Matematické základy obecné teorie relativity
Pomocný učební text

Prof. RNDr. Demeter Krupka, DrSc.

Brno, 1979

Obsah

Kapitola 1

Diferencovatelné variety

V této kapitole jsou obsaženy informace z diferenciální topologie, potřebné pro pochopení základů OTR. Zavádíme nejnutnější pojmy z topologie, bez kterých se dnešní relativita stěží obejde, pojem diferencovatelné variety a souřadnic na ní, ukazujeme, jak se pomocí souřadnic konstruují zobrazení variet. Čtenář je veden k samostatnému zacházení s pojmy jako množina, kartézský součin, zobrazení, varieta, transformace souřadnic, euklidovský prostor, atd. Výklad je doplněn několika poznámkami o podkladových varietách tzv. prostoročasů OTR.

1.1 Topologie

Topologií na množině $\mathcal{X}$ rozumíme systém τ podmnožin množiny $\mathcal{X}$, splňující tyto axiomy:

1. Prázdná množina $\emptyset$ a množina $\mathcal{X}$ patří do systému τ.

2. Průnik libovolných dvou množin z τ je prvkem systému τ.

3. Sjednocení libovolného podsystému množin z τ je prvkem systému τ.

Množina $\mathcal{X}$ s danou topologií τ se nazývá *topologickým prostorem.* Prvky systému τ se nazývají *otevřenými množinami.* Každá otevřená množina, obsahující daný bod x, se nazývá *okolím* bodu x. Topologický prostor $\mathcal{X}$ se nazývá *hausdorffovským*, jestliže ke každé dvojici x_1, x_2 různých bodů z $\mathcal{X}$ existují otevřené množiny $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ tak, že $x_1 \in \mathcal{U}$, $x_2 \in \mathcal{V}$ a $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Poznámky a úlohy

1. Na libovolné podmnožině $\mathcal{Y}$ topologického prostoru $\mathcal{X}$ lze zadat topologii takto: Je–li τ topologie prostoru $\mathcal{X}$, pak za otevřené množiny na $\mathcal{Y}$ vezmeme všechny množiny typu $\mathcal{U} \cap \mathcal{Y}$, kde $\mathcal{U} \in \tau$. Vzniklá topologie se nazývá *indukovanou.* Podmnožina $\mathcal{Y}$

s indukovanou topologií se nazývá *topologickým podprostorem* topologického prostoru $\mathcal{X}$.

2. Připomeňme si, že symbol $\{x \in \mathcal{X}|\mathcal{Q}\}$ označuje podmnožinu všech prvků dané množiny $\mathcal{X}$, které mají určitou vlastnost $\mathcal{Q}$. Zavedeme velmi často užívaný pojem euklidovského prostoru. Označme $\mathcal{R}^n$ množinu všech uspořádaných n–tic $x = (x^1, \dots, x^n)$ reálných čísel. *Otevřenou krychlí* v $\mathcal{R}^n$ nazveme každou podmnožinu množiny $\mathcal{R}^n$ tvaru $\mathcal{K} = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{R}^n | a^i < x^i < b^i\}$, kde a^i, b^i jsou reálná čísla taková, že $a^i < b^i$, a $i = 1, 2, \dots, n$. Podmnožinu $\mathcal{U}$ množiny $\mathcal{R}^n$ nazveme *otevřenou*, jestliže ke každému bodu $x \in \mathcal{U}$ lze vybrat otevřenou krychli $\mathcal{K}_x$, obsahující x, tak, že $\mathcal{K}_x \subset \mathcal{U}$. Systém τ všech otevřených množin definuje topologii na množině $\mathcal{R}^n$ nazývanou *přirozenou (euklidovskou) topologií*. Množina $\mathcal{R}^n$ s touto topologií se nazývá *n–rozměrným euklidovským prostorem* Stejnou topologii τ dostaneme, když místo otevřených krychlí budeme uvažovat *otevřené koule* $\mathcal{S} = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{R}^n | ((x^1 - a^1)^2 + \dots + (x^n - a^n)^2)^{1/2} < r\}$, ($a^i, r$ reálná čísla, $r > 0, i = 1, \dots, n$). $\mathcal{R}^1$ nazveme *přímkou*, $\mathcal{R}^2$ *rovinou*. Pro zjednodušení píšeme obvykle $\mathcal{R}$ místo $\mathcal{R}^1$. Stojí za povšimnutí, že axiomy 1., 2. a 3. představují zobecnění základních vlastností otevřených množin v euklidovských prostorech.

3. Považujeme za potřebné upozornit na definici okolí bodu; definice nemá nic společného s tím, co bychom intuitivně nazvali „nekonečně blízkým“ okolím, idea „infinitezimálnosti“ se v ní prostě neobjevuje.

Ne vždy je třeba zadávat topologii tím, že vyznačíme všechny otevřené množiny. Stačí vyjít z „menšího“ systému množin a předepsaným způsobem zkonstruovat z tohoto systému zbylé otevřené množiny. Tento postup jsme již použili v pozn. 2, kde jsme topologii zaváděli pomocí otevřených krychlí. Přejdeme k přesnějšímu popisu. Podsystém τ_0 topologie τ topologického prostoru $\mathcal{X}$ se nazývá *bází topologie* τ, jestiže každá množina systému τ je sjednocením prvků podsystému τ_0. Následující větu lze použít pro efektivní zavádění topologií na libovolné množiny.

Teorém o bázi topologie. Systém τ_0 podmnožin dané množiny $\mathcal{X}$ je bází nějaké topologie τ na $\mathcal{X}$ tehdy a jen tehdy, když $\mathcal{X}$ je sjednocením množin systému τ_0 a k libovolným dvěma prvkům $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_0$ a každému bodu $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existuje takový prvek $\mathcal{W} \in \tau_0$, že $x \in \mathcal{W}$ a $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Kartézským součinem množin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. Kartézský součin množin $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ označujeme symbolem $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. V kartézském součinu topologických prostorů $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ se zavádí topologie pomocí báze topologie, tvořené kartézskými součiny $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ všech otevřených množin $\mathcal{U}$ prostoru $\mathcal{X}$ a všech otevřených množin $\mathcal{V}$ prostoru $\mathcal{Y}$. Standardními příklady kartézského součinu topologických prostorů slouží rovina $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, trojrozměrný prostor $\mathcal{R}^3 = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$, atd.

Velký význam v topologii a geometrii hrají tzv. spojitá zobrazení. Nechť $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je zobrazení topologického prostoru $\mathcal{X}$ do topologického prostoru $\mathcal{Y}$. Říkáme, že f je *spojité v bodě* $x \in \mathcal{X}$, když ke každému okolí $\mathcal{V}$ bodu $f(x) \in \mathcal{Y}$ existuje takové okolí $\mathcal{U}$ bodu $x \in \mathcal{X}$, že $f(\mathcal{U} \subset \mathcal{V})$. Zobrazení, spojité v každém bodě svého definičního oboru, se nazývá prostě *spojitým*. Vzájemně jenoznačné zobrazení f topologického prostoru $\mathcal{X}$ na topologický prostor $\mathcal{Y}$ se nazývá *homeomorfismem*, je–li zobrazení f i inverzní zobrazení f^{-1} spojité. Říkáme někdy, že dva topologické prostory jsou *topologicky ekvivalentní*, existuje–li homeomorfismus jednoho z nich na druhý.

1.2 Diferencovatelná zobrazení euklidovských prostorů

Každé zobrazení f libovolné množiny $\mathcal{X}$ do n–rozměrného euklidovského prostoru $\mathcal{R}^n$ je dáno n reálnými funkcemi $f^i : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; píšeme $f = (f^1, f^2, \ldots, f^n)$ nebo prostě $f = (f^i)$. Vezmeme–li za $\mathcal{X}$ prostor $\mathcal{R}^m$ nebo jeho otevřenou podmnožinu, dostáváme n funkcí f^i m reálných proměnných. Zobrazení f se pak bude nazývat *diferencovatelným*, má–li každá z funkcí f^i parciální derivace všech řádů podle libovolných z proměnných $x^1, \ldots, x^m$ z definičního oboru zobrazení f.

Důležitou charakteristikou každého diferencovatelného zobrazení f otevřené množiny $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$ do $\mathcal{R}^n$ je jeho *Jacobiho matice*, daná vztahem

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\right)_a \tag{1.1}$$

Zde $a = (a^1, \ldots, a^m) \in \mathcal{U}$ a parciální derivace na pravé straně, tvořící matici, jsou uvažovány v bodě a. V případě $n = m$ je Jacobiho matice čtvercová. Její determinant $\det J_a(f)$ se nazývá *Jacobiánem* zobrazení f v bodě a.

Mějme diferencovatelné zobrazení f otevřené množiny $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ do $\mathcal{R}^n$ a další diferencovatelné zobrazení g otevřené množiny $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n$ do $\mathcal{R}^n$. Předpokládejme, že obraz $f(\mathcal{U})$ množiny $\mathcal{U}$ při zobrazení f leží ve $\mathcal{V}$ a položme pro každé $x \in \mathcal{U}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{1.2}$$

Vzniklá zobrazení $g \circ f : \mathcal{U} \to \mathcal{R}^n$, která často označujeme prostě gf a nazýváme *složeným zobrazením* (ze zobrazení f a g). Podle pravidla pro derivaci složené funkce

$$\left(\frac{\partial (g^i f)}{\partial x^k}\right)_a = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial g^i}{\partial x^l}\right)_{f(a)} \cdot \left(\frac{\partial f^l}{\partial x^k}\right)_a, \tag{1.3}$$

dostáváme pro Jacobiho matici složeného zobrazení vztah

$$J_a(gf) = J_{f(a)}(g).J_a(f) \tag{1.4}$$

s násobením matic na pravé straně.

Připomeňme si, že čtvercová matice A se nazývá *regulární*, když splňuje podmínku

$$\det A \neq 0 \tag{1.5}$$

Matice A je regulární tehdy a jen tehdy, když existuje k ní inverzní matice A^{-1}, splňující vztah $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (I jednotková matice). Podmínka regularity Jacobiho matice zobrazení f je základním kriteriem existence inverzního diferencovatelného zobrazení k zobrazení f.

Teorém o inverzním zobrazení. Mějme diferencovatelné zobrazení f otevřené množiny $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n$ do $\mathcal{R}^n$ a předpokládejme, že pro bod $a = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathcal{U}$ platí $\det J_a(f) \neq 0$. Pak existuje otevřená množina $\mathcal{V}$, obsahující bod a, otevřená množina $\mathcal{W}$, obsahující $f(a)$ a takové diferencovatelné zobrazení $g : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$, že složené zobrazení gf je identickým zobrazením množiny $\mathcal{V}$ na sebe.

Jinými slovy lze říci, že na jistém okolí bodu $f(a)$ existuje inverzní zobrazení $f^{-1} = g$ k zobrazení f. Jelikož pro toto inverzní zobrazení platí

$$(g^i f)(x^1, \ldots, x^n) = x^i, \tag{1.6}$$

vztahy (1.3), (1.4) vedou k rovnosti

$$J_{f(a)}(f^{-1}).J_a(f) = I \tag{1.7}$$

mezi Jacobiho maticemi zobrazení f a f^{-1}.

Bude účelné přejít k jinému zápisu rovnosti (1.7), totiž k příslušným vztahům pro prvky Jacobiho matic. Označme δ^i_j obecný prvek jednotkové matice, tzv. *Kroneckerův symbol*:

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{1.8}$$

Zobrazení f, f^{-1} nechť jsou vyjádřena rovnostmi (po řadě)

$$\begin{aligned} y^k &= y^k(x^1, \ldots, x^n) \\ x^i &= x^i(y^1, \ldots, y^n) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Jacobiho matice (1.1) zobrazení f v určitém bodě je pak dána parciálními derivacemi $\frac{\partial y^k}{\partial x^i}$, uvažovanými v tomto bodě, a podobně systém parciálních derivací $\frac{\partial x^j}{\partial y^k}$ určuje Jacobiho matici inverzního zobrazení f^{-1}. Nyní je již zřejmé, jak můžeme přepsat vztah (1.7) pro prvky matic. Zavedeme–li tzv. *Einsteinovu sumační symboliku (konvenci)*, podle které se součty typu $\sum_i a_i b_i$ nebo $\sum_i a^i b_i$ zapisují s vynecháním znaménka sečítání $\sum$, dostaneme

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^k} . \frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \delta^i_j. \tag{1.10}$$

Podle Einsteinovy sumační konvence výraz na levé straně je roven $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^1}\right) . \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^j}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^n}\right) . \left(\frac{\partial y^n}{\partial x^j}\right)$, což odpovídá prvku v i–tém řádku a j–tém sloupci součinu matic (1.7).

1.3 Variety, atlasy, souřadnice

Připomeňme si, že každá množina, která se dá vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu všech přirozených čísel, se nazývá *spočetná*. Každá spočetná množina má tedy tolik prvků, kolik množina přirozených čísel.

Říkáme, že topologický prostor $\mathcal{X}$ je *lokálně homeomorfní* s n–rozměrným euklidovským prostorem $\mathcal{R}^n$, nebo prostě že je *lokálně euklidovský*, když každý bod $x \in \mathcal{X}$ má okolí, homeomeorfní s $\mathcal{R}^n$. Jelikož tato okolí jsou, ve smyslu naší dřívější definice, topologicky ekvivalentní s $\mathcal{R}^n$, říkáme také, že topologie uvažovaného topologického prostoru $\mathcal{X}$ je *lokálně euklidovská.* Hausdorffovský topologický prostor se spočetnou bází topologie, lokálně homeomorfní s $\mathcal{R}^n$, budeme nazývat *n–rozměrnou topologickou varietou. Lokálním souřadnicovým systémem* na n–rozměrné topologické varietě $\mathcal{X}$ nazýváme každou dvojici $(\mathcal{U}, \varphi)$, ve které $\mathcal{U}$ je otevřená množina v $\mathcal{X}$ a φ je homeomorfismus množiny $\mathcal{U}$ na otevřenou množinu $\varphi(\mathcal{U})$ v $\mathcal{R}^n$.

Množina $\mathcal{AX}$ lokálních souřadnicových systémů na n–rozměrné topologické varietě $\mathcal{X}$ se nazývá *(diferencovatelným) atlasem* na $\mathcal{X}$, jestiže platí:

1. Ke každému $x \in \mathcal{X}$ existuje $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AX}$ tak, že $x \in \mathcal{U}$.
2. Pro libovolné lokální souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{AX}$ s $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ zobrazení $\varphi\psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ je diferencovatelné.

Lokální souřadnicový systém $(\mathcal{W}, \eta)$ na $\mathcal{X}$ se nazývá *souhlasným* s atlasem $\mathcal{AX}$, když jeho přidáním k množině $\mathcal{AX}$ vznikne opět atlas na $\mathcal{X}$. Na dané topologické varietě mohou existovat různé atlasy. Atlas $\mathcal{AX}$ se nazývá *diferencovatelnou strukturou*, jestiže každý lokální souřadnicový systém, souhlasný s $\mathcal{AX}$ je prvkem množiny $\mathcal{AX}$. Každý atlas jednoznačně určuje jistou diferencovatelnou strukturu, tvořenou s ním souhlasnými lokálními souřadnicovými systémy; je to množina všech takových lokálních souřadnicových systémů. n–rozměrnou topologickou varietu $\mathcal{X}$ s danou diferencovatelnou strukturou (t.j. s daným atlasem) nazýváme *n–rozměrnou diferencovatelnou varietou*, nebo prostě *varietou*, nemůže–li dojít k nedorozumění. *Lokální souřadnicový systém* na $\mathcal{X}$ — to bude vždy prvek diferencovatelné struktury. Existuje–li lokální souřadnicový souřadnicový systém na $\mathcal{X}$ tvaru $(\mathcal{X}, \varphi)$, nazývá se *globálním souřadnicovým systémem.*

Každý lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$ definuje n reálných funkcí $x^1, \dots, x^n$ na $\mathcal{U}$ vztahem

$$\varphi(x) = (x^1(x), \dots, x^n(x)). \tag{1.11}$$

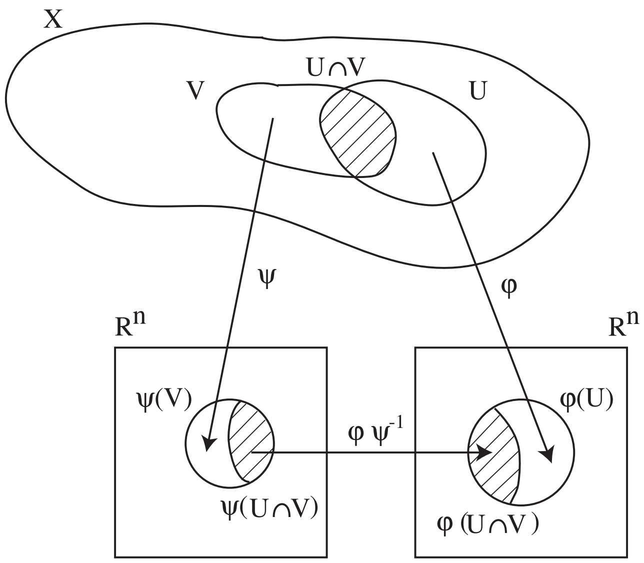
Tyto funkce budeme nazývat *souřadnicovými funkcemi* nebo prostě *souřadnicemi* na $\mathcal{X}$. Čísla $(x^1(x), \dots, x^n(x))$ nazýváme *souřadnicemi bodu* $x \in \mathcal{U}$ vůči lokálnímu souřadnicovému systému $(\mathcal{U}, \varphi)$.

Nechť $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{AX}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ a označme $x^1, \dots, x^n$, $y^1, \dots, y^n$ příslušné souřadnice na $\mathcal{U}$ resp. $\mathcal{V}$. Podobně jako v definici atlasu vzniká zobrazení $\varphi\psi^{-1} : \psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \to \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ otevřených množin n–rozměrného euklidovského prostoru. Toto zobrazení je tedy dáno n funkcemi n reálných proměnných a můžeme psát podobně jako v (1.9)

$$x^i = x^i(y^1, \dots, y^n). \tag{1.12}$$

$i = 1, \dots, n$. Říkáme, že zobrazení $\varphi\psi^{-1}$ je *transformací souřadnic* na varietě $\mathcal{X}$ (t.j. transformací souřadnic bodů $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ variety $\mathcal{X}$, nebo přímo *transformace od souřadnic $y^1, \dots, y^n$ k souřadnicím $x^1, \dots, x^n$.*

Situace popsaná definicí atlasu, je schématicky znázorněna na obr. 1.



Obr. 1. Atlas, transformace souřadnic.

Poznámky a úlohy

4. Na každé n–rozměrné topologické varietě s $n \leq 4$ existuje diferencovatelná struktura.

5. n–rozměrný euklidovský prostor $\mathcal{R}^n$ je zároveň n–rozměrnou varietou s atlasem, tvořeným globálním souřadnicovým systémem $(\mathcal{R}^n, id)$; kde id označuje identické zobrazení prostoru $\mathcal{R}^n$ na sebe. Globální souřadnicový systém $(\mathcal{R}^n, id)$ nazýváme *přirozeným.*

6. Přirozeným způsobem lze zavést diferencovatelnou strukturu na kartézském součinu $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ dvou variet $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dimenzí n a m. Za lokální souřadnicové systémy na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ vezmeme dvojice $(\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi)$, kde $(\mathcal{U}, \varphi)$ resp. $(\mathcal{V}, \psi)$ je lokální souřadnicový systém na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}, \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ je kartézský součin množin $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ (porovnej s definicí topologie na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ v kapitole 1.1.) a zobrazení $\varphi \times \psi : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$ je definováno vztahem $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Kartézský součin $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ s touto diferencovatelnou strukturou nazýváme *kartézským součinem variet* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

Právě zformulovaná definice variety má přednost v tom, že přesně charakterizuje objekty, se kterými budeme pracovat, a nedostatek v tom, že je poněkud formální. V následujících odstavcích zmírníme tento nedostatek tím, že popíšeme variety jakožto velice názorné geometrické objekty.

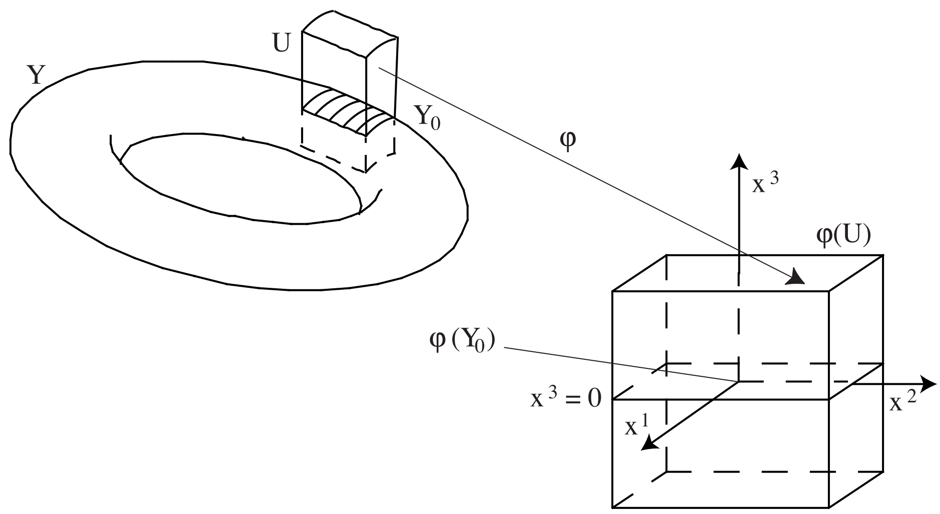
Podmnožinu $\mathcal{Y}$ n–rozměrné variety $\mathcal{X}$ nazýváme *m–rozměrnou podvarietou* variety $\mathcal{X}$, jestliže ke každému $y_0 \in \mathcal{Y}$ existuje lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$ na $\mathcal{X}$ se souřadnicemi $x^1, \ldots, x^n$ (1.11) tak, že $y_0 \in \mathcal{U}$ a

$$x^{m+1}(y) = \ldots = x^n(y) = 0 \tag{1.13}$$

pro všechna $y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{Y}$.

