Obsah

1. Cliffordova algebra v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

1.1. Vnitřní součin. Vezměme vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ se standardní kvadratickou formou, tj. pozitivně definitní. Tato kvadratická forma určuje vnitřní součin, který je skalárním součinem, neboť je pozitivně definitní, tj.

$$a^2 = a \cdot a > 0, \quad a \neq 0.$$

Odtud získáme Schwartzovu nerovnost jako

$$\begin{aligned} (a + \alpha b)^2 &> 0 \\ a^2 + 2\alpha a \cdot b + \alpha^2 b^2 &> 0 \\ a^2 b^2 &\geq (a \cdot b)^2. \end{aligned}$$

Lze tedy definovat úhel mezi dvěma vektory jako

$$a \cdot b = |a||b| \cos \varphi.$$

1.2. „Vektorový“ součin. Jako binární operace existuje pouze v $\mathbb{R}^3$. a pomocí indexového zápisu v ortonormální bázi $[e_i]$ je dán jako

$$a \times b = a_i e_i \times b_j e_j = (a_i b_j \epsilon_{ijk}) e_k.$$

1.3. Vnější součin. Potřebujeme zobecnit vektorový součin tak, abychom nadrovinu dimenze $(n-1)$ neidentifikovali pomocí vektoru na ni kolmého, ale pomocí vnitřních vlastností této nadplochy. K tomu využijeme vnější součin, tj. orientovanou nadrovinu, jejíž plocha je dána obsahem (objemem) vymezeným generujícími vektory $a \wedge b \wedge \dots$. Tedy například pro rovinu určenou vektory a a b dostáváme $a \wedge b$ o velikosti $|a||b| \sin \varphi$, kde φ je úhel mezi vektory a a b.

Tento nový objekt, jehož vlastnosti ho nečiní ani skalárem ani vektorem, nazveme *bivektorem*. Uvedeme si některé vlastnosti vnějšího součinu.

(i) je antisymetrický (to plyne z geometrických úvah)

(ii) bivektory tvoří vektorový prostor, sčítání si lze jednoduše představit v $\mathbb{R}^3$, kde každé dvě roviny sdílí alespoň jeden společný směr. Ve více dimenzích to již obecně neplatí a má to zajímavě důsledky. Tato skutečnost je důsledkem toho, že každý bivektor v $\mathbb{R}^3$ lze získat vnějším součinem nějakých dvou vektorů, ale obecně to neplatí.

(iii) je distributivní vzhledem ke sčítání. Všimněme si, že

$$(a + \alpha b) \wedge b = a \wedge b,$$

tj. vnější součin není určen jednoznačně.

V $\mathbb{R}^3$ má vektorový prostor bivektorů dimenzi 3. Např v kanonické (a libovolné jiné) bázi v $\mathbb{R}^3$ dostáváme

$$a \wedge b = a_{[i} b_{j]} e_i \wedge e_j.$$

1.4. Geometrický součin. Grassmanův a Cliffordův nápad byl sjednotit vnitřní a vnější součin vektorů do jedné operace

$$ab = a \cdot b + a \wedge b.$$

Je třeba si hned uvědomit, že výsledkem této operace je obecně součet skaláru a bivektoru. Vidíme také, že

$$ba = a \cdot b - a \wedge b \neq ab$$

a z toho

$$a \cdot b = \tfrac{1}{2}(ab + ba), \quad a \wedge b = \tfrac{1}{2}(ab - ba).$$

Obecně nazýváme objekty, které jsou generovány geometrickým součinem *multivektory*. Uvedeme některé vlastnosti geometrického součinu.

(i) je asociativní, tedy $A(BC) = (AB)C = ABC$.

(ii) je distributivní vzhledem ke sčítání $A(B + C) = AB + AC$.

(iii) není komutativní (už v případě součinu vektorů).

(iv) čtverec vektoru $aa = a^2$ je skalár.

Poslední vlastnost postačuje k důkazu, že vnitřní součin dvou vektorů je skalár;

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 \Rightarrow a \cdot b = \tfrac{1}{2}\left[(a + b)^2 - a^2 - b^2\right],$$

což je skalár.

