6.5 Integrování funkcí na varietě s metrickým polem

Pojem integrálu reálné funkce, definované na eukleidovském prostoru $\mathcal{R}^n$, jak jej známe z klasického integrálního počtu, je založen na existenci globálního souřadnicového systému na $\mathcal{R}^n$, ve kterém se dají provádět všechny úvahy; v případě potřeby nebo plyne–li z toho nějaká početní výhoda lze přejít transformací souřadnic k libovolnému jinému lokálnímu souřadnicovému systému. Chceme–li ovšem integrovat funkce, definované na „netriviální“ varietě, nedifeomorfní s $\mathcal{R}^n$, musíme odstranit těžkosti, spojené s neexistencí globálního souřadnicového systému. K tomu je třeba zavést některé nové topologické pojmy (porov. s kapitolami 1.4 a 1.5).

Uvažujme libovolnou n-rozměrnou varietu $\mathcal{X}$ a připomeňme si, že je topologickým prostorem (viz kapitola 1.3). *Otevřeným pokrytím* podmnožiny $\mathcal{Y}$ variety $\mathcal{X}$ nazveme každý systém $\mathcal{U}_\iota$, $\iota \in \mathcal{I}$ otevřených množin takový, že $\bigcup\limits_\iota \mathcal{U}_\iota \supset \mathcal{X}$. Každý atlas variety zadává současně její otevřené pokrytí. Podmnožina $\mathcal{Y}$ se nazývá kompaktní, jestliže každé její otevřené pokrytí $\mathcal{U}_\iota$ obsahuje *konečné podpokrytí*, tj. takový konečný podsystém $\mathcal{U}_{\iota_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\iota_k}$, že $\mathcal{U}_{\iota_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\iota_k} \supset \mathcal{X}$. Množina $\mathcal{Y}$ se nazývá *uzavřenou*, je–li její doplněk $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} | x \notin \mathcal{Y}\}$ otevřenou množinou. Definice dovoluje rozhodnout, které podmnožiny variety $\mathcal{X}$ jsou uzavřené.

Nechť f je reálná funkce na $\mathcal{X}$. Nejmenší uzavřená množina, vně které funkce f nabývá nulových hodnot, se nazývá *nosičem* funkce f a označuje se $supp\, f$.

Pomocí zavedených pojmů lze zformulovat jednu ze základních vět diferenciální topologie, kterou použijeme v definici integrálu na libovolné varietě s metrickým polem.

Věta o rozkladu jednotky. Ke každému atlasu $\{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota)\}$, $\iota \in \mathcal{I}$, na varietě $\mathcal{X}$ existuje takový systém reálných diferencovatelných funkcí f_κ, $\kappa \in K$, tzv. *rozklad jednotky*, asociovaný s daným atlasem, že

1. každá z množin $supp\, f_\kappa$ je kompaktní a leží v některém ze souřadnicových okolí daného atlasu,

2. ke každému bodu $x \in \mathcal{X}$ existuje jeho okolí, které má neprázdný průnik pouze s konečným počtem množin $supp\, f_\kappa$,

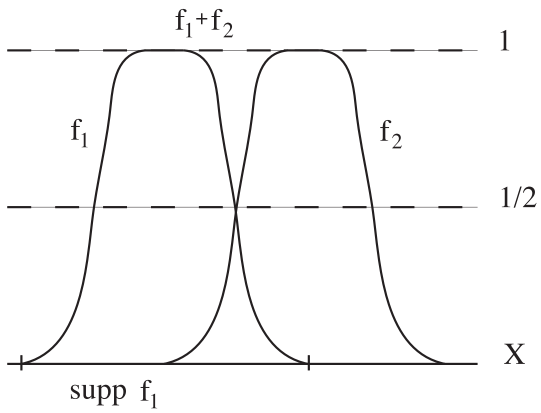
3. pro každé $\kappa \in K$ platí nerovnost $0 \leq f_\kappa(x) \leq 1$ pro všechna $x \in \mathcal{X}$ a
$$\sum_\kappa f_\kappa(x) = 1. \tag{6.56}$$

Všimněme si, že součet (6.56) je vzhledem k tvrzení 2. v každém bodě x konečný. Z 2. také plyne, že $\bigcup\limits_\kappa supp\, f_\kappa = \mathcal{X}$.

Větu o rozkladu jednotky zde ovšem nebudeme dokazovat [9]. Doporučujeme čtenáři, aby se pro její pochopení vrátil v nutné míře k základním topologickým

[9] Choquet, Sternberg

pojmům, které jsme již zavedli dříve (viz např. kapitola 1, pozn.3). Instruktivní obrázek, charakterizující popsaný rozklad (6.56) funkce na $\mathcal{X}$, rovné jedné v každém bodě $x \in \mathcal{X}$, možno nakreslit snad pouze v případě, kdy za „model“ variety $\mathcal{X}$ vezmeme přímku nebo úsečku (viz obr.18).