Jedním ze základních výsledků diferenciální geometrie je, že každá varieta je podvarietou euklidovského prostoru dostatečně vysoké dimenze. Takto naše variety, zavedené „abstraktně“, představují podmnožiny euklidovských prostorů $\mathcal{R}^n$, známé jako ***křivky*** či (vícerozměrné) ***podplochy.***

Obr. 2 ilustuje pojem podvariety na příkladě dvojrozměrné podvariety trojrozměrného euklidovského prostoru.

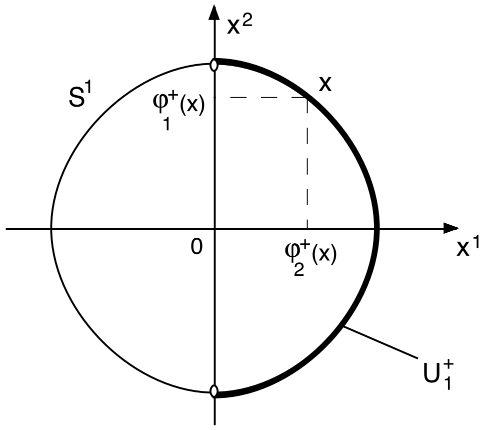


Obr. 2. Dvojrozměrná podvarieta v $\mathcal{R}^3$.

Poznámky a úlohy

7. Každá otevřená podmnožina dané variety je její podvarietou. Každá podvarieta je (sama o sobě) varietou.

8. Označme x^1, x^2 souřadnicové funkce přirozeného souřadnicového systému v rovině $\mathcal{R}^2$ a uvažujme *kružnici* $\mathcal{S}^1 = \{x \in \mathcal{R}^2 | (x^1(x))^2 + (x^2(x))^2 = 1\}$. Vyjasněte, jak vypadá indukovaná topologie kružnice. Dále položme $\mathcal{U}_1^+ = \{x \in \mathcal{S}^1 | x^1(x) > 0\}, \varphi_1^+(x) = x^2(x), \mathcal{U}_2^+ = \{x \in \mathcal{S}^1 | x^2(x) > 0\}, \varphi_2^+(x) = x^1(x), \mathcal{U}_1^- = \{x \in \mathcal{S}^1 | x^1(x) < 0\}, \varphi_1^-(x) = x^2(x), \mathcal{U}_2^- = \{x \in \mathcal{S}^1 | x^2(x) < 0\}, \varphi_2^-(x) = x^1(x)$. Dvojice $(\mathcal{U}_1^+, \varphi_1^+), (\mathcal{U}_2^+, \varphi_2^+), (\mathcal{U}_1^-, \varphi_1^-), (\mathcal{U}_2^-, \varphi_2^-)$ definují atlas na $\mathcal{S}^1$, se kterým se kružnice $\mathcal{S}^1$ stává jednorozměrnou varietou (viz obr. 3). Z rovnice kružnice v polárních souřadnicích vyplývá, že kružnice je podvarietou roviny $\mathcal{R}^2$.



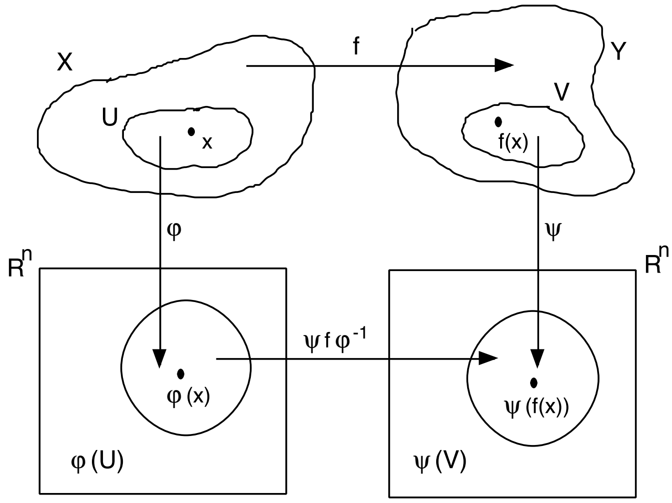
Obr. 3. Atlas na kružnici.

9. Podobně jako výše, můžene definovat atlas na trojrozměrné sféře $\mathcal{S}^3 = \{x \in \mathcal{R}^4 | (x^1(x))^2 + (x^2(x))^2 + (x^3(x))^2 + (x^4(x))^2 = 1\}$ v $\mathcal{R}^4$.

10. Lokální souřadnicový systém na $\mathcal{R}^2$ daný *polárními souřadnicemi* $(x, y) \to (r(x, y), \varphi(x, y)) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x})$, *nepokrývá* celou varietu $\mathcal{R}^2$, což znamená, že není globálním souřadnicovým systémem; v počátku $(0, 0) \in \mathcal{R}^2$ nedefinuje totiž vzájemně jednoznačné zobrazení.

1.4 Diferencovatelná zobrazení variet

Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ variet $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ se nazývá *diferencovatelným*, jestliže ke každému bodu $x \in \mathcal{X}$ existuje lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$ na $\mathcal{X}$ s $x \in \mathcal{U}$ a lokální souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$ na $\mathcal{Y}$ s $f(x) \in \mathcal{V}$ tak, že $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ a že zobrazení $\psi f \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \psi(\mathcal{V})$ otevřených množin v euklidovských prostorech, tzv. *souřadnicová reprezentace* zobrazení f, je diferencovatelné (ve smyslu definice z kapitoly 1.2). Vzájemně jednoznačné zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ variety $\mathcal{X}$ na varietu $\mathcal{Y}$ se nazývá *difeomorfismem*, jestliže obě zobrazení f a f^{-1} jsou diferencovatelná. Variety $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ se nazývají *difeomorfní*, existuje–li difeomorfismus variety $\mathcal{X}$ na varietu $\mathcal{Y}$. Popsaná situace je znázorněna na obrázku 4.



Obr. 4. Diferencovatelné zobrazení variet, souřadnicová reprezentace.

Poznámky a úlohy

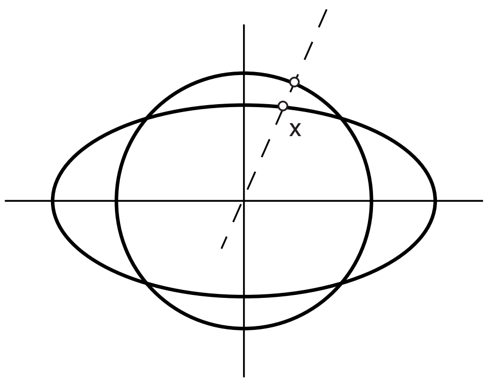
11. Složené zobrazení $gf : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ variety $\mathcal{X}$ do variety $\mathcal{Z}$, kde $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ a $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ jsou diferencovatelná zobrazení, je diferencovatelné. Zobrazení, složené ze dvou difeomorfismů, je opět difeomorfismem. Snadno se to prověří pomocí souřadnicových reprezentací zobrazení f, g.

12. Každé zobrazení $\varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U})$, kde $(\mathcal{U}, \varphi)$ je libovolný lokální souřadnicový systém na dané varietě, je difeomorfismem (porovnejte s pozn. 7). Pojmy diferencovatelnosti z kapitol 1.2 a 1.4 jsou pro otevřené množiny v $\mathcal{R}^n$ totožné.

13. *Lieovou grupou* nazveme každou varietu $\mathcal{G}$, na které je dáno grupové násobení $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (g_1, g_2) \to g_1.g_2 \in \mathcal{G}$ takové, že zobrazení $(g_1, g_2) \to g_1.g_2$, $g \to g^{-1}$ jsou diferencovatelná (porovnejte s pozn. 6). Příkladem může soužit grupa GL_n čtvercových regulárních matic n–tého řádu, tzv. *úplná lineární grupa* prostoru $\mathcal{R}^n$. Základní varietou je zde otevřená množina$\mathcal{R}^{n^2} \setminus \det^{-1}(0)$ v $\mathcal{R}^{n^2}$, kde $\det^{-1}(0)$ označuje množinu všech matic s nulovým determinantem a znaménko $\setminus$ označuje rozdíl množin. Globální souřadnicový systém na GL_n je dán pomocí složek $x_{ij}(A)$ matic $A \in GL_n$ jako „identické“ zobrazení GL_n do $\mathcal{R}^{n^2}$. Grupové násobení je dáno jako násobení matic a závisí tedy diferencovatelně na prvcích násobení matic. Prověříme–li ještě známý fakt, že regulární matice tvoří grupu vůči násobení matic, uvidíme, že GL_n je skutečně Lieova grupa.

14. Jednoduchý příklad čtyřdimenzionálních difeomorfních variet poskytují variety $\mathcal{R}^4$ a $\mathcal{R}\times \mathcal{R}^3$ (pozn. 6). Existuje „kanonický“ difeomorfismus $\mathcal{R}\times \mathcal{R}^3$ na $\mathcal{R}^4$, daný jako zobrazení $(t, (x, y, z)) \to (t, x, y, z)$.

15. Libovolná elipsa $\{x \in \mathcal{R}^2 | \frac{(x^1(x))^2}{a^2} + \frac{(x^2(x))^2}{b^2} = 1\}$, napsaná v přirozených souřadnicích variety $\mathcal{R}^2$ (porovnejte s pozn. 5), je jednorozměrnou podvarietou v $\mathcal{R}^2$, difeomorfní s kružnicí $\mathcal{S}^1$ (porovnejte s pozn. 8). Jeden z možných difeomorfismů je znázorněn na obr. 5.



Obr. 5. Difeomorfismus f kružnice S^1 a elipsy E.

Uvažujme nyní dvě libovolné n–rozměrné variety $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$. Z definice vyplývá, že k libovolným dvěma bodům $x \in \mathcal{X}$ a $y \in \mathcal{Y}$ existují lokální souřadnicové systémy $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\mathcal{V}, \psi)$ na $\mathcal{X}$ resp. na $\mathcal{Y}$ tak, že $x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$ a $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{R}^n = \psi(\mathcal{V})$, $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou ovšem variety (pozn. 7) a zobrazení $\psi\phi^{-1} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je jakožto kompozice difeomorfismů opět difeomorfismem (pozn. 11, 12). Jinými slovy, k libovolným dvěma bodům $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ jsou *lokálně difeomorfní*.

Z lokální difeomorfnosti variet ovšem nevyplývá, že by mezi nimi musel existovat difeomorfismus, tj. že by byly *globálně difeomorfní*. Je např. jednoduchou topologickou úlohou ukázat, že kružnice $\mathcal{S}^1$ a přímka $\mathcal{R}^1$, lokálně difeomorfní vzhledem ke stejné dimenzi, nejsou difeomorfní. Ostatně i z našich intuitivních představ vyplývá, že přímku (nebo s ní difeomorfní otevřený interval) nedokážeme „svinout“ do kružnice, protože nám k tomu chybí jeden bod. Vzniká tak přirozená otázka, čím se dvě lokálně difeomorfní variety liší, nedají–li se na sebe převést nějakým difeomorfismem, jaký je adekvátní popis jejich rozdílných vlastností. Hlubokým výsledkem diferenciální topologie (tj. topologie diferencovatelných variet) je, že dvě n–rozměrné variety s $n \leq 6$ jsou difeomorfní tehdy a jen tehdy, když jsou homeomorfní, tj. topologicky ekvivalentní. To ovšem znamená, že dvě nedifeomorfní n–rozměrné variety s $n \leq 6$ se liší topologickou strukturou.

Naše úvahy o difeomorfních varietách plně postačují pro předmět, studovaný v této knize, jelikož relativistická prostoročasová kontinuita jsou varietami s dimenzí rovnou čtyřem. V souvislosti s tím budeme říkat, že dvě nedifeomorfní prostoročasová kontinuita se liší svými *globálními vlastnostmi*, tj. topologickou strukturou.

Vrátíme se k varietám. Na množiny, na kterých není dána topologie, se v praxi často zavádí struktura variety efektivním způsobem, který nyní popíšeme. Zhruba řečeno, stačí vhodně zadat systém podmnožin dané množiny a systém zobrazení těchto podmnožin do euklidovského prostoru. Splňují–li tyto systémy určité předpoklady, pak na dané množině *indukují* strukturu topologické variety a zároveň diferencovatelný atlas.

Teorém o diferencovatelné struktuře. Nechť $\mathcal{X}$ je množina, $\{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota)\}$, $\iota \in I$, spočetný systém dvojic, ve kterých $\mathcal{U}_\iota$ je podmnožina množiny $\mathcal{X}$ a φ_ι :

$\mathcal{U}_\iota \to \varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota)$ vzájemně jednoznačné zobrazení této podmnožiny na otevřenou množinu n–rozměrného eukleidovského prostoru $\mathcal{R}^n$. Předpokládejme, že platí:

1. Množiny $\mathcal{U}_\iota$ pokrývají celou množinu $\mathcal{X}$, tj. $\cup_\iota \mathcal{U}_\iota = \mathcal{X}$.
2. Libovolné dva body $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ buď leží v jisté množině $\mathcal{U}_\iota$, nebo existují množiny $\mathcal{U}_\iota, \mathcal{U}_\kappa$ tak, že $x_1 \in \mathcal{U}_\iota$, $x_2 \in \mathcal{U}_\kappa$, $\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa = \emptyset$.
3. Pro všechny indexy $\iota, \kappa \in I$ množina $\varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa)$ je otevřená v $\mathcal{R}^n$.
4. Pro všechny indexy $\iota, \kappa \in I$ zobrazení $\varphi_\iota \varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa) \to \varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa)$ je difeomorfismem otevřených množin v $\mathcal{R}^n$.

Pak na množině $\mathcal{X}$ existuje jediná topologie a diferencovatelná struktura taková, že $\mathcal{U}_\iota$ jsou otevřené množiny, a že zobrazení φ_ι jsou difeomorfismy. S touto strukturou se $\mathcal{X}$ stává n–rozměrou varietou a systém $\{\mathcal{U}_\iota,\, \phi_\iota\}$ atlasem na $\mathcal{X}$.

Praktické užití spočívá v prověřování předpokladů 1. — 4. místo složitého zavádění topologie a diferencovatelné struktury.

1.5 Základní variety OTR

Fundamentální hypotézou všech současných fyzikálních teorií je, že „arénou", ve které probíhají fyzikální procesy, je jistá 4–rozměrná varieta. Je to hypotéza o tom, že prostor a čas jakožto fyzikální, měřitelné veličiny, tvoří objekt s vlastnostmi „fyzikálního kontinua" — *prostoročasové kontinuum*, o kterém již byla zmínka. Hypotéza o prostoročasovém kontinuu, o jeho existenci a základních vlastnostech — to je odrazový můstek pro budování fyzikální teorie, podléhající neustálému experimentálnímu ověřování, konfrontaci výsledků teorie se zkušeností. I když čas od času jsou vznášeny námitky proti „kontinuálnosti" fyzikálního prostoru a času, neexistuje prozatím žádná ucelenější představa o tom, jak by asi mohl být „diskrétní prostor a čas" pojmově postižen a zachycen v relativně úplné teorii. Každá změna hypotézy o prostoročasovém kontinuu by fakticky vyústila ve velkou revoluci ve fyzice.

Podle hypotézy o prostoročasovém kontinuu fyzikální události tak, jak je naše přístroje registrují nebo mohou registrovat — to jsou body základní 4–rozměrné variety, a jejich časové a prostorové údaje vůči zvolenému lokálnímu souřadnicovému systému, tj. pozorovateli či přístroji — to jsou hodnoty souřadnicových funkcí, definovaných na části této variety.

Fyzikální „svět" klasických teorií je dán — explicitně nebo implicitně — samotnými těmito teoriemi, je přímo předpokládán a má v teorii pevné místo, se kterým všechno stojí či padá; zpochybníme–li to nějak, zpochybníme hodnotu celé teorie. Je to svět blízký světu smyslovému či empirickému, tj. varieta $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^3$ ($\mathcal{R}$ odpovídá časovým, $\mathcal{R}^3$ prostorovým měřením). Platí to v klasické mechanice, kvantové teorii, teorii elektromagnetických jevů i speciální teorii relativity.

OTR se liší od těchto teorií tím, že všechny fyzikální procesy probíhají v rámci určité diferencovatelné variety, prostoročasového kontinua, že totální soubor všech myslitelných událostí (v „prostoru" a „čase") má strukturu variety. Liší se tím, že tato varieta není dána pevně, jako adekvátní element teorie, tím, že není dána pevně, jako neměnný element teorie, tím, že není a priori vybrána jako adekvátní všem možným fyzikálním situacím eventuelně modelům, které chceme uvažovat. Připouští se více prostoročasových kontinuí, i nedifeomorfních, podle konkrétních fyzikálních podmínek či zjednodušení, které sami provádíme (z důvodů technických či kvůli aproximacím). Prostoročasové kontinuum se stává proměnnou, kterou máme spolu s dalšími hledanými veličinami určit.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že při výstavbě OTR je třeba respektovat specifický požadavek, který zcela chyběl ve všech klasických fyzikálních teoriích. Je to požadavek takové struktury teorie, aby ji bylo možno použít pro všechna relativistická prostoročasová kontinua. Tento požadavek nezávislosti teorie na konkrétní volbě určité základní variety je jednou ze stránek tzv. *principu obecné kovariance (invariance)*, o kterém již byla řeč. Po absolvování základních kapitol z OTR čtenář uvidí, v jakém smyslu je tato teorie obecně kovariantní, nezávislá na volbě prostoročasového kontinua, které chceme uvažovat.

Poznámky a úlohy

16. Uvedeme některé variety, sloužící za podkladové struktury pro některé kosmologické úvahy v OTR. Prostoročasové kontinua jsou zde obvykle tvaru kartézského součinu $\mathcal{R}^1 \times \mathcal{Y}$, kde $\mathcal{R}^1$ je přímka a $\mathcal{Y}$ nějaká trojrozměrná varieta (známé jsou modely, kde $\mathcal{Y} = \mathcal{R}^3$, $\mathcal{Y} = \mathcal{S}^3$); setkáváme se také s prostorem $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}^3$ a pod.

Kapitola 2

Algebra tenzorů

Ze zkušenosti je známo, že pojem tenzoru patří mezi nejobtížnější matematické pojmy, se kterými se v OTR setkáváme.Je to většinou dáno způsobem výkladu. Je totiž možno, ovšem s dosti vysokým rizikem, mluvit o tenzorech jakožto o „veličinách“, které se *transformují* podle zadaných vztahů — je to však definice více než formální, jen s nepatrnou šancí na to, že zanechá v posluchači či čtenáři hlubší dojem. Definice s riziky, nevyváženými určitou úsporou místa v textu či přednášce. V této knížce přistupujeme k tenzorům z přirozených pozic tzv. relací ekvivalence, které jasně ukazují rozdíl mezi „tenzorem“ a „složkami tenzoru vůči zvolené bázi“. Diskutujeme obecnou konstrukci tenzorového součinu, kterou pak již snadno aplikujeme na konstrukci tenzorů na libovolném vektorovém prostoru, zavádíme základní algebraické operace s tenzory. Poslední odstavec je věnován metrikám na vektorových prostorech.

Podotýkáme, že všechny *vektorové prostory*, se kterými se v této kapitole setkáme, budou *reálnými* vektorovými prostory, což nebudeme v textu speciálně zdůrazňovat. Standardními a často používanými příklady vektorových prostorů jsou množiny $\mathcal{R}^n$ ($n > 0$ celé) s přirozenými operacemi *sečítání vektorů* a *násobení skalárem* (reálným číslem) „po složkách“. Místo $\mathcal{R}^1$ píšeme obvykle $\mathcal{R}$. Všimněme si, že každá z množin $\mathcal{R}^n$ je zároveň diferencovatelnou varietou — n–rozměrným eukleidovským prostorem (viz kapitola 1 pozn. 5). Její strukturu variety však nebudeme v této kapitole potřebovat.

2.1 Relace ekvivalence

Uvažujme libovolnou množinu $\mathcal{X} \neq \emptyset$. Podmnožina $\mathcal{E}$ kartézského součinu $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ definuje v $\mathcal{X}$ *relaci ekvivalence*, jestliže platí:

1. $(x, x) \in \mathcal{E}$ pro každé $x \in \mathcal{E}$.