1.5. Geometrická algebra v $\mathbb{R}^2$. Vezměme ortonormální bázi v $\mathbb{R}^2$, danou $[e_1, e_2]$. Celá algebra je generována

$$1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2 = e_1 e_2.$$

Platí $e_2 e_1 = -e_1 e_2$,

$$\begin{aligned}
(e_1 \wedge e_2)e_1 &= e_1 e_2 e_1 = -e_2 e_1 e_1 = -e_2,\\
(e_1 \wedge e_2)e_2 &= e_1 e_2 e_2 = e_1,\\
e_1(e_1 \wedge e_2) &= e_2,\\
e_2(e_1 \wedge e_2) &= -e_1.
\end{aligned}$$

Dále platí, že $(e_1 \wedge e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -1$. Násobení bázovým bivektorem generuje rotace o $\pi/2$. Zřejmě dostáváme souvislost s komplexními čísly. Komplexní čísla mají v Gaussově rovině dvojí interpretaci; jednak určují body (jak je vidno z algebraického tvaru $z = \alpha e_1 + \beta e_2$) a jednak reprezentují rotace a dilatace (jak je vidno z goniometrického tvaru $Z = |r| \exp(\theta e_1 \wedge e_2) = \alpha + \beta e_1 \wedge e_2$).

Jak tedy získáme přirozenou korespondenci mezi těmito dvěma interpretacemi? Pro goniometrický tvar je dán preferovaný směr e_1 (abychom mohli odečítat úhly), tedy

$$\alpha + \beta e_1 \wedge e_2 = Z = e_1 z = e_1(\alpha e_1 + \beta e_2)$$

2. Kvadratické formy

Mějme vektorový prostor V nad reálnými $\mathbb{R}$ nebo komplexními $\mathbb{C}$ čísly (pokud na volbě tělesa čísel nezáleží, budeme používat označení $\mathbb{k}$), na němž je zadaná *kvadratická forma*, tj. zobrazení $g\colon V \to \mathbb{k}$, splňující následující podmínky

(i) $g(\alpha x) = \alpha^2 g(x)$, pro každé $\alpha \in \mathbb{k}$ a $x \in V$,

(ii) zobrazení $G\colon V \times V \to \mathbb{k}$ definované jako

$$G(x, y) = g(x + y) - g(x) - g(y), \tag{1}$$

kde $x, y \in V$, je bilineární formou na $V \times V$.

Tuto bilineární formu nazýváme *bilineární formou asociovanou s kvadratickou formou g* nebo také *polarizací g*. Tato forma je zřejmě symetrická.

2.1. Redukce kvadratické formy na součet čtverců. Zvolme bázi $\{e_i\}$, kde $i = \{1, \dots, n\}$ ve vektorovém prostoru V (pokud to jde, tj. pokud je například V vektorovým prostorem konečné dimenze).

Dále si povšimněme, že pokud je $\Bbbk$ číselné těleso s charakteristikou různou od $\chi \neq 2$, dostáváme

$$G(x, x) = g(2x) - g(x) - g(x) = 4g(x) - 2g(x) = 2g(x)$$

a za výše uvedeného předpokladu $(2 \neq 0)$

$$g(x) = \tfrac{1}{2} G(x, x). \tag{2}$$

Nyní můžeme pro libovolný vektor $x = x^i e_i$ a libovolnou kvadratickou formu g psát

$$g(x) = \tfrac{1}{2} G(x^i e_i, x^j e_j) = \tfrac{1}{2} G(e_i, e_j) x^i x^j \tag{3}$$

a s označením

$$g_{ij} = \tfrac{1}{2} G(e_i, e_j)$$

dostáváme

$$g(x) = g_{ij} x^i x^j. \tag{4}$$

V 1. *Každou kvadratickou formu g lze vyjádřit v takové bázi, kde je tato forma dána součtem čtverců souřadnic svého argumentu, tj. matice g_{ij} má diagonální tvar.*

Důkaz. Důkaz je konstruktivní a platí jak pro reálná, tak i komplexní čísla. Nechť jsou tedy dána čísla g_{ij} libovolně.

