnožiny s topologií indukovanou, nebude-li řečeno jinak).

Def.1 Topologický prostor M je *lokálně homeomorfní s* $\mathbf{R}^n$, jestliže ke každému $x \in M$ existuje otevřené okolí U bodu x a homeomorfismus $u : U \to u(U)$ na otevřenou podmnožinu v $\mathbf{R}^n$.

Def.2 Topologický prostor M je *lokálně homeomorfní s* $\mathbf{R}^n$, jestliže ke každému $x \in M$ existuje otevřené okolí U bodu x a homeomorfismus $u : U \to \mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$.

Ukážeme, že definice jsou ekvivalentní. Zřejmě $\mathbf{R}^n$ je otevřená v $\mathbf{R}^n$ a tedy lokální homeomorfnost s $\mathbf{R}^n$ ve smyslu definice 2. je též lokální homeomorfnost s $\mathbf{R}^n$ ve smylu definice 1. Naopak, nechť $u : U \to u(U)$ je homeomorfismus okolí bodu x na otevřenou množinu v $\mathbf{R}^n$, zvolme otevřený kvádr K, tak, že $f(x) \in K$ a $K \subset u(U)$ (existence takového kvádru plyne s vlastností přirozené topologie), pak $u|_{u^{-1}(K)} : u^{-1}(K) \to K$ je homeomorfismus. Dokážeme, že otevřený kvádr je homeomorfní s $\mathbf{R}^n$: zobrazení tan : $(-\pi, \pi) \to \mathbf{R}$ je zřejmě spojitá otevřená bijekce, a tedy homeomorfismus otevřeného intervalu na $\mathbf{R}$, odtud již plyne, že každý otevřený interval resp.

kvádr je homeomorfní s $\mathbf{R}$ resp. $\mathbf{R}^n$. Tedy celkem dostáváme, že množina $u^{-1}(K)$ je otevřené okolí bodu x homeomorfní s $\mathbf{R}^n$ (neboť složením dvou homeomorfismů dostaneme opět homeomorfismus) a tedy M je lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$ ve smyslu definice 2.

$\heartsuit$

1.1 Topologicá varieta

Existuje několik definic pojmu *topologická varieta.*
Def.1 *Topologická varieta* je Hausdorffův topologický prostor druhého typu spočetnosti, lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$.
Def.2 *Topologická varieta* je separabilní metrizovatelný topologický prostor, lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$.
Def.3 *Topologická varieta* je separabilní Hausdorffův topologický prostor, lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$.

K dalším definicím se dostaneme později, nyní ukážeme, že tyto tři definice jsou ekvitalentní. 1 $\Rightarrow$ 2: Prostor lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$ je zřejmě lokálně kompaktní (každý bod má okolí, jehož uzávěr je kompaktní množina) a vzhledem k Hausdorffovosti a spočetné bázi topologie je jako důsledek Nagatova-Smirnovova teorému (viz [1]) metrizovatelný. 2 $\Rightarrow$ 3: Každý metrizovatelný prostor je Hausdorffův. 3 $\Rightarrow$ 1: Ukážeme, že z každého otevřeného pokrytí lokálně kompaktního separabilního prostoru M lze vybrat spočetné podpokrytí (tedy M je Lindelőfův topologický prostor). Nechť (U_α), $\alpha \in I$ je libovolné pokrytí, A spočetná množina hustá v M. Pro každé $x \in A$, vybereme množiny U_i^x z pokrytí (U_α), pro které $x \in U_i^x$. Existuje okolí V bodu x, jehož uzávěr je kompaktní a které je pokryto množinami (U_i^x), lze tedy vybrat konečné podpokrytí $(U_n^x), n \in N$ množiny $\mathrm{cl}(V)$. Vzhelem k separabilitě množiny A pak získáme spočetné podpokrytí pro něž $\cup_{x\in A, n\in N} U_n^x = M$. Každý prostor lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$ je též lokálně metrizovatelný (každý bod má okolí, jehož topologie je indukována nějakou metrikou). Podle [1], str. 344, je každý lokálně kompaktní Hausdorffův Lindelőfův topologický prostor parakompaktní a podle [1], str. 266, je každý lokálně metrizovatelný (každý bod má okolí, které je metrizovatelný topologický prostor) parakompaktní prostor metrizovatelný a vzhledem k seperabilitě je také druhého typu spočetnosti (spočetnou bázi tvoří například otevřené koule se středy v bodech $x \in A$, kde A je spočetná hustá množina v M a poloměry $1/n$, $n \in N$.