2. Z (x_1, x_2), $(x_2, x_3) \in \mathcal{E}$ vyplývá $(x_1, x_3) \in \mathcal{E}$.

3. Z $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ vyplývá $(x_2, x_1) \in \mathcal{E}$.

Je–li dána podmnožina $\mathcal{E}$, splňující uvedené požadavky, píšeme často $x_1 \sim x_2$ místo $(x_1, x_2) \in \mathcal{E}$ a říkáme, že bod x_1 je *ekvivalentní* s bodem x_2 vzhledem k relaci ekvivalence $\sim$. S označení $\sim$ možno axiomy 1. — 3. přepsat takto:

1. Pro každé $x \in \mathcal{X}$ platí $x \sim x$ (jinými slovy každý prvek množiny $\mathcal{X}$ je ekvivalentní se sebou samým).

2. Z $x_1 \sim x_2$ a $x_2 \sim x_3$ vyplývá $x_1 \sim x_3$ (je–li x_1 ekvivalentní s x_2 a x_2 s x_3 pak x_1 je ekvivalentní s x_3).

3. Z $x_1 \sim x_2$ vyplývá $x_2 \sim x_1$ (je–li x_1 ekvivalentní s x_2 pak x_2 je ekvivalentní s x_1).

V této formulaci vidíme, že vlastnosti 1. — 3. velmi přirozeně popisují to, co známe také z běžného života jako ekvivalence.

V množině $\mathcal{X}$, ve které je dána relace ekvivalence, možno každému bodu x přiřadit množinu všech s ním ekvivalentních bodů, tzv. třídu ekvivalence $\{x\}$ bodu x. Každý prvek x_0 dané třídy ekvivalence $\{x\}$ se nazývá *reprezentantem* této třídy ekvivalence. Třídy ekvivalence dvou různých bodů jsou buď totožné nebo disjunktní dle toho, zda jsou tyto body ekvivalentní či nikoliv. Množina všech tříd ekvivalence se nazývá *faktormnožinou* množiny $\mathcal{X}$ podle dané relace ekvivalence.

Jak uvidíme v dalších odstavcích, pojem relace ekvivalence leží v základech mnohých geometrických pojmů, které se v OTR používaji. Svojí povahou sem patří např. pojem vektoru či obecněji tenzoru. Zhruba řečeno, s relacemi ekvivalence pracujeme všude tam, kde chceme vytvářet objekty, nezávislé na bazích vektorového prostoru či na souřadnicových systémech na varietě, objekty, které lze popsat navzájem „ekvivalentně“ v libobolných bazích či souřadnicových systémech.

Poznámky a úlohy

1. Vektory z libobolného vektorového prostoru lze popsat jakožto třídy ekvivalence. Uvažujeme množinu všech dvojic (e_i, ξ^i), ve kterých první složka e_i označuje bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ daného vektorového prostoru $\mathcal{E}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a druhá n–tici reálných čísel $\xi^i \in \mathcal{R}$. Budeme říkat, že dvě takové dvojice jsou *ekvivalentní* a píšeme $(e_i, \xi^i) \sim (f_i, \lambda^i)$, jestliže je splněna relace

$$\xi^i.e_i = \lambda^i.f_i. \tag{2.1}$$

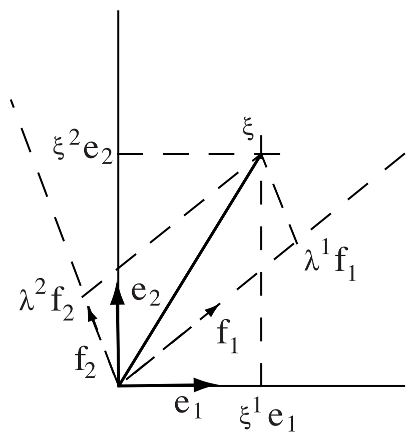
Prověřte, že vztah (2.1) splňuje požadavky 1. — 3. na relaci ekvivalence. Třídu ekvivalence $\{(e_i, \xi^i)\}$ lze ztotožnit s vektorem $\lambda = \lambda^i f_i$ z $\mathcal{E}$ volbou libovolného reprezentanta $(f_i, \lambda^i) \in \{(e_i, \xi^i)\}$.

2. S označením z pozn. 1 ukažte: Dvojice (e_i, ξ^i), (f_i, λ^i) jsou ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když existuje regulární matice $A = (A^i_j)$ tak, že platí $f_i = A^k_i e_k$, $\xi^i = A^i_j \lambda^j$ Zapisujeme to takto:

$$(e_i, \xi^i) \sim (f_i, \lambda^i) \Leftrightarrow f_i = A^k_i e_k,\ \xi^i = A^i_j \lambda^j. \tag{2.2}$$

Zformulované tvrzení poskytuje možnost zobecnění a plodného využití v tzv. tenzorové algebře. Základní idea pro zobecnění spočívá v tom, že z dvojic, ze kterých prvním členem je báze daného vektorového prostoru ev. báze daných vektorových prostorů, a druhým uspořádaný systém reálných čísel, vytváříme podobně jako výše množiny ekvivalentních prvků, objekty, které mají tu vlastnost, že jsou nezávislé na použitých bazích. Vzniká zcela analogická situace jako v pozn. 1 s tím rozdílem, že výchozí relaci ekvivalence uvažujeme ve tvaru, analogickém s (2.2) a analogie vztahu (2.1) se objevuje jako důsledek. Získané objekty — třídy ekvivalence — mají jako vektory různé „složky“ vůči různým bazím, ale „nakreslíme–li je“ vůči libovolným bázím, dostaneme vždy stejný výsledek, třídu ekvivalence. Matici A (2.2) budeme nazývat *matice přechodu* od báze e_i k f_i.

3. Pojem vektoru jakožto třídy ekvivalence lze nejsnadněji ilustrovat na dvojrozměrném případě. Na obr. 6 je ξ třídou ekvivalence a (e_i, ξ^i), (f_i, λ^i), $i = 1, 2$ jsou dva reprezentanti této třídy ekvivalence.



Obr. 6. Vektor jakožto třída ekvivalence.

2.2 Tenzorový součin vektorových prostorů

Uvažujme n–rozměrný vektorový prostor $\mathcal{E}$ a m–rozměrný vektorový prostor $\mathcal{F}$. Budeme studovat množinu všech trojic $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha}))$, ve kterých e_i je báze prostoru $\mathcal{E}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, f_α báze prostoru $\mathcal{F}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$ a $U = (u^{i\alpha})$ obdélníková matice tvořená reálnými čísly. V této množině zavedeme relaci ekvivalence

$$(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha})) \sim (e'_i, f'_\alpha, (v^{i\alpha})) \Leftrightarrow e'_i = A^j_i e_j,\ f'_\alpha = P^\beta_\alpha f_\beta,\ u^{i\alpha} = A^i_j P^\alpha_\beta v^{j\beta}, \tag{2.3}$$

kterou čteme takto: Trojice $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha}))$, $(e'_i, f'_\alpha, (v^{i\alpha}))$ jsou *ekvivalentní* tehdy a jen tehdy, když existují regulární matice $A = (A^i_j)$, $P = (P^\alpha_\beta)$ tak, že $e'_i = A^j_i e_j$, $f'_\alpha = P^\beta_\alpha f_\beta$, $u^{i\alpha} = A^i_j P^\alpha_\beta v^{j\beta}$. Prověříme, že jsou splněny požadavky 1. — 3. relace ekvivalence. Vztah (2.3) evidentně splňuje požadavky 1. a 3. Platí–li kromě (2.3) ještě $(e'_i, f'_\alpha, (v^{i\alpha})) \sim (e''_i, f''_\alpha, w^{i\alpha}))$, pak kromě matic A a P, zavedených jako výše, existují ještě regulární matice $B = (B^i_j)$, $Q = (Q^\alpha_\beta)$ tak, že $e''_i = B^j_i e'_j$, $f''_\alpha = Q^\beta_\alpha f'_\beta$, $v^{i\alpha} = B^i_j Q^\alpha_\beta w^{j\beta}$. To ovšem znamená, že platí $e''_i = B^j_i A^k_j e_k$, $f''_\alpha = Q^\beta_\alpha P^\gamma_\beta f_\gamma$, $u^{i\alpha} = A^i_j B^j_k P^\alpha_\beta Q^\beta_\gamma w^{k\gamma}$, takže trojice $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha}))$, $(e''_i, f''_\alpha, (w^{i\alpha}))$ jsou ekvivalentní a vlastnost 2. je prověřena. Vztah (2.3) tedy skutečně definuje relaci ekvivalence. Třídy ekvivalence podle této relace ekvivalence nazveme *tenzory* a množinu všech tenzorů, tj. příslušnou faktormnožinu, označíme symbolem $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$.

Nechť $u \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ a nechť $(e'_i, f'_\alpha, (v^{i\alpha}))$ je libovolný reprezentant třídy ekvivalence u. K daným bazím e_i, f_α lze vždy najít čísla $u^{i\alpha}$ tak, že $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha})) \in u$, tj. že $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha})) \sim (e'_i, f'_\alpha, (v^{i\alpha}))$. Stačí k tomu určit matice přechodu od bazí e_i, f_α k bázím e'_i, f'_α,

$$e'_i = A^j_i e_j, \; f'_\alpha = P^\beta_\alpha f_\beta, \tag{2.4}$$

a pak položit v souladu s (2.3) $u^{i\alpha} = A^i_k P^\alpha_\beta v^{k\beta}$. Bude, samozřejmě, platit $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha})) \in u$. Takto každá třída ekvivalence obsahuje reprezentanta s předem zadanými složkami e_i, f_α.

Tato poznámka bude užitečná pro zavedení algebraické struktury vektorového prostoru do množiny $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ všech tenzorů. Pro libovolné tenzory $u, v \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ s reprezentanty, zvolenými ve tvaru $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha})) \in u$, $(e_i, f_\alpha, (v^{i\alpha})) \in v$ a pro libovolné reálné číslo $c \in \mathcal{R}$ klademe

$$\begin{aligned} &u + v = \{(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha} + v^{i\alpha}))\}, \\ &c.u = \{(e_i, f_\alpha, (c.u^{i\alpha}))\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Prověříme, že třídy ekvivalence na pravé straně jsou definovány nezávisle na volbě reprezentantů tenzorů u, v. Zvolíme–li jiné reprezentanty $(e'_i, f'_\alpha, (u'^{i\alpha})) \in u$, $(e'_i, f'_\alpha, (v'^{i\alpha})) \in v$, pak $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha} + v^{i\alpha})) \sim (e'_i, f'_\alpha, (u'^{i\alpha} + v'^{i\alpha}))$ takže pravá strana je skutečně nezávislá na volbě reprezentantů. Podobná relace platí pro druhou rovnost (2.5). Třídu ekvivalence $u + v$ nazveme *součtem tenzorů* u, v, třída ekvivalence $c.u$ se nazývá *násobek skalárem* c tenzoru u. Vztahy (2.5) zavádějí do množiny $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ operace *sčítání* a *násobení skalárem*, které mají všechny vlastnosti operací ve vektorových prostorech. $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ se tak stává vektorovým prostorem, který budeme nazývat *tenzorovým součinem* vektorových prostorů $\mathcal{E}, \mathcal{F}$.

Ukážeme, jak lze ve vektorovém prostoru $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ konstruovat báze pomocí bází prostorů $\mathcal{E}, \mathcal{F}$. Nechť e_i je báze v $\mathcal{E}$, f_α báze v $\mathcal{F}$. Klademe

$$e_k \otimes f_\beta = \{(e_i, f_\alpha, \Delta_{k\beta})\}, \tag{2.6}$$

kde $\Delta_{k\beta}$ označuje matici o n řádcích a m sloupcích s prvkem 1 v k–tém řádku a β–tém sloupci a s nulami na všech ostatních místech. Je zřejmé, že libobolnou matici $U = (u^{i\alpha})$ o n řádcích a m sloupcích lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $U = u^{i\alpha} \Delta_{i\alpha}$ (součet přes všechna i, α). Vztahy (2.5), (2.6) dávají pro libovolný tenzor $u = \{(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha})\}$ vyjádření

$$u = u^{i\alpha} e_i \otimes f_\alpha, \tag{2.7}$$

které budeme upřednostňovat před poněkud těžkopádným označováním tenzorů ve složených závorkách. (2.7) ukazuje, že tenzory $e_i \otimes f_\alpha$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ a že $\dim \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = n.m$, tj.

$$\dim \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \dim \mathcal{E}.\dim \mathcal{F}. \tag{2.8}$$

Vidíme tedy, že každé dvě báze e_i, f_α prostorů $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ definují (vztahem (2.6)) bázi $e_i \otimes f_\alpha$ vektorového prostoru $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, tenzorového součinu vektorových prostorů $\mathcal{E}, \mathcal{F}$. V souladu s běžnou terminologií se čísla $u^{i\alpha}$ ve vztahu (2.7) nazývají ***složkami*** tenzoru u vůči bázi $e_i \otimes f_\alpha$.

Nechť $\xi \in \mathcal{E}$,$\eta \in \mathcal{F}$. Zvolme bázi e_i v $\mathcal{E}$, bázi f_α v $\mathcal{F}$ a napišme vektory ξ, η pomocí jejich složek jako

$$\xi = \xi^i e_i, \ \eta = \eta^\alpha f_\alpha. \tag{2.9}$$

Vektorům ξ, η přiřadíme trojici $(e_i, f_\alpha, (\xi^i.\eta^\alpha))$, závislou na zvolených bazích e_i, f_α. Podobně jako v případě prvního ze vztahů (2.5) se můžeme přesvědčit, že třída ekvivalence $\{(e_i, f_\alpha, (\xi^i.\eta^\alpha))\}$ již na volbě bazí nezávisí a je tedy funkcí samotných vektorů ξ, η. Klademe

$$\xi \otimes \eta = \xi^i \eta^\alpha e_i \otimes f_\alpha \tag{2.10}$$

a nazýváme tenzor $\xi \otimes \eta \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ tenzorovým součinem vektorů ξ, η. Pro operaci tenzorového součinu $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \ni (\xi, \eta) \to \xi \otimes \eta \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ je možné odvodit vztahy

$$\begin{aligned} (\xi_1 + \xi_2) \otimes \eta &= \xi_1 \otimes \eta + \xi_2 \otimes \eta, \\ \xi \otimes (\eta_1 + \eta_2) &= \xi \otimes \eta_1 + \xi \otimes \eta_2, \\ (c_1.\xi) \otimes (c_2.\eta) &= c_1 c_2.\xi \otimes \eta, \end{aligned} \tag{2.11}$$

platné pro každé $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{E}$, $\eta, \eta_1, \eta_2, \in \mathcal{F}$ a $c_1, c_2 \in \mathcal{R}$. Máme–li ještě další vektorový prostor $\mathcal{G}$, pak jsou definovány tenzorové součiny $\mathcal{E} \otimes (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$, $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G}$. Platí ovšem, jak se snadno prověří, že

$$\mathcal{E} \otimes (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = (\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \otimes \mathcal{G} \tag{2.12}$$

a uvažovaný tenzorový součin lze označit prostě $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Podobně pro každé $\xi \in \mathcal{E}$, $\eta \in \mathcal{F}$, $\lambda \in \mathcal{G}$ platí vztah

$$\xi \otimes (\eta \otimes \lambda) = (\xi \otimes \eta) \otimes \lambda, \tag{2.13}$$

takže výraz na obou stranách lze označovat prostě $\xi \otimes \eta \otimes \lambda$.

Poznámky a úlohy

4. Ukažte, že výraz (2.10) je definován nezávisle na bazích e_i, f_α.
5. Prověřte platnost vztahů (2.11), (2.12) a (2.13).
6. Často pracujeme s tenzory „po složkách“, což znamená, že provádíme výpočty s jejich složkami. V této souvislosti se místo tvrzení „je dán tenzor $u \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$“ často setkáváme se zjednodušeným tvrzením typu „je dán tenzor $u^{i\alpha}$“. Jak rozumět tomuto

druhému tvrzení, víme–li, že tenzor je třída ekvivalence a že k jeho zadání je třeba znát trojici $(e_i, f_\alpha, (u^{i\alpha}))$, tj. jistého reprezentanta? Mluvíme–li o symbolu $u^{i\alpha}$ jako o tenzoru, máme obvykle na mysli, že to jsou složky tenzoru vůči libovolné avšak pevně zvolené bázi $e_i \otimes f_\alpha$. V tomto smyslu můžeme pro tenzor u používat označení $(u^{i\alpha})$ nebo prostě $u^{i\alpha}$, nemůže–li dojít k nedorozumění, místo přesného avšak delšího vyjádření (2.7). Ve složkové symbolice se vztahy (2.5), (2.10) přepisují ve tvaru

$$\begin{aligned} (u+v)^{i\alpha} &= u^{i\alpha} + v^{i\alpha}, \\ (c.u)^{i\alpha} &= c.u^{i\alpha}, \\ (\xi \otimes \eta)^{i\alpha} &= \xi^i \eta^\alpha . \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.3 Lineární formy

Lineární formou na vektorovém prostoru $\mathcal{E}$ rozumíme každé lineární zobrazení $\omega : \mathcal{E} \to \mathcal{R}$. Množina všech lineárních forem na $\mathcal{E}$ má přirozenou strukturu vektorového prostoru — lineární formy lze sečítat a násobit skalárem, přičemž platí všechna běžná pravidla pro tyto operace. Prostor všech lineárních forem na $\mathcal{E}$ budeme nazývat *duálním prostorem* k vektorovému prostoru $\mathcal{E}$ a označovat symbolem $\mathcal{E}^*$.

Každé bázi e_i prostoru $\mathcal{E}$ lze přiřadit lineární formy e^i vztahem

$$e^i(\xi) = \xi^i, \; < e^i, \xi >= \xi^i, \tag{2.15}$$

ve kterém ξ^i označuje i–tou složku vektoru ξ vůči bázi e_i Pro vektor $e_j \in \mathcal{E}$ tak dostáváme vyjádření

$$e^i(e_j) = \delta^i_j \tag{2.16}$$

s Kroneckerovým symbolem (1.8) na pravé straně. Pro libovolný vektor $\xi = \xi^i e_i$ a lineární formu $\omega \in \mathcal{E}^*$ platí $\omega(\xi) = \omega(e_i).\xi^i = \omega_i e^i(\xi)$, kde $\omega_i = \omega(e_i) \in \mathcal{R}$, takže ω lze zjednodušeně vyjádřit ve tvaru

$$\omega = \omega_i e^i \tag{2.17}$$

Lineární formy e^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tedy tvoří bázi prostoru $\mathcal{E}^*$, nazývanou *duální bazí* k e_i. Odtud mimo jiné vyplývá, že prostor $\mathcal{E}^*$ je n–rozměrný a

$$\dim \mathcal{E}^* = \dim \mathcal{E}. \tag{2.18}$$

Uvažujme dvě báze e_i, f_i prostoru $\mathcal{E}$ a k nim duální báze e^i, f^i. Vyjádříme–li vektory f_i resp. lineární formy f^i ve tvaru lineárních kombinací prvků bazí e_i resp. e^i, dostaneme

$$\begin{aligned} f_i &= A^i_j e_j, \\ f^k &= B^k_l e^l, \end{aligned} \tag{2.19}$$

kde $A = (A^i_j)$ resp. $B = (B^k_l)$ je *matice přechodu* od báze e_i k f_i resp. od báze e^i k f^i. Obě matice A, B jsou, přirozeně, regulární. Ze vztahu $f^k(f_i) = B^k_l A^j_i e^l(e_j))$ užitím (2.16) dostáváme

$$B^k_l A^l_i = \delta^k_i \tag{2.20}$$

nebo v jiné formě $B = A^{-1}$. Matice přechodu mezi duálními bazemi je tedy inverzní k matici přechodu mezi původními bazemi (ve smyslu zápisu (2.19) pro transformace přechodu).

2.4 Tenzory na vektorových prostorech

Nechť $\mathcal{E}$ je konečněrozměrný vektorový prostor. Pro tenzorový součin $\mathcal{E} \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}$ (r činitelů) zavedeme označení $\otimes^r \mathcal{E}$. Vektorový prostor

$$\mathcal{F} = (\bigotimes^r \mathcal{E}) \otimes (\bigotimes^s \mathcal{E}^*) \tag{2.21}$$

budeme nazývat *prostorem tenzorů typu* (r, s) na vektorovém prostoru $\mathcal{E}$ a jeho prvky *tenzory typu* (r, s) na $\mathcal{E}$ nebo prostě *tenzor*, nemůže–li dojít k nedorozumění. V případě $r = 0$ výraz (2.21) obsahuje pouze činitele $\mathcal{E}^*$; prostor tenzorů typu $(0, s)$ nazýváme také *prostorem kovariantních tenzorů s–tého řádu na $\mathcal{E}$* a jeho prvky *kovariantními tenzory s–tého řádu na $\mathcal{E}$*. Podobně v případě $s = 0$ mluvíme o *kontravariantních tenzorů r–tého řádu na $\mathcal{E}$* a o *kontravariantních tenzorech r–tého řádu na $\mathcal{E}$*. Vektory jsou v této terminologii nazývány tenzory typu $(1, 0)$, lineární formy tenzory typu $(0, 1)$, skaláry z R tenzory typu $(0, 0)$.