(a) Předpokládejme napřed, že alespoň jedno z čísel $g_{11}, g_{22}, \dots, g_{nn}$ je různé od nuly. Permutací prvků báze jednoduše dosáhneme toho, že toto nenulové číslo bude g_{11}. Uvažujme kvadratickou formu

$$g_1 = g - \frac{1}{g_{11}} (g_{11} x^1 + g_{12} x^2 + \dots + g_{1n} x^n)^2,$$

která již explicitně nezávisí na souřadnici x^1. provedeme-li transformaci

$$y^1 = g_{11} x^1 + g_{12} x^2 + \dots + g_{1n} x^n, \tag{5}$$

dostáváme

$$g = \frac{1}{g_{11}}(y^1)^2 + g_1,$$

přičemž g_1 je kvadratickou formou v souřadnicích $x^2, \ldots, x^n$. dále můžeme postupovat uplatněním výše uvedeného postupu na kvadratickou formu g_1 na vektorovém prostoru v_1.

(b) nastala tedy situace, ve které platí, že $g_{11} = g_{22} = \cdots = g_{nn} = 0$. pokud žádný z ostatních koeficientů není nenulový, jsme hotovi. předpokládejme tedy, že alespoň jeden z těchto koeficientů je nenulový. permutací prvků báze opět jednoduše docílíme toho, že tento koeficient je g_{12}. teď položíme

$$g_2 = g - \frac{2}{g_{12}}(g_{21}x^1 + g_{23}x^2 + \cdots + g_{2n}x^n)(g_{12}x^2 + g_{13}x^3 + \cdots + g_{1n}x^n).$$

Forma g_2 zřejmě explicitně nezávisí na souřadnicích x^1 a x^2. Položme tedy nyní

$$\begin{aligned} y^1 + y^2 &= g_{21}x^1 + g_{23}x^2 + \cdots + g_{2n}x^n, \\ y^1 - y^2 &= g_{12}x^2 + g_{13}x^3 + \cdots + g_{1n}x^n, \end{aligned}$$

a v nových souřadnicích y^1 a y^2 dostáváme

$$g = \frac{2}{g_{12}}\left((y^1)^2 - (y^2)^2\right) + g_2,$$

kde g_2 je kvadratickou formou v souřadnicích $x^3, \ldots, x^n$.

Pokud budeme opakovaně uplatňovat postupy (a) a (b) na formy g_1 a g_2, dostaneme po nejvýše n opakováních formu g do tvaru

$$g = a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 + \cdots a_n(y^n)^2. \tag{6}$$

Pokud byla čísla g_{ij} reálná, jsou zřejmě i čísla a_i reálná. Tím je tvrzení dokázáno. □

Pozn 1. Podobným postupem lze upravit rovněž antisymetrickou bilineární formu do jistého privilegovaného tvaru

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 \\
-1 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & 0 \\
 & & \ddots & & \\
0 & \dots\dots & 0 \quad 1 \quad 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 \quad -1 \quad 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots & & & 0
\end{pmatrix},$$

kterému se Darbouxův normální tvar. Ten tvoří základ lokálních úvah v symplektické geometrii.

Pokud jsou g_{ij} a tedy i a_i komplexní, můžeme provést transformaci

$$y^i \leftarrow \sqrt{a_i}\, y^i$$

a dostáváme kvadratickou formu

$$g = (y^1)^2 + (y^2)^2 + \cdots + (y^n)^2$$

jako součet čtverců souřadnic.

Pokud jsou naopak g_{ij} a tedy i a_i reálná, musíme rozlišovat kladná a záporná a_i tak, abychom odmocňovali nezáporná čísla. Transformací

$$y^j \leftarrow \sqrt{\pm a_i}\, y^i$$

dostáváme kvadratickou formu

$$g = (y^1)^2 + \cdots + (y^p)^2 - (y^{p+1})^2 - \cdots - (y^{p+q})^2, \qquad p + q \leq n$$

jako součet a rozdíl čtverců souřadnic.