Teď mě ale napadl přímý důkaz, že lokálně metrizovatelný separabilní prostor je druhého typu spočetnosti: Nechť U_α je libovolné pokrytí takové, že na každé z množin U_α existuje metrika, indukující topologii na U_α, z tohoto pokrytí můžeme vybrat spočetné podpokrytí U_i, pro $n \in N$ položíme $V^n_{x \in U_\alpha} = B(x, 1/n)$. Vybereme spočetný podsystém $\sigma = \{V^n_x | x \in A, n \in N\}$, kde A je spočetná hustá množina. Zřejmně každá množina ze σ je prvkem topologie na M a pro libovolný bod $x \in M$ a libovolné jeho okolí U existuje množina $V \in \sigma$ tak, že $x \in V \subset U$ (to už mi zřejmé nepřipadá), což je podle [1] postačující podmínka, k tomu, aby systém σ byl bází dané topologie.

$\heartsuit$

Důsledek: Topologická varieta je parakompaktní topologický prostor (a tedy ke každému pokrytí existuje s ním asociovaný hladký rozklad jednotkové funkce, důkaz viz [1]).

Příklad: Uvedeme příklad Hausdorffova prostoru lokálně homeomorfního s R^n, který není druhého typu spočetnosti (ani separabilní): $(\mathbf{R}, \tau_E) \times (\mathbf{R}, \tau_D)$, kde τ_E resp. τ_D je přirozená resp. diskrétní topologie a na součinu uvažujeme topologii součinu.

Dále uvedeme příklad prostoru druhého typu spočetnosti, lokálně homeomorfního s $\mathbf{R}^n$, který není Hausdorffův. Nechť $X = \mathbf{R} \cup \{a\}$ (disjunktní sjednocení reálné osy s bodem). Na X definujeme topologii následovně $\tau = \{V \subset \mathbf{R} | V$ je otevřená v přirozené topologii, $V' | a \in V', 0 \notin V', \exists$ okolí W bodu 0 v přirozené topologii tak, že $V' = W \setminus \{0\} \cup \{a\}\}$.

Poznámka: Také jsme v semináři ukazovali, že každý prostor druhého typu spočetnosti je separabilní (viz [1]). Existují ale separabilní prostory, které nejsou druhého typu spočetnosti, například $\mathbf{R}$ se Sorgenfreyovou topologií, jejíž bází jsou zleva uzavřené a zprava otevřené intervaly. (Důkaz viz [1])

1.1 Lokální konstantnost dimenze variety

Funkce $f : M \to \mathbf{R}$ je *lokálně konstantní*, jestliže je konstantní na každé souvislé komponentě topologického prostoru M. Ukážeme, že dimenze n topologické variety je lokálně konstantní. Nejprve ukážeme, že dimenze je konstantní na nějakém okolí každého bodu

$x \in M$. Předpokládejme, že bod x má okolí U_1 resp. U_2 lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$ resp. $\mathbf{R}^m$, u_1, u_2 jsou příslušné homeomorfismy. Pak $u_2 \circ u_1^{-1} : u_1(U_1 \cap U_2) \to u_2(U_1 \cap U_2)$ je homeomorfismus otevřené množiny v $\mathbf{R}^n$ na otevřenou množinu v $\mathbf{R}^m$, odtud $m = n$. Nechť dále K je souvislá komponenta variety M. Předpokládejme dvě různé hodnoty dimenze m a n, označme U_i^n, $i \in I_n$ resp. U_i^m, $i \in I_m$, všechna okolí bodů K, homeomorfní s $\mathbf{R}^n$ resp. $\mathbf{R}^m$. Systém pokrývá K a platí $(\cup_{i \in I_n} U_i^n) \cap (\cup_{j \in I_m} U_j^m) = \emptyset$, získáváme tedy spor se souvislostí K, proto $n = m$.

♡

1.1 Varieta v obecnějším smyslu

Autor má zřejmě na mysli topologický prostor lokálně homeomorfní s $\mathbf{R}^n$, bez dodatečného požadavku separability a Hausdorffovosti, tedy příklady uvedené výše jsou topologickými varietami v obecnějším smyslu.

1.4 Existence globálního reprezentanta germu

Ukážeme, že každý germ hladké funkce má reprezentanta na celé varietě. (až to dokážete, tak to pošlete mejlem)

1.6 Tečný vektor a derivace germů

V knize se mluví o „vektorovém prostoru všech derivací v x algebry germů hladkých funkcí v x, $C_x^\infty(M, \mathbf{R})$“, pojem derivace germu, však nebyl definován.