Snadno lze zkonstruovat báze libovolného z vektorových prostorů (2.21). Podle výsledků předcházejících odstavců je bázi e_i výchozího vektorového prostoru $\mathcal{E}$ přiřazena báze *indexovaná* $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}$ v prostoru tenzorů typu (r, s) na $\mathcal{E}$. Libovolný tenzor $u \in (\bigotimes^r \mathcal{E}) \otimes (\bigotimes^s \mathcal{E}^*)$ lze pak napsat ve tvaru

$$u = u^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}, \tag{2.22}$$

kde reálná čísla $u^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ jsou *složky* tenzoru$u$ vůči uvažované indukované bázi.

Je–li f_i jiná báze prostoru $\mathcal{E}$, pak lze zkonstruovat příslušnou indukovanou bázi prostoru $(\bigotimes^r \mathcal{E}) \otimes (\bigotimes^s \mathcal{E}^*)$ a napsat jako

$$u = u^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{l_1 l_2 \ldots l_s} f_{k_1} \otimes f_{k_2} \otimes \ldots f_{k_r} \otimes f^{l_1} \otimes f^{l_2} \otimes \ldots \otimes f^{l_s}. \tag{2.23}$$

S označením podle (2.19) a (2.20) a s pomocí (2.11) snadno vyvodíme, že složky tenzoru u vůči první bázi jsou svázány vztahem

$$u^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = A^{i_1}_{k_1} \ldots A^{i_r}_{k_r} B^{l_1}_{j_1} \ldots B^{l_s}_{j_s} u^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s} \tag{2.24}$$

resp.

$$u^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s} = B^{k_1}_{i_1} \ldots B^{k_r}_{i_r} A^{j_1}_{l_1} \ldots A^{j_s}_{l_s} u^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \tag{2.25}$$

Tyto vztahy se často nazývají *transformační vztahy* pro složky tenzorů. Ekvivalentně se o složkách říká, že se *transformují* při přechodu k jiné bázi *podle* těchto vztahů. Formule (2.24), (2.25) se často používají přímo pro definici tenzorů. Lze se tím vyhnout — na úkor poněkud snížené jakosti výkladu — zavedení pojmů relace ekvivalence, indukované báze, apod.

Ukážeme, že s každým tenzorem typu (r,s), kde $r=0,1$, lze svázat jisté multilineární zobrazení. Uvažujme kartézský součin $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\ldots\times\mathcal{E}$ (k činitelů $\mathcal{E}$) a další konečněrozměrný vektorový prostor $\mathcal{F}$. Připomeneme si, že zobrazení $u:\mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\ldots\times\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ se nazývá *k–lineární* (také *multilineární*, není–li třeba specifikovat číslo k), je–li lineární v každém ze svých argumentů při libovolných pevných hodnotách všech zbývajících argumnetů. Pro $k=1,2,3$ mluvíme postupně o *lineárním*, *bilineárním* a *trilineárním* zobrazení. O k–lineárních zobrazeních do prostoru reálných čísel mluvíme jako o *formách na* $\mathcal{E}$. Lineární zobrazení $u:\mathcal{E}\to\mathcal{R}$ již známe jako *lineární formu*, bilineární zobrazení $u:\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{R}$ je *bilineární formou.* Jako příklad bilineárního zobrazení lze uvést operaci tenzorového součinu $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\ni(\xi,\lambda)\to\xi\otimes\lambda\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}$ (viz (2.11), (2.14)).

Uvažujme např. libovolný tenzor $u\in\mathcal{E}\otimes(\bigotimes^3\mathcal{E}^*)$ a zvolme vektory ξ, η, $\lambda\in\mathcal{E}$ a bázi e_i v $\mathcal{E}$. *Definujeme* působení tenzoru na trojici (ξ,η,λ) vztahem

$$u(\xi,\eta,\lambda)=\xi^i\eta^j\lambda^k u^l{}_{ijk}e_l, \tag{2.26}$$

kde čísla $u^l{}_{ijk}$ jsou jednoznačně určena z rozkladu

$$u=u^l{}_{ijk}e_l\otimes e^i\otimes e^j\otimes e^k, \tag{2.27}$$

a ξ^i, η^j, λ^k jsou složky vektorů ξ, η, λ vůči bázi e_i. Abychom ukázali, že (2.27) definuje zobrazení z $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ do $\mathcal{E}$, musíme prověřit nezávislost pravé strany na zvolené bázi e_i. Užijeme–li jiné báze f_i, snadno odvodíme s pomocí vztahů (2.15), (2.20) a (2.11), že platí

$$\xi^i\eta^j\lambda^k u^l{}_{ijk}e_l=\xi'^i\eta'^j\lambda'^k u'^l{}_{ijk}f_l \tag{2.28}$$

(kde „čárkované“ veličiny jsou vztaženy k bázi f_i), tj. že vektor na pravé straně (2.26) nazávisí na volbě báze, s pomocí které byl konstruován. Tím je již ukázáno, že vzniká trilineární zobrazení z $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ do $\mathcal{E}$. Popsanou konstrukci lze obrátit a z každého daného trilineárního zobrazení $u:\mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ zkonstruovat tenzor (označený stejně) $u\in\mathcal{E}\otimes(\bigotimes^3\mathcal{E}^*)$ vztahem (2.27) se složkami

$$u(e_i,e_j,e_k)=u^l{}_{ijk}e_l \tag{2.29}$$

Získaný tenzor definuje (vztahem (2.26)) původní trilineární zobrazení u. Tím je ukkázáno, že tenzory z prostoru $\mathcal{E}\otimes(\bigotimes^3\mathcal{E}^*)$ lze považovat za trilineární zobrazení z $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ do $\mathcal{E}$.

Podobně lze popsat např. tenzory z prostoru $\mathcal{E}^*\otimes\mathcal{E}^*$. Každý takový tenzor u definuje bilineární formu $u:\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{R}$ vztahem

$$u(\xi,\eta)=u_{ij}\xi^i\eta^j, \tag{2.30}$$

ve kterém čísla u_{ij} představují složky tenzoru u vůči bázi $e^i\otimes e^j$, tenzor u definuje bilineární formu $u:\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to\mathcal{R}$ vztahem

$$u=u_{ij}e^i\otimes e^j, \tag{2.31}$$

Obráceně každá bilineární forma $u : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{R}$ definuje tenzor (2.31) vztahem

$$u_{ij} = u(e_i, e_j). \tag{2.32}$$

Tenzory typu $(0, 2)$ lze tedy interpretovat jakožto bilineární formy na $\mathcal{E}$.

Zobecnění našich úvah na libovolné tenzory typu (r, s) s $r = 0, 1$ je zřejmé.

Poznámky a úlohy

7. Přepište vztahy (2.5), (2.10), (2.11), (2.13), resp. (2.14) pro složky tenzorů zvoleného typu na daném vektorovém prostoru (vůči bazím, indukovaným stejnou bazí základního prostoru).

8. V n–rozměrném vektorovém prostoru $\mathcal{E}$ uvažujme libovolné báze e_i, f_i a tenzor $\Delta = \delta^i_j f_i \otimes f^j$, kde δ^i_j je Kroneckerův symbol (1.8). Určíme složky tenzoru Δ vůči bázi $e_i \otimes e^j$. S označením podle (2.19) bude $\delta^i_j f_i \otimes f^j = \delta^i_j A^k_i B^j_l e_k \otimes e^l = \delta^k_l e_k \otimes e^l$, takže tenzor Δ má stejné složky vůči všem indukovaným bazím. Zdálo by se, že se složky tohoto tenzoru „netransformují“ (porovnejte s (2.25). Tenzor Δ nazýváme *Kroneckerovým tenzorem.* Přesvědčte se o tom, že Kroneckerův symbol nedefinuje tenzor podobných vlastností v žádném z prostorů $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$, $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$.

9. Položme

$$\delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \det \begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \delta^{i_2}_{j_1} \\ \delta^{i_1}_{j_2} & \delta^{i_2}_{j_2} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

a s označením z poznámky 8. uvažujme tenzor z prostoru $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$, který má v bázi $f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes f^{j_1} \otimes f^{j_2}$ složky $\delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$. Platí jako výše

$$\delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes f^{j_1} \otimes f^{j_2} = \delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2}, \tag{2.34}$$

takže tento tenzor má vůči nové bázi opět složky $\delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$. V úplné analogii s (2.33) se definuje pro obecná r tzv. *zobecněný Kroneckerův symbol* $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ a příslušný tenzor typu (r, r) na $\mathcal{E}$, nazývaný *zobecněný Kroneckerovým tenzorem.*

10. Operace tenzorového součinu $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (\xi, \lambda) \to \xi \otimes \lambda \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ není komutativní. Ukažte to na příkladě $e_i \otimes e_j \neq e_j \otimes e_i$ s použitím vztahu (2.6).

11. Tenzorové součiny tvaru $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_k$, kde každý z prostorů $\mathcal{F}_i$ je buď daný vektorový prostor $\mathcal{E}$ nebo duální prostor $\mathcal{E}^*$, se nazývají *prostory tenzorů smíšených* na $\mathcal{E}$. Pořadí činitelů $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^*$ zde může být libovolné. V této knize nebudeme pracovat s prostory tenzorů smíšených jiného druhu než (2.21).

2.5 Úžení, antisymetrizace a symetrizace tenzorů

Operace úžení přiřazuje tenzorům typu (r, s) tenzory typu $(r - 1, s - 1)$ a je tudíž definována pouze pro $r \geq 1$, $s \geq 1$. Zavedeme ji na příkldě tenzorů typu $(1, 2)$. Zobecnění pro tenzory libovolného typu bude zřejmé.

Uvažujme prostor $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$ tenzorů typu $(1, 2)$ na n–rozměrném vektorovém prostoru $\mathcal{E}$. Je–li e_i libovolná báze v $\mathcal{E}$, pak každý prvek $u = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$

možno jednoznačně vyjádřit ve tvaru $u = u^i{}_{jk} e_i \otimes e^j \otimes e^k$. Operaci $c^1_1 : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*$ zavádíme formulí

$$c^1_1(u) = u^i{}_{ik} e^k \tag{2.35}$$

a nazýváme *úžením* (*kontrakcí*) *tenzorů v prvním horním* (tzv. *kontravariantním*) *a prvním dolním* (tzv. *kovariantním*) *indexu.* Podobně operaci $c^1_2 : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^* \to \mathcal{E}^*$, danou formulí

$$c^1_2(u) = u^i{}_{ji} e^j \tag{2.36}$$

(*kontravariantním*) *a druhém dolním* (*kovariantním*) *indexu.* Všimněme si, že na pravých stranách výrazů (2.35), (2.36) vystupují součty přes všechny hodnoty indexů, ve kterých se tenzor „úží“. Napíšeme–li operace c^1_1, c^1_2 pomocí jiné báze v $\mathcal{E}$, snadno odvodíme užitím transformačních vztahů (2.25), (2.19) a (2.11), že výrazy (2.35), (2.36) jsou definovány nezávisle na použité bázi.

Zcela analogicky se zavádí operace *úžení v p–tém kontravariantním a q–tém kovariantním indexu* pro tenzory, kde má tato operace smysl (např. operace úžení v druhém kontravariantním a druhém kovariantním indexu není pro tenzory z prostoru $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$ definována). Je jasné, že operace úžení je lineární, což znamená, že platí

$$\begin{gathered} c^p_q(u+v) = c^p_q(u) + c^p_q(v) \\ c^p_q(c.v) = c.c^p_q(u) \end{gathered} \tag{2.37}$$

pro libovolné tenzory u, v daného typu a $c \in \mathcal{R}$.

Přejdeme nyní k zavedení operace antisymetrizace a symetrizace tenzorů. Uvažujme pro konkrétnost tenzory typu $(0, r)$ na vektorovém prostoru $\mathcal{E}$. Nechť e_i je libovolná báze v $\mathcal{E}$, $u \in \otimes^r \mathcal{E}$ libovolný tenzor. Napište u ve tvaru $u = u_{i_1 \dots i_r} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}$. Nechť p, q jsou indexy takové, že $1 \le p < q \le r$. Klademe

$$\begin{aligned} A_{pg}(u) &= \tfrac{1}{2}\left(u_{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r} - u_{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}\right) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}, \\ \varphi_{pg}(u) &= \tfrac{1}{2}\left(u_{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r} + u_{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}\right) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Pravé strany výrazů (2.38) jsou definovány nezávisle na volbě báze e_i. Prověříme to pro výraz $A_{pg}(u)$. Je–li ξ_i jiná báze v $\mathcal{E}$, pak lze přejít k původní bázi pomocí vztahů (2.19). Vyjádření $u = v_{k_1 \dots k_r} f^{k_1} \otimes \dots \otimes f^{k_r}$ pak dává relaci $u_{i_1 \dots i_r} = B^{k_1}_{i_1} \dots B^{k_r}_{i_r} v_{k_1 \dots k_r}$, odkud přímo dostáváme

$$\frac{1}{2}\left(v_{k_1 \dots k_p \dots k_q \dots k_r} - v_{k_1 \dots k_q \dots k_p \dots k_r}\right) f^{k_1} \otimes \dots \otimes f^{k_r} = \frac{1}{2}\left(u_{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r} - u_{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}\right) e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_r}. \tag{2.39}$$

Diskutovaná nezávislost na bázi znamená, že tenzoru u je přiřazen jediný tenzor $A_{pq}(u)$ resp. $\varphi_{pq}(u)$. Zobrazení $\otimes^r \mathcal{E}^* \ni u \to A_{pq}(u) \in \otimes^r \mathcal{E}^*$ resp. $\otimes^r \mathcal{E}^* \ni u \to \varphi_{pq}(u) \in \otimes^r \mathcal{E}^*$ se nazývá *antisymetrizací* resp. *symetrizací v p–tém a q–tém indexu.* O tenzoru u, pro který platí

$$A_{pq}(u) = u \tag{2.40}$$

říkáme, že je *antisymetrický v p–tém a q–tém indexu*; to je motivováno vlastností, že záměna p–tého a q–tého indexu složek tenzoru (2.40) vůči libovolné bázi je ekvivalentní se záměnou znaménka:

$$u_{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r} = -u_{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}. \tag{2.41}$$

Tenzor u, splňující vztah

$$\varphi_{pq}(u) = u \tag{2.42}$$

se nazývá *symetrický v p–tém a q–tém indexu.* V libovolné bázi platí pro jeho složky

$$u_{i_1 \dots i_p \dots i_q \dots i_r} = u_{i_1 \dots i_q \dots i_p \dots i_r}. \tag{2.43}$$

Operace antisymetrizace a symetrizace tenzorů lze snadno zobecnit v několika směrech. Popíšeme to slovně bez uvádění formálně (ne však „myšlenkově“) složitých vzorců, jelikož při praktickém sestavování příslušných formulí nemůže dojít k žádnému nedorozumění. Operaci *antisymetrizace* můžeme zobecnit na více indexů tak, že vytváříme výrazy, lišící se od původního pouze permutacemi těchto indexů a pak tyto výrazy sečteme se znaménkem plus nebo mínus podle toho, zda obsahují sudou nebo lichou permutaci původních indexů; výsledný součet vydělíme faktorem, rovným počtu sčítanců, tj. v případě k indexů číslem k. Při *symetrizaci* postupujeme obdobně s tím rozdílem, že všechny sčítance bereme se znaménkem plus. Další možnost rozšíření operace symetrizace a antisymetrizace spočívá v jejím zavedení pro kontravariantní tenzory.

Poznámky a úlohy

12. Prověřte, že výrazy (2.35), (2.36) jsou definovány nezávisle na volbě báze e_i prostoru $\mathcal{E}$.

13. Každý tenzor $g \in \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$ se dá jednoznečně vyjádřit ve tvaru součtu tenzoru symetrického a antisymetrického (v indexech $1, 2$),

$$g = A_{12}(g) + \varphi_{12}(g). \tag{2.44}$$

Pro tenzory vyšších řádů podobné tvrzení neplatí. Např. symetrizací tenzoru $u \in \otimes^3 \mathcal{E}^*$ ve všech indexech dostáváme

$$\varphi_{123}(u) = \frac{1}{3}\left(u_{ijk} + u_{ikj} + u_{kij} + u_{kji} + u_{jik} + u_{jki}\right) e^i \otimes e^j \otimes e^k, \tag{2.45}$$

odkud je vidět, že tenzor $u - \varphi_{123}(u)$ není antisymetrický ve všech indexech.

14. Je–li tenzor $u \in \otimes^3 \mathcal{E}$ vyjádřen ve tvaru $u = u^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k$, pak tenzor $\varphi^{13}(u)$, vznikající symetrizací v prvním a třetím indexu, bude vyjádřen jako

$$\varphi^{13}(u) = \frac{1}{2}\left(u^{ijk} + u^{kji}\right) e_i \otimes e_j \otimes e_k. \tag{2.46}$$

15. Tenzory mohou mít i *složitější vlastnosti symetrie*, než je popsaná symetričnost nebo antisymeričnost. Např. pro kovariantní tenzor $R = (R_{ijkl})$ (porov. s pozn. 6) může platit

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}. \tag{2.47}$$

Tenzor R je tedy antisymetrický v prvním a druhém indexu, antisymetrický ve třetím a čtvvrtém indexu a symetrický v první a druhé dvojici indexů.

2.6 Metriky, zvedání a snižování indexů

Uvažujme libovolnný kovariantní tenzor g druhého řádu na daném vektorovém prostoru $\mathcal{E}$. Pro složky g_{ij} resp. g'_{ij} tenzoru g vůči bázi $e^i \otimes e^j$ resp. $f^i \otimes f^j$ platí vztah $g'_{kl} = A^i_k A^j_l g_{ij}$ (2.25), kde $A = \left(A^i_k\right)$ označuje matici přechodu od báze e_i k f_i. Platí tedy $\det(g'_{kl}) = (\det A)^2 . \det(g_{ij})$ a vidíme, že z podmínky $\det(g_{ij}) \neq 0$ v nějaké bázi vyplývá platnost stejné podmínky v libovolné jiné bázi. Podmínka $\det(g_{ij}) \neq 0$ tedy charakterizuje samotný tenzor g a ne pouze jeho složky vůči určité konkrétní bázi. Je–li splněna, říkáme, že tenzor g je *regulární.* Totéž říkáme o každé bilineární formě (viz (2.30)), definované regukárním tenzorem.

Pro hlubší studium tenzorů z $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}^*$ je třeba vycházet z následujícího výsledku o struktuře bilineárních forem (poznámka pod čarou, doplnit).

Teorém o normálním tvaru regulární bilineární formy. Ke každé regulární bilineární formě g na n–rozměrném vektorovém prostoru $\mathcal{E}$ lze vybrat bázi e_i v $\mathcal{E}$ tak, že pro všechna $\xi,\ \lambda \in \mathcal{E}$

$$g(\xi, \lambda) = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \lambda^i - \sum_{i=p+1}^{n} \xi^i \lambda^i, \tag{2.48}$$

kde ξ^i resp. λ^i jsou složky vektoru ξ resp. λ vůči bázi e_i. Číslo p je nezávislé na výběru báze e_i, ve které má forma g uvedený tvar.

Tenzor g, odpovídající formě (2.48), má tedy v bázi e_i tvar

$$g = e^1 \otimes e^1 + \ldots + e^p \otimes e^p - e^{p+1} \otimes e^{p+1} - \ldots - e^n \otimes e^n. \tag{2.49}$$

Říkame, že bilineární forma resp. tenzor g je vztahem (2.48) resp. (2.49) vyjádřena v *normálním tvaru.* Věta o normálním tvaru ukazuje, že počet p člen s koeficientem $+1$ a počet q členů s koeficientem -1 je v kažkém normálním tvaru stejný. Dvojici (p, q) budeme nazývat *signaturou* bilineární formy resp. tenzoru g. Evidentně platí $p + q = n$.

Nyní můžeme přejít k definicím. Každý regulární symetrický kovariantní tenzor druhého řádu na n–rozměrném vektorovém prostoru $\mathcal{E}$ budeme nazývat *metrickým tenzorem* nebo krátce *metrikou* na $\mathcal{E}$. Metrický tenzor se signaturou $(n, 0)$ se bude nazývat *pozitivně definitní* nebo také *eukleidovský*; má–li signaturu $(n-1, 1)$, bude se nazývat *Minkowského metrickým tenzorem.*

Výběr metrického tenzoru na $\mathcal{E}$ umožňuje zobrazovat kovariantní tenzory na kontravariantní a obráceně. Vznikající vzájemně jednoznačné a lineární zobrazení se nazývá prostě *zvedáním* resp. *snižováním indexů.* Stačí ukázat na jednoduchých příkladech, jak je toto zobrazení zavedeno. Nechť g_{ij} jsou složky metrického tenzoru g vůči bázi, indukované bazí e_i prostoru $\mathcal{E}$. Označme g^{ij} matici, inverzní k matici g_{ij}. Platí

$$g_{ij} g^{jk} = \delta^k_i,\ g^{jk} g_{kl} = \delta^j_l. \tag{2.50}$$

Každý tenzor $u \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $u = u^{ij}_k e_i \otimes e_j \otimes e^k$. Přiřadíme–li tomuto tenzoru jiný tenzor $v = v^{ijl} e_i \otimes e_j \otimes e_l$ vztahem

$$v^{ijl} = g^{lk} u^{ij}_k, \tag{2.51}$$

říkáme, že jsme *zvedli* index k (pomocí metrického tenzoru g). Přiřadíme–li mu tenzor $w = w_{lmk} e^l \otimes e^m \otimes e^k$ vztahem

$$w_{lmk} = g_{li} g_{mj} u^{ij}_k, \tag{2.52}$$

říkáme, že jsme *snížili* indexy i a j. V prvním případě šlo o zobrazení z $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*$ do $\otimes^3 \mathcal{E}$, ve druhém o zobrazení z $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*$ do $\otimes^3 \mathcal{E}^*$. Inverzní zobrazení k těmto dvěma zobrazením jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} u^{ij}_k &= g_{kl} v^{ijl}, \\ u^{ij}_k &= g^{il} g^{jm} w_{lmk}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

ze kterých je zřejmé, že operace zvedání a snižování indexů jsou vzájemně inverzní. Je možno přímo prověřit, že tyto operace jsou zavedeny korektně, tj. nezávisle na zvolené bázi. Z popsaných příkladů (2.51) – (2.53) lze snadno poznat, jaké je pravidlo pro zvedání resp. snižování indexů v případě obecných tenzorů typu (p, q).