Obr. 18. Rozklad jednotky.

Připomeňme si nyní klasickou formuli pro *záměnu proměnných* v určitém integrálu [10]. Uvažujme integrační obor $\mathcal{C}$ v $\mathcal{R}^n$ a vzájemně jednoznačně diferencovatelné zobrazení $\zeta : \mathcal{C} \to \mathcal{R}^n$. Pak pro libovolnou spojitou funkci $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ platí

$$\int\limits_{\zeta(\mathcal{C})} f = \int\limits_{\mathcal{C}} (f \circ \zeta)|\mathcal{J}(\zeta)|, \tag{6.57}$$

kde $|\mathcal{J}(\zeta)|$ označuje absolutní hodnotu Jakobiánu zobrazení ζ (viz (1.1)), uvažovaného jako funkce bodu oblasti $\mathcal{C}$.

Po těhto přípravných úvahách můžeme přejít k teorii integrálu. Předpokládejme, že na varietě $\mathcal{X}$ je dáno metrické pole g. Definujme integrál funkce $\mathcal{X} \to \mathcal{R}$ přes libovolnou kompaktní podmnožinu $\mathcal{Y}$ variety $\mathcal{X}$, o které budeme nejdříve předpokládat, že celá leží v jistém souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$ s lokálními souřadnicemi $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Na $\mathcal{U}$ je metrické pole g reprezentováno funkcemi g_{ij} proměnných $x^1, \ldots, x^n$,

$$\begin{aligned} &g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \\ &\det(g_{ij}) \neq 0. \end{aligned} \tag{6.58}$$

Na $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{R}^n$ dostáváme reálnou funkci $f\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \mathcal{R}$, kterou můžeme integrovat přes množinu $\varphi(\mathcal{Y})$ v Riemannově smyslu. *Integrálem* funkce f *přes množinu* $\mathcal{Y}$ nazveme číslo

$$\int\limits_{\mathcal{Y}} f = \int\limits_{\varphi(\mathcal{Y})} (f\varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n)\sqrt{|\det(g_{ij})|}dx^1 \ldots dx^n. \tag{6.59}$$

[10] Spivak

Zvolíme–li na $\mathcal{U}$ jiné lokální souřadnice $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$, pak

$$
\begin{aligned}
&\tilde{g} = \tilde{g_{ij}} dy^i \otimes dy^j, \\
&\tilde{g_{ij}} = \tfrac{\partial x^k}{\partial y^i} \tfrac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}, \\
&\det(\tilde{g_{ij}}) = \left(\det\left(\tfrac{\partial x^k}{\partial y^l}\right)\right)^2 \det(g_{ij}).
\end{aligned}
\tag{6.60}
$$

Zde $det(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}) = \mathcal{J}_{\psi(x)}(\varphi\psi^{-1})$ je Jacobián zobrazení $\varphi\psi^{-1}$ (viz (1.1)), takže formule (6.57) pro záměnu proměnných vede na vztah

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\psi(\mathcal{Y})} (f\psi^{-1})(y^1, \ldots, y^n) \sqrt{|\det(\tilde{g_{ij}})|} dy^1 \ldots dy^n = \\
&= \int\limits_{\varphi(\mathcal{Y})} (f\varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n) \sqrt{\left(\det\left(\tfrac{\partial x^k}{\partial y^l}\right)\right)^2 |\det(g_{ij})|} \sqrt{\left(\det\left(\tfrac{\partial x^m}{\partial y^k}\right)\right)^2} dx^1 \ldots dx^n = \\
&= \int\limits_{\varphi(\mathcal{Y})} (f\varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n) \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \ldots dx^n.
\end{aligned}
\tag{6.61}
$$

Vidíme, že číslo (**??**) je definováno nezávisle na volbě lokálního souřadnicového systému, s pomocí kterého je určeno, tedy že integrál (**??**) je *invariantní* vůči záměnám souřadnic.