2.2. Sylvesterův zákon setrvačnosti. V klasické literatuře se dokazuje tato základní věta.

V 2 (Sylvesterův zákon setrvačnosti). *V případě reálné kvadratické formy $q\colon V \to \mathbb{R}$ nezávisí počet kladných ani záporných čtverců souřadnic na způsobu redukce.*

Důkaz. Důkaz budeme provádět sporem. Předpokládejme proto, že jsme získali dvě různé redukce

$$g = (y^1)^2 + \dots + (y^p)^2 - (z^1)^2 - \dots - (z^q)^2,$$
$$g = (v^1)^2 + \dots + (v^r)^2 - (w^1)^2 - \dots - (w^s)^2.$$

Pro určitost předpokládejme, že například $p < r$. Zřejmě platí rovnost

$$(y^1)^2 + \dots + (y^p)^2 + (w^1)^2 + \dots + (w^s)^2 = (v^1)^2 + \dots + (v^r)^2 + (z^1)^2 + \dots + (z^q)^2.$$

Uvažujme lineární rovnice

$$y^1 = 0, \dots, y^p = 0, w^1 = 0, \dots, w^s = 0.$$

Z předpokladu vyplývá, že $p + s < r + s \leq n$, tyto rovnice mají alespoň jedno nenulové řešení $x^1, \dots, x^n$. Pro toto řešení ovšem zároveň platí

$$v^1 = 0, \dots, v^r = 0, z^1 = 0, \dots, z^q = 0$$

a je tedy možné splnit soustavu $r + s$ nezávislých rovnic

$$v^1 = 0, \dots, v^r = 0, w^1 = 0, \dots, w^s = 0$$

řešením soustavy menšího počtu $p+s$ rovnic. To jasně nelze a jediná možnost, která zůstává otevřená, je položit $p = r$ a $q = s$. □

O kvadratické formě g řekneme, že je nedegenerovaná, je-li k ní asociovaná bilineární symetrická forma G nedegenerovaná. V takovém případě je zřejmě $p + q = n$.

3. Cliffordova algebra

3.1. Obecnosti o algebrách. Nechť A je vektorový prostor nad tělesem čísel $\Bbbk$ (skalárů) a je dáno bilineární zobrazení $A \times A \to A$. Tomuto zobrazení říkáme *násobení*. Potom dvojici $(A, \ )$ nazýváme *distributivní algebrou* nad tělesem $\Bbbk$, pokud je násobení jasné z kontextu, píšeme často pouze A. Pokud je násobení asociativní, tj. platí-li

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \tag{7}$$

nazýváme takovou algebru *asociativní.* V opačném případě nazýváme algebru A *neasociativní.*

Pozn 2. Všimněme si, že v rovnosti (7) jsou dvě operace násobení, skalární násobení $\Bbbk \times A \to A$ a násobení v algebře $A \times A \to A$. Vzhledem k tomu, že většinou značíme skaláry řeckými písmeny a vektory latinkou, těžko může dojít k nedorozumění.

3.2. Základní pojmy. Nechť V je vektorový prostor nad komutativním tělesem $\Bbbk$ a g je kvadratická forma na V. Nechť je dále

$$\mathscr{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigotimes^k V$$

tenzorová algebra vektorového prostoru V. Definujeme v této algebře (oboustranný) ideál $\mathscr{I}(V,g)$ generovaný pomocí relace $v \otimes v - g(v)1$ pro $v \in V$. Potom *Cliffordova algebra* vektorového prostoru V s kvadratickou formou g je faktorová algebra