Poznámky a úlohy

16. Dokažte větu o normálním tvaru bilineární formy.

17. Ukažte, že vztahy (2.51) a (2.52) definují tenzory v, w nezávisle na zvolené bázi.

18. Vyberme v n–rozměrném vektorovém prostoru $\mathcal{R}^n$ *standardní bázi* $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 na i–tém místě). Metrický tenzor g, zadaný v této bázi vztahem $g = e^i \otimes e^i$ (součet přes všechna i), nebo vztahem $g(\xi, \lambda) = \xi^i \lambda^i$, nepředstavuje nic jiného než *standardní eukleidovskou metriku* prostoru $\mathcal{R}^n$. Délka vektoru $\xi \in \mathcal{R}^n$ je definována jako číslo $\sqrt{g(\xi, \xi)}$. Všimněme si, že pro *neeukleidovské metriky*, tj. metriky s jinou signaturou než $(n, 0)$, číslo $\sqrt{g(\xi, \xi)}$ není definováno pro všechny vektory ξ.

19. Uvažujme prostor $\mathcal{R}^4$ s Minkowského metrickým tenzorem g; zadaným ve standardní bázi e_i prostoru $\mathcal{R}^4$ vztahem

$$g = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 - e^4 \otimes e^4 \tag{2.54}$$

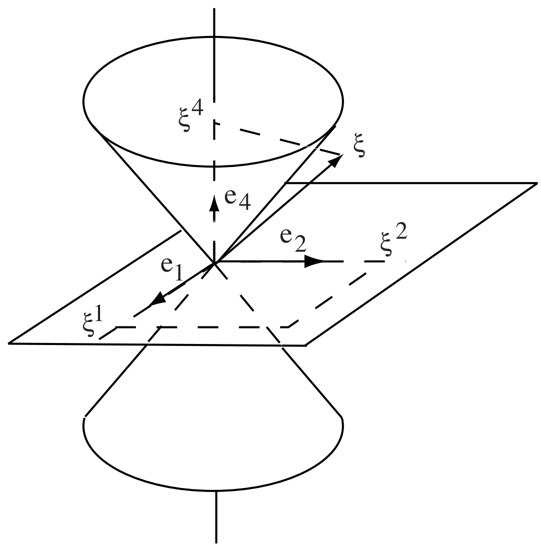
tj. maticí

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

Signaturu $(3, 1)$ tenzoru g budeme často označovat názorněji jako čtveřici $(+, +, +, -)$. Najděte složky tenzoru g vůči bázi f_i, dané formulemi $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = e_3$, $f_4 = e_4$.

20. Minkowského metrický tenzor (2.54) vede na přirozenou klasifikaci vektorů prostoru $\mathcal{R}^4$, která hraje významnou roli v úvahách speciální i obecné teorie relativity. Vektor $\xi \in \mathcal{R}^4$ se nazývá *prostorupodobným* (*časupodobným*, *izotropním*), platí–li $g(\xi, \xi) > 0$ $(g(\xi, \xi) < 0, g(\xi, \xi) = 0)$. Vypište tyto podmínky pro složky tenzoru ξ vůči bazím e_i, f_i (viz poznámka 19). Situace je znázorněna na obr. 7, známém ze speciální teorie relativity. Obrázek znázorňuje tzv. *světelný kužel* $K = \{\xi \in \mathcal{R}^4, g(\xi, \xi) = 0\}$.

Vektory, které leží „uvnitř“ kužele („na“ kuželi, „mimo“ kužel) jsou časupodobné (izotropní, prostorupodobné). Je potřebné, samozřejmě, představit si čtyřdimenzionální analogii našeho obrázku. Světelný kužel představuje množinu vektorů, definovanou „geometricky“, tj. nezávisle na bazích prostoru $\mathcal{R}^4$. To je vidět přímo z jeho definice.



Obr. 7. Světelný kužel.

Kapitola 3

Tenzory na varietách

Postavíme–li před sebe úlohu hledat pomocí lokálních souřadnic na varietách objekty, které by byly na těchto souřadnicích nezávislé, tj. *geometrické objekty*, nepochybně dojdeme k relacím ekvivalence a tenzorům. Už jeden z nejjednodušších a zároveň nejzákladnějších pojmů, které vyšetřujeme — tečný vektor k varietě s počátkem v daném bodě — je přirozeným způsobem popsán jako jistá třída ekvivalence, nezávislá na souřadnicích, třída parametrizovaných křivek, které se navzájem dotýkají. Bez ohledu na to, že je pomocí souřadnic zaveden a že má v různých souřadnicích různé složky. Situace je zde analogická jako v předcházející algebraické kapitole, pouze s tím rozdílem, že primární roli bazí vektorových prostorů, potřebných pro konstrukci tenzorů, přebírají na sebe lokální souřadnicové systémy variet. V prvních odstavcích této kapitoly sledujeme naznačenou ideu a konstruujeme vektory a tenzory v bodech variet, v dalších pak provádíme odpovídající úvahy, týkající se variet jako celku. Fundamentální pojem, který se zde objevuje, je pojem vektorového a obecněji tenzorového pole. Ve fyzice mluvíme o *silovém poli*, *potenciálovém poli*, *poli rychlostí*, *elektromagnetickém poli*, atd.; ve všech případech jde o příklady tenzorových polí, přiřazujících každému bodu variety jistý tenzor „v tomto bodě“. Toto přiřazení může být dáno v souřadnicích, avšak při přechodu k jiným souřadnicím dochází pouze k transformaci složek tenzoru, nikoli ke změně tenzoru samotného.

V této kapitole bude $\mathcal{X}$ všude označovat libovolnou n–rozměrnou varietu, $(\mathcal{U}, \varphi)$ resp. $(\mathcal{V}, \psi)$ lokální souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$ se souřadnicovými funkcemi $(x^1, \ldots, x^n)$ resp. $(y^1, \ldots, y^n)$.

3.1 Tečný prostor k varietě

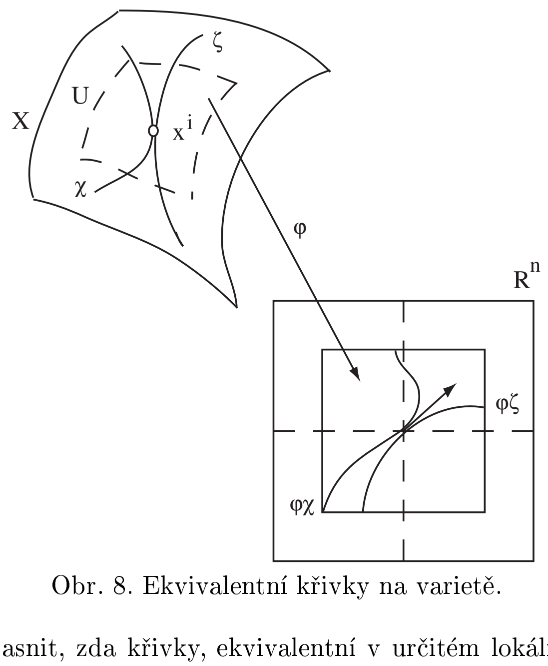
V klasické vektorové analýze je pojem vektoru, tečného k dané křivce, zaveden bezprostředně pomocí derivace této křivky podle jejího parametru. Uvažujme *křivku* ζ v n–rozměrném eukleidovském prostoru $\mathcal{R}^n$ tj. diferencovatelné zobrazení $t \to (\zeta^1(t), \ldots, \zeta^n(t))$ otevřeného intervalu $\mathcal{I}$ na přímce $\mathcal{R}$, obsahujícího z důvodů standardizace bod 0, do $\mathcal{R}^n$. *Tečný vektor* k této křivce v bodě

$x = \zeta(0) \in \mathcal{R}^n$ je dán jako n–tice $\xi = \left((\frac{d\zeta^1}{dt})_0, \ldots, (\frac{d\zeta^n}{dt})_0 \right)$, kde derivace podle parametru t jsou uvažovány v bodě 0. Dvě takové křivky ζ, χ mají v bodě $x = \zeta(0) = \chi(0)$ stejný tečný vektor, platí–li $(\frac{d\zeta^i}{dt})_0 = (\frac{d\chi^i}{dt})_0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Tato úvaha je základem pro zavedení tečných vektorů k libovolné varietě.

Na $\mathcal{X}$ uvažujme systém $Cu\mathcal{X}$ všech dvojic (x, ζ), ve kterých x je bod variety $\mathcal{X}$ a ζ je diferencovatelné zobrazení do variety $\mathcal{X}$ nějakého otevřeného intervalu $\mathcal{I}$ v $\mathcal{R}$, obsahujícího bod 0, takové, že $\zeta(0) = x$. Tedy $Cu\mathcal{X}$ je množina všech *křivek* na $\mathcal{X}$. Každá křivka $(x, \zeta) \in Cu\mathcal{X}$ se dá zobrazit volbou lokálního souřadnicového systému $(\mathcal{U}, \varphi)$ na jistou křivku v $\mathcal{R}^n$. Bude to křivka $t \to \varphi \circ \zeta(t) = (x^1\zeta(t), \ldots, x^n\zeta(t))$ souřadnicová reprezentace křivky *zeta*. Na množině $Cu\mathcal{X}$ zavedeme relaci ekvivalence

$$(x_1, \zeta) \sim (x_2, \chi) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \ \left(\frac{d(x^i\zeta)}{dt} \right)_0 = \left(\frac{d(x^i\chi)}{dt} \right)_0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

kterou čteme takto: Dvě křivky (x_1, ζ), (x_2, χ) se nazývají *ekvivalentní*, platí–li $x_1 = x_2$ a lze vybrat lokální souřadnice $(x^1, \ldots, x^n)$ tak, že souřadnicové reprezentace těchto křivek mají stejný tečný vektor v $\mathcal{R}^n$ v bodě $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \in \mathcal{R}^n$ (viz obr. 8).



Obr. 8. Ekvivalentní křivky na varietě.

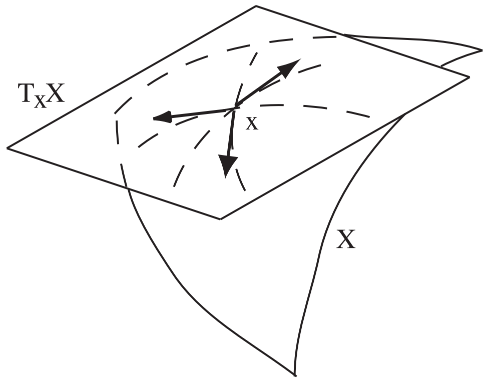
Je třeba vyjasnit, zda křivky, ekvivalentní v určitém lokálním souřadnicovém systému, jsou ekvivalentní i v ostatních lokálních souřadnicových systémech. Kdyby tomu tak nebylo, definice ekvivalentních křivek by byla závislá na použitých souřadnicích a neměla by žádný geometrický obsah. Pro dvoje lokání souřadnice $(x^1, \ldots, x^n)$, $(y^1, \ldots, y^n)$ dostáváme z pravidla pro derivaci složené

funkce
$$\frac{d(y^k\zeta)}{dt} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{d(x^i\zeta)}{dt}. \tag{3.2}$$
Jelikož Jacobiho matice $\frac{\partial y^k}{\partial x^i}$ je regulární, vztah $\left(\frac{d(y^k\zeta)}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d(y^k\chi)}{dt}\right)_0$ platí tehdy a jen tehdy, když $\left(\frac{d(x^k\zeta)}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d(x^k\chi)}{dt}\right)_0$ $(k = 1,\ldots,n)$. Křivky, ekvivalentní v nějakém lokálním souřadnicovém systému, jsou ekvivalentní ve všech souřadnicích. Takto je relace (3.1) nezávislá na souřadnicích $x^1,\ldots,x^n$. Nebudeme ukazovat, že skutečně představuje relaci ekvivalence (kapitola 2.1) na množině $Cu\mathcal{X}$. Třídu ekvivalence $\xi = \{(x,\zeta)\}$ nazveme *tečným vektorem* k varietě $\mathcal{X}$ v bodě x, nebo také s *počátkem* x.

Do konce tohoto odstavce se budeme věnovat úvahám o struktuře množiny $T_x\mathcal{X}$ všech tečných vektorů k $\mathcal{X}$ v libovolně zvoleném bodě x.

Zvolme lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U},\varphi)$ na $Cu\mathcal{X}$ s $x \in \mathcal{U}$, tečný vektor $\xi \in T_x\mathcal{X}$ a reprezentanta $(x,\zeta) \in \xi$. S $(\mathcal{U},\varphi)$ je svázáno zobrazení
$$T_x\mathcal{X} \ni \xi \to T_x\varphi\xi = \left(\left(\frac{d(x^i\zeta)}{dt}\right)_0\right) \in \mathcal{R}^n, \tag{3.3}$$
kde n–tici čísel na pravé straně chápeme jako matici, tvořenou sloupcem. Pravá strana výrazu (3.3) nezávisí na volbě reprezentanta $(x,\zeta) \in \xi$, takže zobrazení $T_x\varphi$ je dobře definováno. Zobrazení $T_x\varphi$ je *vzájemně jednoznačné*: Skutečně, podmínka $T_x\varphi.\xi = T_x\varphi.\lambda$ dává ihned $\xi = \lambda$. Dále k libovolné n–tici $(\xi^i) \in \mathcal{R}^n$ (chápané jako sloupec) uvažujme křivku $\zeta(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t(\xi^1,\ldots,\xi^n))$ na $\mathcal{X}$. Přímý výpočet dává $\left(\frac{d(x^i\zeta)}{dt}\right)_0 = \xi^i$, takže třída ekvivalence $\{(x,\zeta)\}$ se zobrazením $T_x\varphi$ převádí na předem zvolenou n–tici (ξ^i). Zobrazení $T_x\varphi$ tedy zobrazuje na celý prostor $\mathcal{R}^n$. Tato množina $T_x\varphi$ je vlastně „kopií“ n–rozměrného vektorového prostoru $\mathcal{R}$.

S pomocí zobrazení (3.3) možno do množiny $T_x\varphi$ zavést operace sečítání a násobení skalárem. Všimněme si proto, že vztah (3.2) lze pro lokální souřadnicové systémy $(\mathcal{U},\varphi)$, $(\mathcal{V},\psi)$ přepsat ve tvaru $T_x\psi\xi = \mathcal{J}_{\varphi(x)}(\psi\varphi^{-1}).(T_x\varphi\xi)$ s Jacobiho maticí zobrazení $\psi\varphi^{-1}$ (1.1), odkud dostáváme
$$T_x\psi \circ (T_x\varphi)^{-1} = \mathcal{J}_{\varphi(x)}(\psi\varphi^{-1}) \tag{3.4}$$
Proto pro libovolné $a,b \in \mathcal{R}$, $\xi,\lambda \in T_x\mathcal{X}$ výraz $(T_x\varphi)^{-1}(aT_x\varphi\xi + bT_x\varphi\lambda)$ je ve skutečnosti nezávislý na volbě $(\mathcal{U},\varphi)$: Je roven výrazu $(T_x\psi)^{-1}(T_x\psi)(T_x\varphi)^{-1}(a.T_x\varphi\ T_x\psi^{-1}\ T_x\varphi.\xi + b.T_x\varphi\ T_x\psi^{-1}\ T_x\varphi\ .\lambda) = (T_x\varphi)^{-1}(a.T_x\psi.\xi + b.T_x\psi.\lambda)$. Definujeme operace sečítání a násobení skalárem pro tečné vektory s počátkem x vztahem
$$a.\xi + b.\lambda = (T_x\varphi)^{-1}(a.T_x\varphi.\xi + b.T_x\varphi.\lambda). \tag{3.5}$$
S těmito operacemi se množina $T_x\mathcal{X}$ stává vektorovým prostorem, který nazýváme *tečným prostorem* k varietě $\mathcal{X}$ v bodě x. Popsaná situace je znázorněna na obr. 9.



Obr. 9. Tečný prostor k varietě $\mathcal{X}$ v bodě x.

Je potřebné zdůraznit, že každý lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$ na $\mathcal{X}$ s $x \in \mathcal{U}$ definuje vzájemně jednoznačné lineární zobrazení $T_x\varphi$: $T_x\mathcal{X} \to \mathcal{R}^n$. Takto i když struktura vektorového prostoru v $T_x\mathcal{X}$ je dána vztahem (3.5) nezávisle na volbě $(\mathcal{U}, \varphi)$, existuje nekonečně mnoho ztotožnění $T_x\mathcal{X}$ s $\mathcal{R}^n$ podle toho, jaké $(\mathcal{U}, \varphi)$ vybereme.

Nyní ukážeme, že s každým lokálním souřadnicovým systémem $(\mathcal{U}, \varphi)$ s $x \in \mathcal{U}$ je svázána jistá báze vektorového prostoru $T_x\mathcal{X}$. Předpokládejme ,že zobrazení φ převádí bod x do počátku $0 \in \mathcal{R}^n$; tato podmínka může být vždy splněna případnou dodatečnou translací v $\mathcal{R}^n$. Křivky (x, ζ), kde

$$\zeta^i(t) = \varphi^{-1}(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0) \tag{3.6}$$

(argument t na i–tém místě) se nazývají *souřadnicovými křivkami* lokálního souřadnicového systému $(\mathcal{U}, \varphi)$. Jsou to vlastně strany otevřených intervalů na souřadnicových osách (křivkách) v $\mathcal{R}^n$ při zobrazení φ^{-1}. Tečné vektory k těmto křivkám v bodě x,

$$e_i = \{(x, \zeta^i)\}, \tag{3.7}$$

tvoří bázi v $T_x\mathcal{X}$, protože se vzájemně jednoznačným zobrazením $T_x\varphi$ přenáší na standardní bázi prostoru $\mathcal{R}^n$:

$$T_x\varphi . e_i = \left(\left(\frac{d(x^k \zeta^i)}{dt} \right)_0 \right) = (\delta_i^k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ j \end{pmatrix} i \tag{3.8}$$

(1 na i–tém místě). Naše úvaha ukazuje, že s každým lokálním souřadnicovým systémem lze svázat bázi vektorového prostoru $T_x\mathcal{X}$, tzv. bázi *indukovanou* daným lokálním souřadnicovým systémem, tvořenou vektory tečnými k souřadnicovým křivkám tohoto lokálního souřadnicového systému. Popsaná situace je znázorněna na obr. 10.

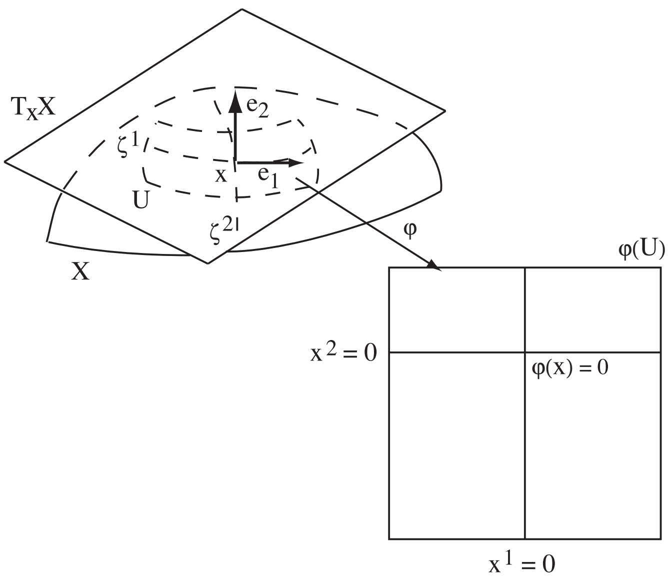
Nechť $\xi \in T_x\mathcal{X}$, $(x,\zeta) \in \xi$. Označíme–li

$$\xi^i = \left(\frac{d(x^i\zeta)}{dt}\right)_0, \tag{3.9}$$

pak z (3.3), (3.8) a (3.5) dostaneme $T_x\varphi.\xi = (\xi^i) = \xi^1.T_x\varphi.e_1 + \ldots + \xi^n.T_x\varphi.e_n$, kde jako výše výrazy (ξ^i), $T_x\varphi.e_i$ jsou zapisovány jako sloupce, odkud užitím (3.5) dostáváme vyjádření

$$\xi = \xi^i.e_i. \tag{3.10}$$

Čísla ξ^i tedy představují *složky* vektoru ξ vůči indukované bázi e_i. V souvislosti s tím často označujeme tečné vektory z $T_x\mathcal{X}$ přímo symbolem ξ^i. Tento způsob označování poskytuje ovšem možnost nedorozumění tím, že z něho není poznat, jakou bázi e_i máme na mysli. Nebezpečí nedorozumění je zde (podobně jako v mnoha jiných analogických případech) ovšem často minimalizováno tím, že pracujeme s tzv. *invariantními výrazy*, krátce s *invarianty*, které nezávisí na volbě konkrétní báze eventuálně konkrétního lokálního souřadnicového systému. Další zjednodušení vyjádření děláme často tím, že o prvcích tečného prostoru $T_x\mathcal{X}$ mluvíme prostě jako o *vektorech* (ne o tečných vektorech).