Def: *Derivací algebry germů v x* nazveme lineární zobrazení $D_x : C_x^\infty(M, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, pro které $D_x([f] \cdot [g]) = D_x([f]) \cdot g(x) + f(x) \cdot D_x([g])$. Definice je korektní, neboť nezávisí na volbě reprezentanta.

Pozn. k výpočtu 1.6:

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} X_x(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i}|_x.$$

1.7 Tečný bandl

V kapitole 1.7 se zavádí topologie na tečné bandlu požadavkem, aby zobrazení Tu_α byly homeomorfismy. Ukážeme, že takto definovaná topologie je určena jednoznačně. Nechť τ a τ' jsou dvě topologie na TM, pro něž Tu_α jsou homeomorfismy. Pak zobrazení $id : (TM, \tau) \to (TM, \tau')$ lze na nějakém okolí libovolného bodu vyjádřit jako složení dvou homeomorfismů: $id = Tu_\alpha^{-1} \circ Tu_\alpha$ a je tedy homeomorfismem (v každém bodě TM), tedy $\tau = \tau'$.

$\heartsuit$

Hausdorffovost je ukázána v knize, tedy zbývá dokázat separabilitu nebo metrizovatelnost nebo existenci spočetné báze, aby TM vyhovovalo definici topologické variety. Nalezneme třeba spočetnou bázi: ještě si to musím rozmyslet :-)

$\heartsuit$

1.8 Kinematická definice TM

Diskutujme zobrazení $\alpha : C^\infty(\mathbf{R}, M)/\sim \to TM$, definované

$$\alpha([c])(\mathrm{germ}_{c(0)} f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}|_0 f(c(t)),$$

ukážeme, že obraz $\alpha([c])$ je skutečně prvkem TM, tedy derivací v bodě $c(0)$.

1. Linearita - plyne okamžite z linearity $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,

2. Leibnitzova podmímka - plyne z toho, že také $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ tuto podmínku splňuje.

$\heartsuit$

Dále se píše, že zobrazení α je „kanonickou identifikací“ množiny všech možných vektorů rychlostí (tříd parametrizovaných křivek) a TM. Jelikož TM má strukturu vektorového bandlu, tj. je topologickou varietou, diferencovatelnou varietou, fibrovanou varietou a má strukturu vektorového prostoru na fibrech, tak aby mělo smysl TM kanonicky identifikovat s množinou tříd parametrizovaných křivek, je potřeba ji těmito strukturami opatřit také a poté dokázat, že kanonická identifikace α struktury zachovává. Tak se do toho pustíme: Uvažujme množinu tříd parametrizovaných křivek PK, nechť $\zeta, \eta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $[\zeta] = [\eta] \Leftrightarrow \zeta(0) = \eta(0) \wedge \exists$ souřadnicový systém $(U, \varphi), \varphi = (x^i), \zeta(0) \in U$, tak, že $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $\frac{\mathrm{d}x^i \varphi \circ \zeta}{\mathrm{d}t}|_0 = \frac{\mathrm{d}x^i \varphi \circ \eta}{\mathrm{d}t}|_0$. Označme $\pi : PK \ni [\zeta] \to \zeta(0) \in M$. Definujme zobrazení

$T\varphi : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbf{R}^n$ vztahem $T\varphi([\zeta]) = (\varphi(\zeta(0)), (\frac{\mathrm{d}x^i \varphi\circ\zeta}{\mathrm{d}t}|_0))$, toto zobrazení je korektně definováno (nezávisí na volbě reprezentanta) a je bijektivní. Tedy podobně jako výše můžeme ukázat, že existuje jediná topologie na PK, taková, že zobrazení $T\varphi$ (pro (U, φ) probíhající atlas na M) jsou homeomorfismy, tato topologie je Hausdorffova a má spočetnou bázi a soubor $(\pi^{-1}(U), T\varphi)$ splňuje axiomy atlasu, tedy definuje hladkou strukturu na PK (viz též teorém o diferencovatelné struktuře).