$$\mathscr{C}(V,g) = \mathscr{T}(V)/\mathscr{I}(V,g).$$

Existuje přirozené vložení

$$\iota(g)\colon V \hookrightarrow \mathscr{C}(V,g), \tag{8}$$

které je určeno obrazem $V = \bigotimes^1 V$ faktorové projekce

$$\pi(g)\colon\ \mathscr{T}(V) \to \mathscr{C}(V,g). \tag{9}$$

Ukážeme, že $\pi(g)|_V$ (restrinkce definičního oboru na V) je injektivní. Řekneme, že prvek $T \in \mathscr{T}(V)$ je *homogenní stupně* k (a píšeme $\deg T = k$), pokud $T \in \bigotimes^k V$. Je zřejmé, že každý prvek z $\mathscr{T}(V)$ lze vyjádřit jako konečný součet prvků homogenních. Pro důkaz injektivity potřebujeme ukázat, že $\mathscr{I}(V,g) \cap V = 0$. Každý prvek ideálu $I \in \mathscr{I}(V,g)$ můžeme zapsat jako konečný součet homogenních prvků

$$I = \sum_i A_i \otimes (v_i \otimes v_i - g(v_i)1) \otimes B_i \tag{10}$$

a můžeme předpokládat, že A_i a B_i jsou homogenní. Jelikož $I \in V$ musí platit

$$\sum_{\deg A_i + \deg B_i = \max} A_i \otimes v_i \otimes v_i \otimes B_i = 0.$$

Důsledkem této rovnice je

$$\sum_{\deg A_i + \deg B_i = \max} A_i \otimes g(v_i) \otimes B_i = 0$$

a nyní již lze pokračovat induktivně a nakonec dostaneme $I = 0$.

Můžeme také říct, že algebra $\mathscr{C}(V,g)$ je generována z vektorového prostoru $V \subset \mathscr{C}(V,g)$ a prvku $1 \in \mathscr{C}(V,g)$ s uvážením rovnosti

$$v^2 = vv = g(v)1 \tag{11}$$

pro $v \in V$. Pro $\chi(\Bbbk) \neq 2$ a $v, w \in V$ je

$$\tfrac{1}{2}(vw + wv) = G(v,w), \tag{12}$$

kde $G(v,w)$ je bilineární forma asociovaná s kvadratickou formou g (fyzikálně též polarizace g).

V 3. *Buď $f\colon V \to \mathscr{A}$ lineární zobrazení do asociativní algebry s jedničkou $\mathscr{A}$ nad tělesem $\Bbbk$ takové, že*

$$f(v)f(v) = g(v)1 \tag{13}$$

pro všechna $v \in V$. Potom je možno f jednoznačně rozšířit na homomorfizmus $\Bbbk$-algeber s jedničkou $\tilde{f}\colon \mathscr{C}(V,g) \to \mathscr{A}$.

Důkaz. Každé lineární zobrazení lze rozšířit na jediný homomorfizmus

$$\bar{f}\colon \mathscr{T}(V) \to \mathscr{A}.$$

Z vlastnosti (13) plyne, že $\bar{f} = 0$ na ideálu $\mathscr{I}(V,g)$, takže můžeme $\bar{f}$ faktorizovat na $\mathscr{C}(V,g)$. □

V 4. *Buďte V vektorový prostor nad polem $\Bbbk$, g kvadratická forma na V, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ asociativní algebry s jedničkou, $i\colon V \hookrightarrow \mathscr{B}$ takové vložení, že každé lineární zobrazení $F\colon V \to \mathscr{A}$ s vlastností $F(v)F(v) = g(v)1$ lze jednoznačně rozšířit na homomorfizmus algeber $\tilde{F}\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$. Potom $\mathscr{B}$ je izomorfní Cliffordově algebře $\mathscr{C}(V,g)$.*

Důkaz. Izomorfizmus

$$\mathscr{C}(V,g) \supset V \to i(V) \subset \mathscr{B} \tag{14}$$

zřejmě indukuje také izomorfizmus algeber $\mathscr{C}(V,g) \cong \mathscr{B}$. □

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\iota"'] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathscr{C}(V,g) \arrow[r, equal] & \mathscr{B} \arrow[r, "\tilde{F}"'] & \mathscr{A}
\end{tikzcd}$$

Obrázek 1: K V 4