Obr. 10.Indukovaná báze tečného prostoru.

Daný vektor $\xi \in T_x\mathcal{X}$ můžeme vyjádřit vůči bázi e_i, indukované lokálními souřadnicemi $x^1, \ldots, x^n$, i vůči bázi f_i, indukované jinými lokálními souřadnicemi $y^1, \ldots, y^n$. Dostaneme $\xi = \xi^i e_i = \xi'^i f_i$, přičemž pro složky vektoru ξ vůči těmto indukovaným bazím platí transformační vztah

$$\xi'^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\xi^i, \tag{3.11}$$

vyplývající z (3.9) a (3.2). Doporučujeme čtenáři, aby se nad tímto vztahem zamyslel, než přejde k materiálu dalšího odstavce, porovnal ho se vztahy (2.2), (2.19), (2.20), (2.25) z předcházející kapitoly.

Poznámky a úlohy

1. Vektor s počátkem v daném bodě prostoru $\mathcal{R}^n$ tak, jak jej známe z klasické vektorové analýzy, tj. *vázaný vektor*, to je tečný vektor k varietě $\mathcal{R}^n$ (kapitola 1, pozn. 5) v tomto bodě.

2. Ukažte, že (3.1) skutečně představuje relaci ekvivalence.

3. Prodiskutujte pojem souřadnicových křivek, daných polárními souřadnicemi v rovině (viz kapitola 1., pozn. 10), procházejících bodem $x = (1, 1)$.

4 Uvažujme dvourozměrnou sféru $\mathcal{S}^2$, zavedenou podobně jako v kapitole 1, pozn. 8, 9. Určete souřadnicové křivky lokálních souřadnicových systémů, daných v okolí bodu $(1, 0, 0) \in \mathcal{S}^2$ v přirozených souřadnicích prostoru $\mathcal{R}^3$. *Sférické souřadnice* (r, θ, φ) prostoru $\mathcal{R}^3$, svázané se standardními souřadnicemi (x^1, x^2, x^3) vztahy $x^1 = r \sin\theta\cos\varphi$, $x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x^3 = r\cos\theta$, také definují lokální souřadnicový systém na okolí bodu x. Určete souřadnicové křivky tohoto lokálního souřadnicového systému.

3.2 Vektory a derivace v daném směru

Připomeňme si, že každý vektor ξ s počátkem v bodě x definuje *operaci derivování funkcí ve směru* tohoto vektoru. Funkci f je touto operací přiřazeno číslo $\xi^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_x$, kde ξ^i jsou složky vektoru ξ vůči bázi, indukované standardními souřadnicemi variety $\mathcal{R}^n$ v prostoru $T_x\mathcal{R}^n$. Toto číslo charakterizuje chování funkce f v okolí bodu x ve směru vektoru ξ. Prodiskutujme si podrobněji podobnou konstrukci pro diferencovatelné variety.

Uvažujme n–rozměrnou varietu $\mathcal{X}$, tečný prostor $T_x\mathcal{X}$ v libovolném bodě x, vektor $\xi \in T_x\mathcal{X}$ a funkci $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$. Zvolme lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$ na $\mathcal{X}$ s $x \in \mathcal{U}$ a označme $x^1, \ldots, x^n$ příslušné souřadnicové funkce.Vektor ξ pak můžeme vyjádřit v indukované bázi, $\xi = \xi^i e_i$, a uvažovat výraz $\xi^i \left(\frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)}$, ve kterém $f\varphi^{-1}$ je souřadnicová reprezentace funkce f. Při přechodu k jinému lokálnímu souřadnicovému systému $(\mathcal{V}, \psi)$, kde $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$, dostaneme s pomocí (3.10) a (3.11) $\xi'^k \left(\frac{\partial(f\psi^{-1})}{\partial y^k}\right)_{\psi(x)} = \xi^i \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right) \left(\frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x^l}\right)_{\varphi(x)} \frac{\partial x^l}{\partial y^k} = \xi^i \left(\frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)}$, takže uvažovaný výraz je definován nezávisle na volbě lokálního souřadnicového systému, tj. invariantně vůči záměně souřadnic. Klademe

$$\xi(f) = \xi^i \left(\frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} \tag{3.12}$$

a číslo $\xi(f)$ nazýváme *derivací funkce f ve směru vektoru ξ*. Říkáme také, že vztahem (3.12) je zavedeno *derivování funkcí ve směru vektoru ξ*. Pro libovolné funkce f, g a libovolné skaláry $a, b \in \mathcal{R}$ zřejmě platí

$$\xi(af + bg) = a\xi(f) + b\xi(g), \xi(fg) = g\xi(f) + f\xi(g), \tag{3.13}$$

takže působení vektorů na funkce je lineární a vůči součinu funkcí se chová jako operátor derivace. Platí také obrácené tvrzení, tvořící základ pro volné zacházení s vektory jakožto s diferenciálními operátory, které zde nebudeme dokazovat [1].

Teorém o derivování ve směru vektoru. Každé zobrazení ξ, přiřazující funkcím na $\mathcal{X}$ reálná čísla a splňující vztahy (3.13), je derivováním ve směru jistého jednoznačně určeného vektoru z prostoru $T_x\mathcal{X}$.

Opírajíce se o zformulovanou větu, můžeme dát tečným vektorům na varietě dvojí interpretaci. Za prvé, je to interpretace „geometrická“, ve které tečný vektor je třídou ekvivalentních parametrizovaných křivek, kterou lze reprezentovat klasickou šipkou. Druhou je interpretace „analytická“, ve které tečný vektor je diferenciálním operátorem, působícím na funkce a splňujícím vztahy (3.13). Druhá interpretace bude důležitá všude tam, kde půjde o studium chování funkcí eventuálně i složitějších objektů (zobrazení) v určitých daných směrech, tj. v teorii tzv. *Lieových derivací.*

Tyto dvě interpretace formálně sjednotíme tím, že přijmeme jistou konvenci pro označování vektorů indukovaných bazí v tečných prostorech. Nechť e_i označuje bázi (3.7), indukovanou v $T_x\mathcal{X}$ lokálním souřadnicovým systémem $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Vektory e_i působí na funkce f podle vztahu $e_i(f) = (\frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x^i})_{\varphi(x)}$. Zavedeme zjednodušené označení

$$e_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x , \tag{3.14}$$

které také lépe demonstruje, že e_i je báze, indukovaná v $T_x\mathcal{X}$ lokálními souřadnicemi x^i. S tímto označením pak vektor $\xi \in T_x\mathcal{X}$ uvažovaný buď „geometricky“ nebo „analyticky“, přepisujeme ve tvaru

$$\xi = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x . \tag{3.15}$$

3.3 Tenzory v bodě variety

V předcházející diskusi bylo ukázáno, že s každým bodem x n–rozměrné variety $\mathcal{X}$ je přirozeným způsobem svázán n–rozměrný vektorový prostor $T_x\mathcal{X}$, tečný prostor k varietě $\mathcal{X}$ v bodě x. Zkombinujeme–li to s výsledky předcházející kapitoly o tenzorech na libovolných vektorových prostorech, vidíme, že s tímto bodem jsou zároveň spojeny *prostory tenzorů typu* (r, s) *v bodě* x — tj. prostory tenzorů typu (r, s) na vektorovém prostoru $T_x\mathcal{X}$ (viz kapitola 2.4). O prvcích těchto prostorů mluvíme obecně jako o *tenzorech v bodě* x *variety* $\mathcal{X}$. Prostor lineárních forem na $T_x\mathcal{X}$, tj. prostor duální k $T_x\mathcal{X}$ označujeme obvykle $T_x^*\mathcal{X}$

[1] Sternberg, 81; Choquet-Bruhat, 19

místo $(T_x\mathcal{X})^*$. Prostory tenzorů typu (r,s) v bodě x budou pak označovány symboly $(\bigotimes^r T_x\mathcal{X})\otimes(\bigotimes^s T_x^*\mathcal{X})$ (porovnej s (2.21)).

Nechť $(\frac{\partial}{\partial x^i})_x$ je báze prostoru $T_x\mathcal{X}$, indukovaná lokálními souřadnicemi x^i (3.14). Duální bázi prostoru $T_x^*\mathcal{X}$ pak označujeme $(dx^i)_x$ $(i=1,\ldots,n)$ a příslušnou bázi, indukovanou (ve smyslu kapitoly 2.4) bazí $(\frac{\partial}{\partial x^i})_x$ v $(\bigotimes^r T_x\mathcal{X})\otimes(\bigotimes^s T_x^*\mathcal{X})$, symbolem $\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_x\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\right)_x\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)_x\otimes\left(dx^{k_1}\right)_x\otimes\left(dx^{k_s}\right)_x$. Podobně jako v (2.22) možno pomocí indukované báze vyjádřit libovolný tenzor $u\in(\bigotimes^r T_x\mathcal{X})\otimes(\bigotimes^s T_x^*\mathcal{X})$ ve tvaru

$$u=u^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_x\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_x\otimes(dx^{j_1})_x\otimes\ldots\otimes(dx^{j_s})_x \tag{3.16}$$

3.4 Tečné rozvrstvení

Od úvah „v bodě“ dané n–rozměrné variety $\mathcal{X}$ přejdeme nyní k problematice, týkající se $\mathcal{X}$ jako celku. V tomto odstavci budeme studovat strukturu, generovanou diferencovatelnou strukturou na $\mathcal{X}$ na množině všech tečných vektorů k varietě $\mathcal{X}$,

$$T\mathcal{X}=\bigcup_{x\in\mathcal{X}}T_x\mathcal{X}. \tag{3.17}$$

Každému vektoru $\xi\in T\mathcal{X}$ je přiřazen počátek x, určený jednoznačně z podmínky $\xi\in T_x\mathcal{X}$. Vzniká zobrazení

$$T\mathcal{X}\ni\xi\to\tau(\xi)=x\in\mathcal{X} \tag{3.18}$$

množiny všech tečných vektorů *na* celou varietu $\mathcal{X}$. Dále každému lokálnímu souřadnicovému systému $(\mathcal{U},\varphi)$ na $\mathcal{X}$ je přiřazena dvojice $(\tau^{-1}(\mathcal{U}),T\varphi)$, kde $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ je množina všech vektorů z $T\mathcal{X}$, které se zobrazením τ zobrazují do $\mathcal{U}$, a $T\varphi:\tau^{-1}(\mathcal{U})\to\varphi(\mathcal{U})\times\mathcal{R}^n$ je zobrazení, dané vztahem

$$T\varphi(\xi)=\big(\varphi(\tau(\xi));T_{\tau(\xi)}\varphi.\xi\big) \tag{3.19}$$

Zde $\xi\in\tau^{-1}(\mathcal{U})$, takže $x=\tau(\xi)\in\mathcal{U}$ a výraz $\varphi(\tau(\xi))\in\mathcal{R}^n$ má smysl, a zobrazení $T_x\varphi$ je definováno vztahem (3.3). Podobně jako v případě zobrazení $T_x\varphi$ se ukáže, že $T\varphi$ je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ na $\varphi(\mathcal{U})\times\mathcal{R}^n\subset\mathcal{R}^{2n}$. Snadno lze určit složené zobrazení $T\psi\circ(T\varphi)^{-1}:T\varphi\left(\tau^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\right)\to T\psi\left(\tau^{-1}(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})\right)$ pro libovolný jiný lokální souřadnicový systém $(\mathcal{V},\psi)$ na $\mathcal{X}$. Se standardním označením $\varphi=(x^1,\ldots,x^n)$, $\psi=(y^1,\ldots,y^n)$, $T_x\varphi.\xi=(\xi^i_\varphi)$, $T_x\psi.\xi=(\xi'^j_\psi)$. Poslední dva výrazy jsou chápány jako sloupce. Pak dostaneme

$$\left(T\psi\circ(T\varphi)^{-1}\right)(x^1,\ldots,x^n;(\xi^i))=\left(y^1,\ldots,y^n;\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\xi^j\right)\right) \tag{3.20}$$

Porovnáním s obr. 1 a užitím věty o diferencovatelné struktuře (kapitola 1.4) se nyní snadno přesvědčíme o tom, že množina všech dvojic $(\tau^{-1}(\mathcal{U}),T\varphi)$, kde $(\mathcal{U},\phi)$ probíhá nějaký atlas na $\mathcal{X}$, je atlasem na $T\mathcal{X}$. Přitom ekvivalentní atlasy na $\mathcal{X}$ vedou na ekvivalentní atlasy na $T\mathcal{X}$, takže vzniká jednoznačně určená diferencovatelná struktura a $T\mathcal{X}$ se stává $2n$–rozměrnou diferencovatelnou varietou.

Vraťme se k zobrazení τ. Napíšeme–li jeho souřadnicovou reprezentaci $\varphi \circ \tau \circ (T\varphi)^{-1}$, snadno dostaneme, že $2n$–tici $(x^1, \ldots, x^n; (\xi^i))$ zobrazuje na n–tici $(x^1, \ldots, x^n)$, takže je diferencovatelným zobrazením.

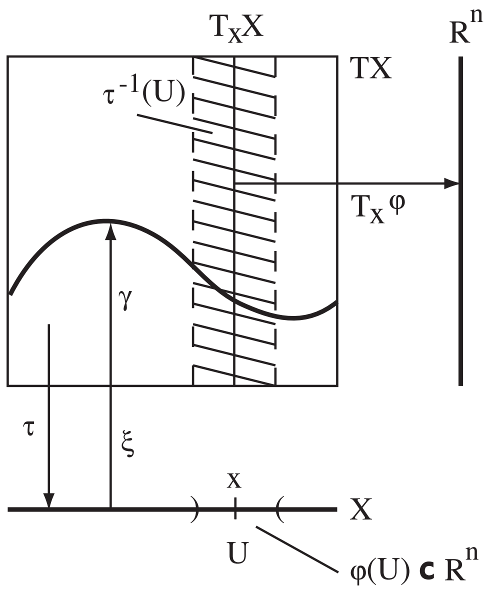
Množinu $T\mathcal{X}$ s popsanou strukturou diferencovatelné variety budeme nazývat *tečným rozvrstvením* variety $\mathcal{X}$, zobrazení τ *projekcí* tečného rozvrstvení.

Vektorovým polem (nebo také *polem vektorů*) na varietě $\mathcal{X}$ nazveme každé (diferencovatelné) zobrazení $\gamma : \mathcal{X} \to T\mathcal{X}$, přiřazující bodu x tečný vektor s počátkem x (tj. vektor z $T_x\mathcal{X}$). Diferencovatelné zobrazení $\gamma : \mathcal{X} \to T\mathcal{X}$ je vektorovým polem tehdy a jen tehdy, když pro každé $x \in \mathcal{X}$ platí $\tau(\gamma(x)) = x$, nebo, což je totéž

$$\tau \circ \gamma = id \tag{3.21}$$

(id označuje identické zobrazení variety $\mathcal{X}$ na sebe).

Pojmy tečného rozvrstvení, projekce, lokálních souřadnicových systémů a vektorového pole jsou schematicky znázorněny na obr. 11. Všimněme si, že vektorové pole γ je na tomto obrázku *definováno* podmínkou, že má opačný směr než projekce τ; „šikmý směr“ šipky zobrazení γ je podmínkou (3.23) zakázán. Dále si všimněme, že vektorový prostor $T_x\mathcal{X}$ je „vrstvou“ *nad* bodem x, což možno považovat za motivaci pro zavedení názvu „tečné rozvrstvení“ pro varietu $T\mathcal{X}$.



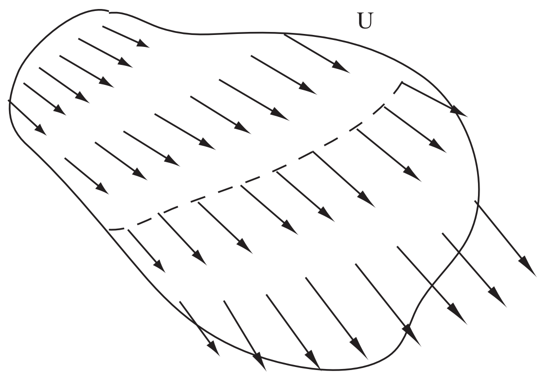
Obr. 11.Tečné rozvrstvení variety $\mathcal{X}$.

Vektorové pole si lze lépe představit na jednoduchém dvourozměrném případě. Každá diferencovatelná *vektorová funkce* $f(x^1, x^2) = (f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2))$, definována na otevřené množině $\mathcal{U}$ v rovině $\mathcal{R}^2$, zadává takové vektorové pole (viz obr. 12); bodu $x = (x^1, x^2) \in \mathcal{U}$ je přiřazen vektor $f(x^1, x^2) \in T_x\mathcal{U}$. Obecně je možné představit si vekotrové pole jako jistou podmnožinu variety $T\mathcal{X}$, která má s každou „vrstvou“ společný pouze jeden bod.

S každým lokálním souřadnicovým systémem $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ lze svázat zobrazení

$$\mathcal{U} \ni x \to \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \in T\mathcal{X}, \tag{3.22}$$

která mají obdobnou vlastnost jako každé vetorové pole, totiž $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \in T\mathcal{X}$ pro každé $x \in \mathcal{U}$, s tím rozdílem, že nejsou obecně definována na celé varietě $\mathcal{X}$, ale pouze na souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$. Nebude nás mýlit poněkud neobvyklé označování zavedených zobrazení, pokud si uvědomíme, že $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ je ve smyslu (3.17) skutečně tečným vektorem z $T_x\mathcal{X}$.



Obr. 12. Pole vektorů.

Pro libovolné vektorové pole $\gamma : \mathcal{X} \to T\mathcal{X}$ a každý bod $x \in \mathcal{U}$ můžeme nyní provést rozklad $\gamma(x) = \gamma^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ (3.15), ve kterém $\gamma^i(x)$ jsou čísla závislá na x. V tomto smyslu vyjadřujeme vektorové pole γ na souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$ prostřednictvím souřadnicových vektorových polí (3.22) ve tvaru

$$\gamma = \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.23}$$

Zde reálné funkce γ^i na $\mathcal{U}$ jsou často chápány jakožto funkce $\gamma^i \circ \varphi^{-1}$ proměnných $x^1, \ldots, x^n$, probíhajících podmnožinu $\varphi(\mathcal{U})$ eukleidovského prostoru $\mathcal{R}^n$; nebudeme to zpravidla zdůrazňovat, protože většinou nemůže dojít k nedorozumění. Funkce γ^i budeme nazývat ***složkami vektorového pole*** γ na souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$. Ze souřadnicové reprezentace $T\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1}$ vektorového pole γ snadno vyvodíme, že funkce γ^i jsou diferencovatelné. Není–li potřebné specifikovat lokální souřadnicový systém na varietě, říkáme jako již mnohokrát předtím (viz např. kapitola 2, pozn. 6).

Poznámky a úlohy

5. Vyšetřete podrobně postup, kterým je na množinu $T\mathcal{X}$ zavedena diferencovatelná struktura.

6. Vezmeme–li za atlas na $\mathcal{R}^n$ jednobodovou množinu $(\mathcal{R}^n, id)$, (kapitola 1, pozn. 6), dostaneme $T\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$. Prvky z $T\mathcal{R}^n$, tj. tečné vektory variety $\mathcal{R}^n$, tzv. vázané vektory, o kterých již byla řeč (pozn. 1), mají tedy dvě komponenty. První popisuje jejich počátek, tj. bod *variety* $\mathcal{R}^n$, druhá vektor z *vektorového prostoru* $\mathcal{R}^n$. Dochází zde k využívání rozdílných struktur na té samé množině $\mathcal{R}^n$ podle toho, která struktura je právě potřebná.