Dále pro $\zeta(0) = \eta(0)$ je následujícím vztahem definována struktura vektorového prostoru na každé z množin $\pi^{-1}(\{x\}), x \in M$: $[\zeta] + [\eta] = T\varphi^{-1}(\mathrm{pr}_1 \circ T\varphi([\zeta]), \mathrm{pr}_2 \circ T\varphi([\zeta]) + \mathrm{pr}_2 \circ T\varphi([\eta]))$ resp. $\kappa \cdot [\zeta] = T\varphi^{-1}(\mathrm{pr}_1 \circ T\varphi([\zeta]), \kappa \cdot \mathrm{pr}_2 \circ T\varphi([\zeta]))$, kde $\mathrm{pr}_1 : \varphi(U) \times \mathbf{R}^n \to \varphi(U)$ a $\mathrm{pr}_2 : \varphi(U) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ jsou projekce a $\mathbf{R}^n$ uvažujeme s kanonickou strukturou vektorového prostoru. Všechny skutečnosti uvedené v tomto odstavci je třeba prověřit. PK je tedy hladkou varietou, trojice (PK, π, M) je fibrovanou varietou a operace $+$ a $\cdot$ definují strukturu vektorového prostoru na fibrech. Prověření, že zobrazení α všechny tyto struktury zachovává již ponecháváme čtenáři (když se všechno indukuje z $\mathbf{R}^n$, tak to přece musí fungovat :-)).

♡

1.9 Adjoint

Uvažujme dva vektorové $\mathbf{R}$-prostory V a W. *Duálním součinem na V a W* nazveme bilineární zobrazení $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times W \to \mathbf{R}$. Dále uvažujme prostory V', W' s duálním součinem $\langle\cdot|\cdot\rangle'$. Nechť $f : V \to V'$ je zobrazení, zobrazení $\tilde{f} : W' \to W$ nazveme *adjoint* k f jestliže

$$\langle \tilde{f}(v')|w\rangle = \langle v'|f(w)\rangle'$$

pro každé $v' \in V'$ a každé $w \in W$. Je zřejmé, že zároveň f je adjoint k $\tilde{f}$. Dále ukážeme, že adjoint k lineárnímu zobrazení je opět lineární, nechť (e_i) je libovolná báze ve W, (c_j) libovolná báze ve V', $w \in W$ a $v' \in V$ libovolné vektory, pak

$$\langle \tilde{f}(v')|w\rangle = \langle v'|f(w)\rangle' = w^i \langle v'|f(e_i)\rangle' = w^i v'^j \langle c_j|f(e_i)\rangle' =$$
$$= w^i v'^j \langle \tilde{f}(c_j)|e_i\rangle = w^i \langle v'^j \tilde{f}(c_j)|e_i\rangle = w^i \langle \tilde{f}(v'^j c_j)|e_i\rangle.$$

♡

1.10 Vložení

V definici *vložení (embedding)* je požadavek injektivnosti a hladkosti nadbytečný, neboť plyne z dalšího.

1.12 Součiny

Definujeme součin dvou množin pomocí *univerzální vlastnosti*. **Def:** Množinu W spolu se zobrazeními $p_1 : W \to X, p_2 : W \to Y$ nazveme *součinem množin X a Y* jestliže pro každou množinu Z a libovolná zobrazení $\varphi : Z \to X$, $\psi : Z \to Y$ existuje jediné zobrazení $f : Z \to W$ tak, že $\varphi = p_1 \circ f$ a $\psi = p_2 \circ f$.

Je zřejmé, že kartézský součin množin spolu s projekcemi na první a druhou množinu tuto univerzální vlastnost splňuje vždy. Uvedeme si dva příklady, kdy tato vlastnost není splněna:
Př.1: $W = \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}_0^+$, $X = \mathbf{R}_0^+$, $Y = \mathbf{R}_0^+$, $p_1(x,y) = \max(x,y)$, $p_2(x,y) = \max(x,y)$, $Z = \mathbf{R}$, $\varphi = \mathrm{id}_\mathbf{R}$, $\psi = \mathrm{id}_\mathbf{R}$. Zobrazení f sice existuje, ale není jediné, požadavkům bude vyhovovat jak $f_1(x) = (0,x)$, tak $f_2(x) = (x,0)$.
Př. 2: $W = \mathbf{R}^2$, $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^2$, $p_1 = \mathrm{pr}_1$, $p_2 = \mathrm{id}$, $Z = \mathbf{R}$, $\varphi = \mathrm{id}$, $\psi(x) = (0,x)$. Zobrazení s požadovanými vlastnostmi neexistuje.