Nyní rozšíříme integrování funkcí na „větší“ oblasti, které nemusí ležet v jediném souřadnicovém okolí. Nechť $\mathcal{Y}$ je libovolná kompaktní podmnožina v $\mathcal{X}$. Vybereme na $\mathcal{X}$ atlas $\{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota)\}$, $\iota \in \mathcal{I}$, a s nimi asociovaný rozklad jednotky f_κ, $\kappa \in \mathcal{K}$. Víme, že ke každému bodu $y \in \mathcal{Y}$ existuje takové okolí $\mathcal{U}_y$ obsahující $\mathcal{Y}$, že pouze konečný počet množin $\mathcal{U}_\mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa$ je neprázdný (viz věta o rozkladu jednotky). Zvolme taková okolí $\mathcal{U}_y$ pro každé $y \in \mathcal{Y}$. Dostáváme otevřené pokrytí množiny $\mathcal{Y}$, které má vzhledem ke kompaktnosti $\mathcal{Y}$ konečné podpokrytí $\mathcal{U}_{y_1}, \ldots, \mathcal{U}_{y_k}$. Pouze konečný počet množin $\mathcal{U}_{y_1} \cap supp\, f_\kappa, \ldots, \mathcal{U}_{y_k} \cap supp\, f_\kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$, je neprázdných, takže pouze konečný počet množin $\mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa$ je neprázdných. *Integrálem funkce* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ *přes množinu* $\mathcal{Y}$ nyní nazýváme číslo

$$
\int\limits_{\mathcal{Y}} f = \sum_\kappa \int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot f_\kappa. \tag{6.62}
$$

Zde $\mathcal{Y}_\kappa = \mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa$ a součet integrálů na pravé straně, definované vztahem (6.59), je ve skutečnosti konečný. Je ovšem třeba dokázat, že integrál (6.62) nezávisí na volbě atlasu a s ním asociovaného rozkladu jednotky. Nechť $\{(\mathcal{V}_\lambda, y_\lambda)\}$ je jiný atlas a $\bar{f}_\kappa$ s ním asociovaný rozklad jednotky. Vzhledem k identitě (6.56) pro každé $\kappa \in \mathcal{K}$ platí

$$
f_\kappa = f_\kappa \cdot 1 = f_\kappa \cdot \sum_\nu \bar{f}_\nu = \sum_\nu f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu, \tag{6.63}
$$

takže

$$
\int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot f_\kappa = \int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot \left(\sum_\nu f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu\right) = \sum_\nu \int\limits_{\mathcal{Y}_{\kappa\nu}} f \cdot f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu, \tag{6.64}
$$

kde $\mathcal{Y}_{\kappa\nu} = \mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa \cap supp\, \bar{f}_\nu$. V této formuli poslední rovnost vyplývá z faktu, že integrál $\int_{\mathcal{Y}_\kappa} f \left(\sum_\nu f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu \right)$ je uvažován v pevném souřadnicovém okolí podobně jako (6.59). Celkově

$$\sum_\kappa \int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot f_\kappa = \sum_\kappa \sum_\nu \int\limits_{\mathcal{Y}_{\kappa\nu}} f \cdot f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu. \tag{6.65}$$

Ke stejnému výrazu bychom dospěli, kdybychom vycházeli z $\sum\limits_\nu \int\limits_{\mathcal{Y}_\nu} f \cdot \bar{f}_\nu$ a pak použili rozkladu jednotky f_κ. Tím je ukázáno, že integrál (6.62) je definován nezávisle na lokálních souřadnicích a na asociovaném rozkladu jednotky.

6.6 Lokální souřadnicové systémy na prostoročase

Jedním ze základních axionů OTR je, že lokální souřadnicové systémy na prostoročasu jsou fyzikání povahy v tom smyslu, že to jsou „pozorovatelé“ či „měřící přístroje“, určující časové a prostorové relace mezi fyzikálními událostmi. Jinými slovy to znamená, že každá volba přístrojů, měřících naše „smyslové“ prostorové a časové relace je vlastně volbou lokálního souřadnicového systému na prostoročasu.

Přitom je ovšem třeba mít na zřeteli, že při dané interpretaci lokálních souřadnicových systému resp. fyzikálních vztažných soustav dochází k zanedbání interakce mezi „pozorovatelem“ tj. přístroji a zkoumaným fyzikálním systémem, tedy že se předpokládá, že měření nenarušuje podstatně fyzikální procesy; obráceně se předpokládá, že také pozorovatel není narušován těmito procesy. Fyzikální oprávnění těchto předpokladů spočívá v tom, že všechna reálná měření jsou uskutečňována světelnými sygnály.

Se speciální volbou variety jsou často svázany speciální souřadnicové systémy. Tak např. na varietě $\mathcal{R}$ máme tzv. přirozené souřadnice (viz kapitola 1, pozn. 5), se sférou jsou svázány sférické souřadnice (viz např. kapitola 1, pozn. 10). Také v obecném případě variety s metrickým polem lze zavést jisté typy lokálních souřadnicových systémů, které lze použít pro usnadnění některých výpočtů. Zavedeme si některé z nich.