3.5 Rozvrstvení tenzorů

S označením jako v předcházejícím odstavci klademe

$$T^*\mathcal{X} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} T^*_x\mathcal{X}. \tag{3.24}$$

Uvažujme zobrazení z $T^*\mathcal{X}$ *na* $\mathcal{X}$,

$$T^*\mathcal{X} \ni \omega \to \pi(\omega) = x \in \mathcal{X}, \tag{3.25}$$

ve kterém na pravé straně stojí bod x, určený jednoznačně z podmínky $\omega \in T^*_x\mathcal{X}$. V každém $T^*_x\mathcal{X}$, kde x je z uvažovaného souřadnicového okolí $\mathcal{U}$, je dána indukovaná báze $(dx^i)_x$ (viz kapitola 3.3), takže můžeme psát

$$\omega = \omega_i (dx^i)_x, \tag{3.26}$$

kde ω_i jsou jednoznačně určená čísla, závislá na volbě x. Dále klademe

$$T^*_x\varphi.\omega = (\omega_i) \tag{3.27}$$

a

$$T^*\varphi(\omega) = (\varphi(\pi(\omega)); T^*_x\varphi.\omega)\,. \tag{3.28}$$

Je čistě technickou záležitostí ukázat, že dvojice $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), T^*\varphi)$, ve kterých $(\mathcal{U}, \varphi)$ probíhá nějaký atlas na $\mathcal{X}$, tvoří atlas na množině $T^*\mathcal{X}$. Množina $T^*\mathcal{X}$ se tedy stává diferencovatelnou varietou, nazývanou *kotečným rozvrstvením* variety $\mathcal{X}$. Zobrazení π se stává diferencovatelným; budeme ho nazývat *projekcí* kotečného rozvrstvení. Každé diferencovatelné zobrazení $\gamma : \mathcal{X} \to T^*\mathcal{X}$, splňující vztah $\pi \circ \gamma = id$ (porovnej s (3.21)), budeme nazývat *polem lineárnich forem* na varietě $\mathcal{X}$.

S každým lokálním souřadnicovým systémem $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ lze svázat zobrazení

$$\mathcal{U} \ni x \to (dx^i)(x) = (dx^i)_x \in T^*\mathcal{X}, \tag{3.29}$$

$i = 1, \ldots, n$, nazývaná *souřadnicovými poli lineárních forem* na $\mathcal{X}$, nebo prostě *souřadnicovými lineárními formami.* Vztah (3.26) ukazuje, že každé pole lineárních forem $\omega : \mathcal{X} \to T^*\mathcal{X}$ může být na $\mathcal{U}$ reprezentováno ve tvaru

$$\omega = \omega_i dx^i, \tag{3.30}$$

kde ω jsou jednoznačně určené reálné funkce na $\mathcal{U}$ (resp. na $\varphi(\mathcal{U})$), chceme–li je považovat za funkce n reálných proměnných. Tyto funkce se nazývají *složkami lineární formy* ω vůči lokálnímu souřadnicovém systému $(\mathcal{U}, \varphi)$.

V „tenzorové" terminologii (kapitoly 3.3) budeme tečné rozvrstvení variety $\mathcal{X}$ nazývat *rozvrstvením tenzorů typu* $(1,0)$ na $\mathcal{X}$. O kotečném rozvrstvení budeme mluvit jako o *rozvrstvení tenzorů typu* $(0,1)$ na $\mathcal{X}$.

Položme
$$T\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} T_x\mathcal{X} \otimes T^*_x\mathcal{X} \tag{3.31}$$
a uvažujme zobrazení množiny $T\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X}$ *na* $\mathcal{X}$
$$T\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X} \ni u \to \pi(u) = x \in \mathcal{X}, \tag{3.32}$$
ve kterém na pravé straně stojí bod x, určený jednoznačně z podmínky: $u \in T_x\mathcal{X} \otimes T^*_x\mathcal{X}$. V každém $T_x\mathcal{X} \otimes T^*_x\mathcal{X}$, kde x je z uvažovaného souřadnicového okolí $\mathcal{U}$, je dána indukovaná báze $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \otimes (dx^j)_x$ (viz kapitola 3.3), takže z podmínky
$$u = u^i_j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \otimes (dx^j)_x \tag{3.33}$$
lze jednoznačně určit čísla u^i_j, závislá na volbě x. Klademe
$$\phi(u) = \left(\varphi(\pi(u)); (u^i_j)\right). \tag{3.34}$$
Je opět čistě technickou záležitostí ukázat, že dvojice $(\pi^{-1}(\mathcal{U}), \phi)$, ve kterých $(\mathcal{U}, \varphi)$ probíhá nějaký atlas na $\mathcal{X}$, tvoří atlas na množině $T\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X}$. Množina $T\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X}$ se tak stává diferencovatelnou varietou, nazývanou *rozvrstvením tenzorů typu* $(1,1)$ na varietě $\mathcal{X}$. Diferencovatelné zobrazení π se nazývá projekcí tohoto rozvrstvení. Každé diferencovatelné zobrazení $\gamma : \lambda \to T\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X}$, splňující vztah $\gamma \circ \pi = id$ (porov. s (3.21)), budeme nazývat *polem tenzorů typu* $(1,1)$ na $\mathcal{X}$, nebo *tenzorovým polem typu* $(1,1)$ na $\mathcal{X}$.

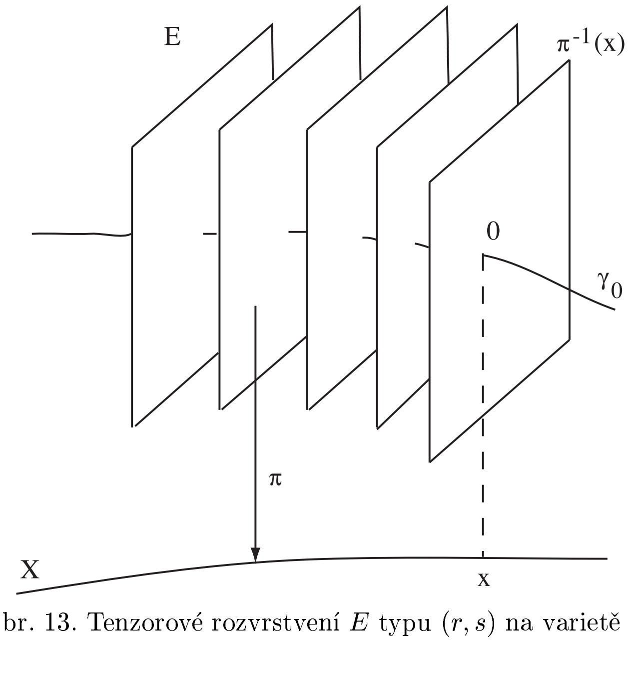
S každým lokálním souřadnicovým systémem $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ jsou svázána zobrazení
$$\mathcal{U} \ni x \to \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right)(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x \otimes (dx^j)_x \in T\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X}, \tag{3.35}$$
nazývaná *souřadnicovými tenzorovými poli typu* $(1,1)$. Pomocí souřadnicových tenzorových polí může být každé tenzorové pole γ typu $(1,1)$ na $\mathcal{X}$ reprezentováno vztahem
$$\gamma = \gamma^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \tag{3.36}$$
kde γ^i_j jsou jednoznačně určené diferencovatelné funkce na $\mathcal{U}$ (resp. na $\varphi(\mathcal{U})$ chceme–li je považovat za funkce n reálných proměnných). Tyto funkce se nazývají *složkami* tenzorového pole γ vůči lokálnímu souřadnicovému systému $(\mathcal{U}, \varphi)$.

Po tomto výkladu čtenář jistě sám dospěl k názoru, že konstrukce obecných *rozvrstvení tenzorů typu* (r,s) na varietě $\mathcal{X}$, $(\bigotimes^r T\mathcal{X}) \otimes (\bigotimes^s T^*\mathcal{X})$, je svým způsobem stereotypní záležitostí a že ji lze snadno provést na základě analogie s rozvrstveními $T\mathcal{X}$, $T^*\mathcal{X}$ a $T^*\mathcal{X} \otimes T^*\mathcal{X}$. Analogicky jsou také zavedena *tenzorová pole typu* (r, s) na varietě $\mathcal{X}$ a *souřadnicová tenzorová pole typu* (r, s). Pro libovolné tenzorové pole u typu (r, s) na varietě $\mathcal{X}$ dostáváme na souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$ s pomocí souřadnic $x^1, \ldots, x^n$ vyjádření

$$u = u^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}, \tag{3.37}$$

ve kterém $u^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s}$ jsou jednoznačně určené diferencovatelné funkce na $\mathcal{U}$, *složky* tenzorového pole u vůči $x^1, \ldots, x^n$.

Pro čtenáře zde ovšem zůstává úkol prodělat alespoň jednu z možných konstrukcí tenzorových rozvrstvení samostatně, nemají–li se stát zavedené pojmy zcela formálními, nic neříkajícími definicemi, Pro toho, kdo cítí potřebu spojit pojem tenzorového rozvrstvení s určitou názornou představou, je připraven obr. 13, představující vlastně jinou verzi obr. 11. Tenzorové rozvrstvení zde představuje „svazek“ kopií jistého vektorového prostoru $\mathcal{R}^m$, kde m je dáno typem rozvrstvení nebo „druhou složkou“ lokálních souřadnic na tomto rozvrstvení. Na obrázku je také znázorněn tzv. *nulový řez* γ_0 daného tenzorového rozvrstvení, přiřazující každému bodu $x \in \mathcal{X}$ nulový tenzor $\gamma_0(x)$ ve „vrstvě“ $\pi^{-1}(x)$ nad bodem x.



Obr. 13. Tenzorové rozvrstvení E typu (r, s) na varietě $\mathcal{X}$.

Poznámky a úlohy

7. Prodiskutujte podrobně strukturu rozvrstvení tenzorů typu $(0,2)$ na dané varietě $\mathcal{X}$.

8. V případě, že za varietu $\mathcal{X}$ z pozn. 7 vezmeme eukleidovský prostor $\mathcal{R}^n$, dostaneme $T^*\mathcal{R}^n \otimes T^*\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^{n^2}$. Zadání tenzorového pole typu $(0,2)$ na varietě $\mathcal{R}^n$ je tedy ekvivalentní se zadáním n^2 funkcí n reálných proměnných. Jak je to v případě *symetrického* resp. *antisymetrického* tenzorového pole typu $(0,2)$, přiřazujícího bodu $x \in \mathcal{R}^n$ symetrický resp. antisymetrický tenzor typu $(0,2)$ v tomto bodě (porov. s kapitolou 2, pozn. 13)?

Pokračujme v úvahách o rozvrstvení tenzorů typu (r,s) na $\mathcal{X}$ pro obecné r, s. Vektorová struktura v každém z prostorů $\pi^{-1}(x) = (\bigotimes^r T_x\mathcal{X}) \otimes (\bigotimes^s T_x^*\mathcal{X})$ umožňuje zavést do množiny všech tenzorových polí typu (r,s) operace *sečítání* a *násobení skalárem* vztahy

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) + \gamma_2(x), (c.\gamma)(x) = c.\gamma(x), \tag{3.38}$$

ve kterých γ_1, γ_2, γ jsou libovolná tenzorová pole typu (r,s) a c je libovolné reálné číslo. V této množině je také definováno *násobení (reálnou) funkcí* f vztahem

$$(f\gamma)(x) = f(x)\gamma(x). \tag{3.39}$$

Kapitola 4

Lieovy derivace

Je velmi dobře známo, jakým silným nástrojem pro zkoumání průběhu funkcí, řekněme, jedné reálné proměnné je teorie derivací. Základní idea diferenciálního počtu — sledovat chování funkce při malých změnách jejího argumentu a aproximovat ji tečnou — nemůže být ovšem beze změny použita pro vyšetřování tenzorových polí. Hlavní důvod spočívá v rozdílu mezi funkcí a polem: Zatímco definovaná změna argumentu určuje zcela jednoznačně příslušnou změnu funkční hodnoty, pole získává v různých bodech hodnoty v různých vektorových prostorech, „vrstvách" nad těmito body, takže přímá možnost srovnání jeho hodnot není možná. Na druhé straně však na varietách tenzorů přirozeným způsobem vznikají zobrazení, „indukovaná" zobrazeními základních variet. Ta umožňují přenášet spolu s body dané variety také hodnoty libovolného tenzorového pole v těchto bodech. Vzniká tím nové tenzorové pole, které již můžeme srovnávat s původním „po jednotlivých bodech", tedy v každé „vrstvě". Naše úvahy o indukovaných zobrazeních lze dále kombinovat s faktem, že každé vektorové pole generuje určitá zobrazení základní variety ve směru „proudu" tohoto vektorového pole, tzv. lokální jednoparametrickou grupu transformací. Zobrazení, indukované touto grupou v prostorech tenzorů, spolu se zadaným tenzorovým polem pak umožňují zkonstruovat jednoparametrický systém tenzorových polí, charakterizující „změnu" výchozího tenzorového pole podél křivek lokální jednoparametrické grupy. Derivováním podle parametru pak docházíme k „infinitezimálním" charakteristikám chování tenzorového pole v zadaném směru, tj. k pojmu Lieovy derivace (podle vektorového pole).

4.1 Indukované difeomorfismy tenzorových rozvrstvení

V tomto odstavci budeme pracovat se situací, kdy jsou dány dvě variety $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ a difeomorfismus α variety $\mathcal{X}$ na $\mathcal{Y}$. Souřadnicová reprezentace zobrazení α vůči daným lokálním souřadnicovým systémům $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, $(\mathcal{V}, \psi)$,

$\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ tj. zobrazení $\psi\alpha\varphi^{-1}$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\begin{aligned} y^k &= f^k(x^1, \ldots, x^n) \\ x^i &= g^i(y^1, \ldots, y^n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nechť $\xi \in T\mathcal{X}$ je libovolný vektor, (x, ζ) jeho reprezentant (kapitola 3.1). Dvojici (x, ζ) přiřadíme vektor z $T\mathcal{Y}$, jehož reprezentantem je křivka $(\alpha(x), \alpha \circ \zeta)$, vznikající přenesením křivky (x, ζ) na $\mathcal{Y}$ zobrazením α. Je–li (x, χ) jiný reprezentant vektoru ξ, pak $(\alpha(x), \alpha \circ \chi) \sim (\alpha(x), \alpha \circ \zeta)$ (porov. (3.1)), takže dvojice $(\alpha(x), \chi)$ reprezentuje stejný vektor jako $(\alpha(x), \zeta)$. Vzniká zobrazení $T\mathcal{X} \ni \xi \to \alpha_0^1(\xi) = \{(\alpha(x), \alpha \circ \zeta)\} \in T\mathcal{Y}$. Přepíšeme toto zobrazení pomocí bazí, indukovaných v tečných prostorech lokálními souřadnicovými systémy $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\mathcal{V}, \psi)$. Položíme–li $\xi = \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ (ref3.15), kde $\xi^i = \left(\frac{d(x^i\zeta)}{dt}\right)_0$ a $T_x\varphi.\xi = (\xi^i)$ (3.9), (3.3), pak bude $T_{\alpha(x)}\psi.\alpha_0^1(\xi) = \left(\frac{d(y^k\alpha\zeta)}{dt}\right)_0 = \frac{\partial f^k}{\partial x^i}\left(\frac{d(x^i\zeta)}{dt}\right)_0 = \frac{\partial f^k}{\partial x^i}\xi^i$, takže opět podle (3.9), (3.10) a (3.15)

$$\alpha_0^1(\xi) = \frac{\partial f^k}{\partial x^i}\xi^i \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{\alpha(x)}. \tag{4.2}$$

Pro vektor $\left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\right)_x$ indukované báze tak dostáváme

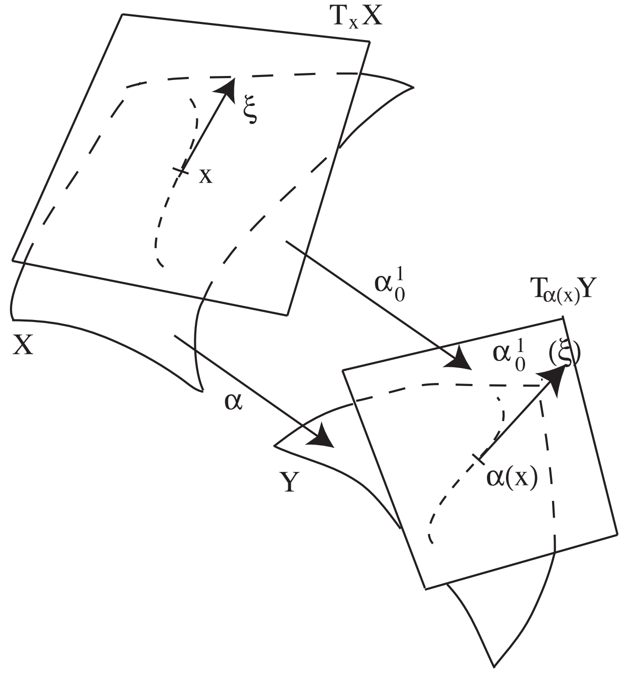
$$\alpha_0^1 \left(\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\right)_x = \frac{\partial f^k}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_{\alpha(x)}. \tag{4.3}$$

Ze vztahu (4.2) je vidět, že $\alpha_0^1 : T\mathcal{X} \to T\mathcal{Y}$ je difeomorfismus: Má inverzní zobrazení, konstruované stejným způsobem záměnou α za α^{-1} a je diferencovatelné, jelikož jeho souřadnicová reprezentace (porov. s (3.20)) je tvořena diferencovatelnými funkcemi proměnných x^i, ξ^i (kapitola 1.4). Dále pro libovolné $x \in \mathcal{X}$, $\xi, \lambda \in T_x\mathcal{X}$ a $a, b \in \mathcal{R}$ platí

$$\alpha_0^1(a\xi + b\lambda) = a\alpha_0^1(\xi) + b\alpha_0^1(\lambda), \tag{4.4}$$

takže zobrazení α_0^1, převádějící vektorové prostory $T_x\mathcal{X}$ na vektorové prostory $T_{\alpha(x)}\mathcal{Y}$, je na každé „vrstvě“ lineární. Budeme ho nazývat difeomorfismem tečných rozvrstvení, *indukovaným difeomorfismem tenzorových rozvrstvení typu* $(1, 0)$.

Popsaná situace je znázorněna na obr. 14.



Obr. 14. Indukovaný difeomorfismus tečných rozvrstvení.

Přejdeme k lineárním formám. Zvolme libovolně $\omega \in T_x^*\mathcal{X}$. Pro každé $\lambda \in T_y\mathcal{Y}$, kde $y = \alpha(x)$, je definován výraz $\omega((\alpha^{-1})_0^1(\lambda))$ a vzhledem k (4.4) vzniká lineární forma na $T_y\mathcal{Y}$, $\lambda \to \omega((\alpha^{-1})_0^1(\lambda))$. Tuto lineární formu označujeme symbolem $\alpha_1^0(\omega)$. Vznikající zobrazení $\alpha_1^0 : T^*\mathcal{X} \to T^*\mathcal{Y}$ určíme v indukovaných bazích. Položíme–li $\omega = \omega_i(dx^i)_x$, $\lambda = \lambda^k \left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)_y$, pak (4.2) dává vyjádření $(\alpha^{-1})_0^1(\lambda) = \frac{\partial g^k}{\partial y^l}\lambda^l \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x$, takže z linearity zobrazení ω vyplývá $\alpha_1^0(\omega)(\lambda) = \frac{\partial g^k}{\partial y^l}\lambda^l \omega\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x\right) = \frac{\partial g^k}{\partial y^l}\omega^k (dy^l)_{\alpha(x)}(\lambda)$. Dostáváme tedy

$$\alpha_1^0(\omega) = \frac{\partial g^k}{\partial y^l}.\omega^k.(dy^l)_{\alpha(x)}. \tag{4.5}$$

Pro lineární formu $(dx^j)_x$ indukované báze to dává

$$\alpha_1^0\left((dx^j)_x\right) = \frac{\partial g^k}{\partial y^l}.(dy^l)_{\alpha(x)}. \tag{4.6}$$

Zobrazení $\alpha_1^0 : T^*\mathcal{X} \to T^*\mathcal{Y}$ je difeomorfismem kotečných rozvrstvení, převádějícím lineárně „vrstvy“ nad body $x \in \mathcal{X}$, $T_x^*\mathcal{X}$, na „vrstvy“ nad body $y = \alpha(x)$, $T_y^*\mathcal{Y}$. Pro každé $x \in \mathcal{X}$, $\omega, \rho \in T_x^*\mathcal{X}$ a $a, b, \in \mathcal{R}$ platí

$$\alpha_1^0(a.\omega + b.\rho) = a.\alpha_1^0(\omega) + b.\alpha_1^0(\rho). \tag{4.7}$$

Difeomorfismus α_1^0 budeme nazývat *indukovaným difeomorfsmem tenzorových rozvrstvení typu* $(0,1)$.