♡

Nyní se vraťme k formulaci v knize:„Z konstrukce tečného bandlu je ihned zřejmé, že $TM \longleftarrow^{T(\mathrm{pr}_1)} T(M \times N) \longrightarrow^{T(\mathrm{pr}_2)} TN$ je opět součin.“ Ukážeme, že $(T(M \times N), T\mathrm{pr}_1, T\mathrm{pr}_2)$ splňuje univerzální vlastnost. Nechť Z je libovolná množina, $\varphi : Z \to TM$, $\psi : Z \to TN$ libovolná zobrazení. Definujme $f : Z \to T(M \times N)$ vztahem $f(z) = [\zeta \times \eta]$, kde $\varphi(z) = [\zeta] \in TM$ resp. $\psi(z) = [\eta] \in TN$ je třída parametrizovaných křivek na M resp. na N. Uvedená konstrukce nezávisí na volbě reprezentanta a zřejmě platí $T\mathrm{pr}_1 \circ f = \varphi$ resp. $T\mathrm{pr}_2 \circ f = \psi$, neboť $T\mathrm{pr}_1([\zeta \times \eta]) = [pr_1 \circ (\zeta \times \eta)] = [\zeta]$ resp. $T\mathrm{pr}_2([\zeta \times \eta]) = [pr_2 \circ (\zeta \times \eta)] = [\eta]$. Ukážeme jednoznačnost zobrazení f, nechť $f' : Z \to T(M \times N)$ je zobrazení, pro které $T\mathrm{pr}_1 \circ f' = \varphi$ resp. $T\mathrm{pr}_2 \circ f' = \psi$. Pro nějaké $z \in Z$ označme $f'(z) = [\gamma]$, kde γ je křivka v $M \times N$. Pak $T\mathrm{pr}_1 \circ f'(z) = [\mathrm{pr}_1 \circ \gamma] = \varphi(z) = [\zeta]$ resp. $T\mathrm{pr}_2 \circ f'(z) = [\mathrm{pr}_2 \circ \gamma] = \psi(z) = [\eta]$, v souřadnicích se snadno ukáže, že $[\gamma] = [\zeta \times \eta]$. Trojice $(T(M \times N), T\mathrm{pr}_1, T\mathrm{pr}_2)$ je tedy součinem množin TM a TN. Moc ráda bych ale měla nějakou bezsouřadnicovou verzi důkazu, třeba pomocí operátorů derivace.

Abychom však množiny $T(M \times N)$ (kde $M \times N$ je opatřena hladkou strukturou součinu - viz konstrukce v knize) a $TM \times TN$ mohli kanonicky ztotožnit, je třeba nalézt bijekci, která zachovává struktury. Množinu $TM \times TN$ opatříme hladkou strukturou (indukovanou z TM a TN pomocí konstrukce uvedené v knize, z atlasů (U_i, φ_i) na TM resp. (V_j, ψ_j) na TN utvoříme atlas $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)$ — ukažte, že to je atlas), sčítání a násobení skalárem na fibrech zavedeme po složkách a projekce $\pi : TM \times TN \to M \times N$ je $\pi = \pi_{TM} \times \pi_{TN}$. Pak lze ukázat, že zobrazení $T\mathrm{pr}_1 \times T\mathrm{pr}_2 : T(M \times N) \to TM \times TN$ je izomorfismus vektorových bandlů (difeomorfismus, zachovávající vektorové operace na fibrech a projekci.)

♡

1.14 Tubular neighbourhood

1.15 Embedings

2 Submersions and immersions

Definicemi vnoření, vložení a podvarieta (vložená, vnořená i jiná) se zabývá samostatný dodatek, který nebyl sepsán v návaznosti na tuto knihu. (Naleznete jej na www.physics.muni.cz/˜pavla/vyuka, až bude hotov :-)

2.6 Lemma které neplatí

Chcete protipříklad? Stačí si vzít jakoukoli immerzi reálné osy do libovolné variety, která není injektivní např. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $f^1 = \cos t$, $f^2 = \sin t$. Zvolíme-li za libovolný souřadnicový systém (U, u) globální souřadnicový systém $(\mathbf{R}, \mathrm{id}_{\mathbf{R}})$ a libovolný bod $x \in \mathbf{R}$, tak je zřejmé, že k němu nenajdeme souřadnicový systém (V, v) na $\mathbf{R}^2$ s požadovanými vlastnostmi. Ve správném znění věty je třeba zaměnit „for any chart (U, u)" za „there exists a chart (U, u)".

2.8 Figure eight

V posledním řádku tohoto odstavce se říká:„...but the image of the *embedding* is in both cases just the figure eight.", podle definice se však v tomto případě právě o vložení (embedding) nejedná.

Reference

[1] Krupková, O., Krupka, D., Topologie a geometrie, skripta.