Nyní již můžeme přejít bez podrobnějšího komentáře k případu obecných tenzorových rozvrstvení typu (r,s), kde $(r,s) \neq (0,0)$. Nechť $u \in (\bigotimes^r T_x\mathcal{X}) \otimes (\bigotimes^s T_x^*\mathcal{X})$. Vůči indukované bázi

$$u = u^{i_1,\ldots,i^r}_{j_1,\ldots,j_s} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_x \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_x \otimes (dx^{j_1})_x \otimes \ldots \otimes (dx^{j_s})_x. \qquad (4.8)$$

Klademe

$$\alpha_s^r(u) = u^{i_1,\ldots,i^r}_{j_1,\ldots,j_s} \alpha_0^1 \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_x\right) \otimes \ldots \otimes \alpha_0^1 \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_x\right) \otimes \alpha_1^0 \left((dx^{j_1})_x\right) \otimes \ldots \otimes \alpha_0^1 \left((dx^{j_s})_x\right), \qquad (4.9)$$

odkud s pomocí (4.3) a (4.6) dostaneme vyjádření

$$\alpha_s^r(u) = \frac{\partial f^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial f^{k_r}}{\partial x^{i_r}} . \frac{\partial g^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \ldots \frac{\partial g^{j_s}}{\partial y^{l_s}} u^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \left(\frac{\partial}{\partial y^{k_1}}\right)_y \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial y^{k_r}}\right)_y \otimes (dy^{l_1})_y \otimes \ldots \otimes (dy^{l_s})_y. \qquad (4.10)$$

Vztahem (4.10) je dán *indukovaný difeomorfismus tenzorových rozvrstvení typu* (r,s) $\alpha_s^r : (\bigotimes^r T\mathcal{X}) \otimes (\bigotimes^s T^*\mathcal{X}) \to (\bigotimes^r T\mathcal{Y}) \otimes (\bigotimes^s T^*\mathcal{Y})$. Pro tenzorové rozvrstvení typu $(1,0)$ resp. $(0,1)$ se tento difeomorfismus redukuje na (4.2) resp. (4.5). Pro každé $x \in \mathcal{X}$, $u, v \in (\bigotimes^r T\mathcal{X}) \otimes (\bigotimes^s T^*\mathcal{X})$ a $a, b \in \mathcal{R}$ platí

$$\alpha_s^r(a.u + b.v) = a.\alpha_s^r(u) + b.\alpha_s^r(v), \qquad (4.11)$$

takže tento difeomorfismus je lineární na „vrstvách“.

Indukované difeomorfismy tenzorových rozvrstvení možno použít na zobrazování tenzorových polí. Předpokládejme, že na varietě $\mathcal{Y}$ je dáno libovolné tenzorové pole w typu (r,s), vyjádřené na souřadnicovém okolí V ve tvaru

$$w = w^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dy^{j_1} \otimes \ldots \otimes dy^{j_s}. \qquad (4.12)$$

Tomuto tenzorovému poli lze přiřadit tenzorové pole na $\mathcal{X}$ vztahem

$$(\alpha^* w)(x) = (\alpha^{-1})_s^r(w(\alpha(x))). \qquad (4.13)$$

Souřadnicová reprezentace tenzorového pole $\alpha^* w$ na $\mathcal{U}$ je podle (4.10) dána vztahem

$$\alpha^* w = \frac{\partial g^{k_1}}{\partial y^{i_1}} \ldots \frac{\partial g^{k_r}}{\partial y^{i_r}} \frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \ldots \frac{\partial f^{j_s}}{\partial x^{l_s}} (w^{i_1,\ldots,i^r}_{j_1,\ldots,j_s} \circ \alpha) \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_r}} \otimes dx^{l_1} \otimes \ldots \otimes dx^{l_s}. \qquad (4.14)$$

Zde jsou koeficienty u souřadnicových tenzorových polí chápány jako funkce proměnných $(x^1, \ldots, x^n) \in \varphi(\mathcal{U})$ nebo jako funkce bodu $x \in \mathcal{U}$, což znamená, že derivace $\frac{\partial g^k}{\partial y^i}$ jsou uvažovány v bodech $(y^1, \ldots, y^n) = \psi(\alpha(x))$. Z definice α_s^r (4.10) ihned plyne, že pro každé $x \in \mathcal{X}$ $(\alpha^* w)(x)$ je tenzorem v bodě x a z vyjádření (4.14) je vidět, že koeficienty u souřadnicových tenzorových polí představují diferencovatelné funkce. Vidíme tedy, že každý difeomorfismus $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ generuje kromě difeomorfismů tenzorových rozvrstvení ještě zobrazení α^* tenzorových polí, které jsme zavedli tak, že má směr opačný než α : převádí tenzorová pole definovaná na $\mathcal{Y}$, do tenzorových polí na $\mathcal{X}$. Všimněme si ještě, že pro označování tohoto zobrazení jsme zavedli jediný symbol, α^*, bez ohledu na to, o jaký typ tenzorových polí se jedná.

Poznámky a úlohy

1. Zobrazení α^* (4.14) je lineární.

2. Jak vypadá difeomorfismus tečného rozvrstvení eukleidovského prostoru $\mathcal{R}^n$ na sebe, indukovaný identickým zobrazením variety $\mathcal{R}^n$? Jaký je indukovaný difeomorfismus kotečného rozvrstvení?

3. Prověřte podrobně, že zobrazení (4.2) je diferencovatelné.

4.2 Vektorová pole a jednoparametrické grupy

Systém $\alpha_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ difeomorfismů variety $\mathcal{X}$, ve kterém t je reálný parametr, budeme nazývat *jednoparametrickou grupou transformací* variety $\mathcal{X}$, když zobrazení $\mathcal{R} \times \mathcal{X} \ni (t,x) \to \alpha(t,x) = \alpha_t(x) \in \mathcal{X}$ je diferencovatelné, α_0 je identické zobrazení $\mathcal{X}$ na sebe a pro každé $s,t \in \mathcal{R}$ platí $\alpha_{s+t} = \alpha_s \circ \alpha_t$.

Každá jednoparametrická grupa α_t *generuje* vektorové pole na $\mathcal{X}$ vztahem $\xi(x) = \{(x, \alpha_t)\}$ (porov. s kapitolou 3.1) Je–li $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ libovolný lokální souřadnicový systém na $\mathcal{X}$, pak z (3.9), (3.10), (3.14) a (3.23) dostáváme pro toto vektorové pole vyjádření

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \xi^i = \left(\frac{d(x^i \alpha_t)}{dt} \right)_0, \tag{4.15}$$

které lépe vyhovuje pro praktické počítání. Mj. z něho vyplývá, že ξ je diferencovatelné zobrazení. Skutečně, souřadnicová reprezentace $T\varphi \circ \xi \circ \varphi^{-1}$ představuje zobrazení $\varphi(\mathcal{U}) \ni (x^1, \ldots, x^n) \to (x^1, \ldots, x^n; (\xi^i)) \in \varphi(\mathcal{U}) \times \mathcal{R}^n$, které je vzhledem k diferencovatelnosti složek ξ^i diferencovatelné.

K dané varietě $\mathcal{X}$ a vektorovému poli ξ na $\mathcal{X}$ obecně neexistuje jednoparametrická grupa transformací, generující ξ. Platí ovšem slabší tvrzení, které nyní zformulujeme.

Pojem *křivky* na varietě $\mathcal{X}$ lze zavést jako diferencovatelné zobrazení otevřeného intervalu $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ do $\mathcal{X}$ (porov. s ekvivalentní definicí v kapitole 3.1). Máme–li takovou křivku $\mathcal{I} \ni t \to \zeta(t) \in \mathcal{X}$, pak diferencovatelné zobrazení $\mathcal{I} \ni t \to \xi(t) \in T\mathcal{X}$ takové, že $\xi(t)$ je pro každé t večným vektorem k $\mathcal{X}$ v bodě $\zeta(t)$, nazveme *vektorovým polem podél křivky* ζ. Důležitým příkladem vektorového pole podél křivky ζ je *pole tečných vektorů* $t \to \dot{\zeta}(t)$ *křivky* ζ. Zavádíme je vztahem

$$\dot{\zeta}(t) = \{(\zeta(t), \zeta_t)\}, \tag{4.16}$$

ve kterém $\zeta(t)$ je křivka $s \to \zeta_t(s) = \zeta(t+s)$, označovaná v symbolice kapitoly 3.1 také $(\zeta(t), \zeta_t)$. Vyjádříme–li pole tečných vektorů pomocí souřadnicových vektorových polí $\frac{\partial}{\partial x^i}$, dostaneme

$$\dot{\zeta}(t) = \left(\frac{d(x^i\zeta_t)}{ds}\right)_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(t)} = \frac{d(x^i\zeta)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(t)}, \tag{4.17}$$

odkud je vidět, že jeho složky jsou diferencovatelné, a tedy že $\dot{\zeta}$ je diferencovatelné.

Teorém o lokální jednoparametrické grupě. Nechť ξ je vektorové pole na $\mathcal{X}$. Pro libovolné $x_0 \in \mathcal{X}$ exituje okolí $\mathcal{U}$ bodu x_0, číslo $\epsilon > 0$, jednoznačně určený systém difeomorfismů $\mathcal{U} \ni x \to \alpha_t(x) \in \alpha_t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{X}$, $t \in \mathcal{I} = (-\epsilon, \epsilon)$, takový, že

1. Zobrazení $\mathcal{I} \times \mathcal{U} \ni (t,x) \to \alpha(t,x) = \alpha_t(x) \in \mathcal{X}$ je diferencovatelné.
2. α_0 je identické zobrazení množiny $\mathcal{U}$ na sebe.
3. Pro každé s, t takové, že $s, t, s+t \in \mathcal{I}$ a $x \in \mathcal{U}$, $\alpha_t(x) \in \mathcal{U}$ platí
$$\alpha_{s+t}(x) = \alpha_s(\alpha_t(x)). \tag{4.18}$$
4. Pro každé $x \in \mathcal{U}$ a $t \in \mathcal{I}$ platí
$$\dot{\alpha}_t(x) = \xi(\alpha(x)). \tag{4.19}$$

Ve smyslu této věty říkáme, že α_t je *lokální jednoparametrickou grupou transformací* variety $\mathcal{X}$, *generovanou* vektorovým pole ξ, nebo ekvivalentně, že ξ je *generátorem* lokální jednoparametrické grupy α_t. O α_t říkáme, že *generuje* vektorové pole ξ. Křivky $t \to \alpha_t(x)$, $x \in \mathcal{X}$, nazýváme *liniemi proudu*, nebo také *integrálními křivkami* vektorového pole ξ (porov. s obr. 12). Všimněme si, že podle (4.19) pole tečných vektorů k liniím proudu splývá s daným vektorovým polem ξ. Vztah (4.19) představuje tedy podmínku, ze které se určuje lokální jednoparametrická grupa vektorového pole ξ. V lokálních souřadnicích $x^1, \ldots, x^n$ se dá přepsat ve tvaru

$$\frac{d(x^i\alpha_t)}{dt} = \xi^i(x^1\alpha_t, \ldots, x^n\alpha_t), \qquad \xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{4.20}$$

nebo ve zjednodušené podobě

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x^1, \ldots, x^n). \tag{4.21}$$

Řešením systému rovnic (4.21) dostaneme funkce $x^i(t, x_0^1, \ldots, x_0^n)$, závislé na n konstantách x_0^i ($n = dim\mathcal{X}$), tedy na bodu prostoru $\mathcal{R}^n$. Vzniká zobrazení $(t, x_0^1, \ldots, x_0^n) \to \tilde{\alpha}(t, x_0^1, \ldots, x_0^n) = (x^i(t, x_0^1, \ldots, x_0^n))$, které zpětným přenesením na varietu $\mathcal{X}$ hledanou lokální jednoparametrickou grupu definuje.

Pro podrobnější komentář ev. důkaz věty o lokální jednoparametrické grupě se může čtenář obrátit k literatuře [1].

Poznámky a úlohy

4. Jednoparametrická *grupa rotací roviny* $\mathcal{R}^2$ je tvořena maticemi

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, \infty). \tag{4.22}$$

Element α_t této grupy převádí bod $x \in \mathcal{R}^2$ do bodu $\alpha_t(x) \in \mathcal{R}^2$, přičemž ve standardních souřadnicích x^1, x^2 roviny $\mathcal{R}^2$ platí $x^1(\alpha_t(x)) = x^1(x)\cos t + x^2(x)\sin t$, $x^2(\alpha_t(x)) = -x^1(x)\sin t + x^2(x)\cos t$. Pro generátor této grupy pak z (4.20) ihned dostaneme v bodě $t = 0$

$$\xi = x^2 . \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 . \frac{\partial}{\partial x^2}. \tag{4.23}$$

5. Prodiskutujme na základě rovnic (4.21) rekonstrukci grupy α_t (4.22) z vektorového pole (4.23). Docházíme k rovnicím $\frac{dx^1}{dt} = x^2$, $\frac{dx^2}{dt} = -x^1$. Zderivujeme–li je podle t, snodno dojdeme k řešení $x^1 = x_0^1 \cos t + x_0^2 \sin t$, $x^2 = -x_0^1 \sin t + x_0^2 \cos t$, popisujícímu transformaci (4.22) bodu $(x_0^1, x_0^2) \in \mathcal{R}^2$ do bodu $(x^1, x^2) \in \mathcal{R}^2$.

6. *Grupa translací roviny* $\mathcal{R}^2$ je tvořena operátory $T_{(a^1,a^2)}$ danými ve standardních souřadnicích x^1, x^2 vztahem $T_{(a^1,a^2)}(x^1, x^2) = (x^1 + a^1, x^2 + a^2)$. Určete generátor jednoparametrické grupy $T_{(a,0)}$.

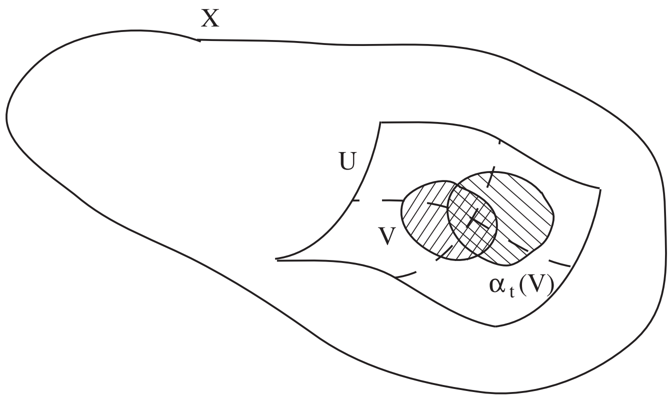
7. Pro vektorové pole (4.23) dostaneme v polárních souřadnicích v rovině s vyjmutým počátkem (kapitola 1, pozn. 10) vyjádření $\xi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ z kterého přímo vyplývá, že linie proudu vektorového pole ξ, tedy řešení systému (4.21), jsou kružnice se středem v počátku.

4.3 Lieovy derivace

Máme již vše připraveno pro to, abychom mohli sledovat myšlenky úvodu k této kapitole, a přejít ke studiu tenzorových polí ve směru zadaného vektorového pole, tedy ve směru proudu tohoto vektorového pole.

Uvažujme n–rozměrnou varietu $\mathcal{X}$, libovolné vektorové pole ξ na $\mathcal{X}$ a lokální jednoparametrickou grupu α_t generovanou tímto vektorovým polem. Zvolme lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi), \varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ a otevřenou množinu $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tak, že $\alpha_t(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$ pro všechna dostatečně malá t, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ (viz obr. 15).

[1] Sternberg, 102



Obr. 15. Lokální jednoparametrická grupa v souřadnicovém okolí.

Pak lze všechny difeomorfismy α_t s $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ reprezentovat ve tvaru $\varphi \circ \alpha_t \circ \varphi^{-1}$, tedy s pomocí jediných lokálních souřadnic. Předpokládejme, že tyto difeomorfismy jsou dány funkcemi f_t^k, tj. systémem vztahů $x^k(\alpha_t(x)) = f_t^k(x^1(x), \ldots, x^n(x)), x \in \mathcal{V}$, nebo ve zjednodušeném zápisu

$$x^k \circ \alpha_t = f_t^k(x^1, \ldots, x^n). \tag{4.24}$$

Jelikož α_0 je identické zobrazení, funkce f_0^k splňují identitu

$$x^k = f_0^k(x^1, \ldots, x^n). \tag{4.25}$$

Zápis (4.25) se od podobného vyjádření (4.1) liší tím, že obsahuje ještě parametr t; z relace $(\alpha_t)^{-1} = \alpha_{-t}$, plynoucí z teorému o lokální jednoparametrické grupě, je pak zřejmé, že postihuje s každým α_t i inverzní zobrazení α_{-t}.

Nechť nyní u je libovolné tenzorové pole typu (r, s) na $\mathcal{X}$, vyjádřené na $\mathcal{U}$ vztahem

$$u = u^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}. \tag{4.26}$$

Zaměníme–li v našich úvahách z konce kapitoly 4.1 varietu $\mathcal{X}$ za $\mathcal{V}$ a $\mathcal{Y}$ za $\alpha_t(\mathcal{V})$, můžeme pro každé $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ zkonstruovat tenzorové pole $\alpha_t^* u$ na $\mathcal{V}$. Explicitní vyjádření pro toto tenzorové pole dostaneme z výrazu (4.14) ve tvaru

$$\alpha_t^* u = \frac{\partial f_{-t}^{k_1}}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{-t}^{k_r}}{\partial y^{i_r}} \frac{\partial f_t^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial f_t^{j_s}}{\partial x^{l_s}} (u^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_s} \circ \alpha_t) \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_r}} \otimes dx^{l_1} \otimes \ldots \otimes dx^{l_s}. \tag{4.27}$$

Pro každé $x \in \mathcal{V}$ tak dostáváme v prostoru $(\bigotimes^r T_x\mathcal{X}) \otimes (\bigotimes^s T_x^*\mathcal{X})$ systém tenzorů parametrizovaný reálným parametrem t. Vzniká tedy funkce reálné proměnné s hodnotami v konečněrozměrném vektorovém prostoru, závislá diferencovatelně na t. Takové funkce $t \to (\alpha_t^* u)(x)$ jsou pro každé x diferencovatelné v bodě $t = 0$, má smyst výraz $\left(\frac{d(\alpha_t^* u)(x)}{dt}\right)_0$, který je opět tenzorem typu (r, s) v bodě x. Navíc závislost tohoto tenzoru na x (resp. na souřadnicích $x^1, \ldots, x^n$

bodu x) je také diferencovatelná; přiřazení $x \to \left(\frac{d(\alpha_t^* u)(x)}{dt}\right)_0$ definuje tenzorové pole typu (r,s) na $\mathcal{X}$. Klademe

$$\partial_\xi u = \left(\frac{d}{dt}\alpha_t^* u\right)_0 \tag{4.28}$$

a nazýváme tenzorové pole $\partial_\xi u$ *Lieovou derivací* tenzorového pole u *podle vektorového pole* ξ.

Bylo by ještě třeba ukázat, že tenzor $\left(\frac{d}{dt}\alpha_t^* u\right)_0$ nezávisí na volbě lokálních souřadnic $x^1, \dots, x^n$, s pomocí kterých byl zkonstruován. Přenecháváme čtenáři doplnit tuto mezeru v našich úvahách.

Všimněme si, že naše definice Lieovy derivace se netýká funkcí, tj. tenzorových polí typu $(0,0)$. Pro libovolnou funkci $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ položíme pro každé $x \in \mathcal{V}$

$$(\alpha_t^* f)(x) = (f \circ \alpha_t)(x) \tag{4.29}$$

a funkci

$$\partial_\xi f = \left(\frac{d}{dt}\alpha_t^* f\right)_0 \tag{4.30}$$

nazveme *Lieovou derivací* funkce f *podle vektorového pole* ξ.

Z hlediska aplikací je důležité znát souřadnicovou reprezentaci Lieových derivací tenzorových polí. Příslušné formule se snadno odvodí ze vztahů (4.28) a (4.27). Podle věty o záměně parciálních derivací (zde označovaných $\frac{\partial}{\partial x^i}$ a $\frac{d}{dt}$) platí $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_t^j}{\partial x^l}\right)\right)_0 = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{df_t^j}{dt}\right)_0$; dále $\left(\frac{df_t^j}{dt}\right)_0 = \xi^j$ (4.24) a (4.15), takže

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_t^j}{\partial x^l}\right)_0 = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l}, \qquad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_{-t}^j}{\partial x^l}\right)_0 = -\frac{\partial \xi^j}{\partial x^l}. \tag{4.31}$$

Kromě těchto vztahů z (4.25) plyne

$$\frac{\partial f_0^k}{\partial x^i} = \delta_i^k, \tag{4.32}$$

takže pro derivování složek tenzorového pole $\alpha_t^* u$ (4.27) podle t stačí již použít pravidlo pro derivaci součinu funkcí.

Uvedeme některé konkrétní vzorce v lokálních souřadnicích $x^1, \dots, x^n$. Pro funkci f platí z definice

$$\partial_\xi f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\xi^i, \tag{4.33}$$

takže *Lieova derivace funkce*, uvažovaná v bodě x, je totožná s derivací této funkce ve směru vektoru $\xi(x) \in T_x\mathcal{X}$ (viz (3.12)). Proto také zavádíme označení s „diferenciálním operátorem“ ξ

$$\xi(f) = \partial_\xi f. \tag{4.34}$$

Pro vektorové pole $\lambda = \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ dostáváme z (4.27), (4.31) a (4.32)

$$\partial_\xi \lambda = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f^k_{-t}}{\partial x^l} (\lambda^i \circ \alpha_t) \right) \right)_0 \frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i} \xi^i - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \lambda^i \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{4.35}$$

Označujeme také

$$[\xi, \lambda] = \partial_\xi \lambda \tag{4.36}$$

a nazýváme toto vektorové pole $[\xi, \lambda]$ *Lieovou závorkou* vektorových polí ξ a λ. Pro pole lineárních forem $\omega = \omega_i dx^i$ dostáváme obdobně vyjádření

$$\partial_\xi \omega = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f^j_t}{\partial x^l} (\omega_j \circ \alpha_t) \right) \right)_0 dx^l = \left(\frac{\partial \omega_l}{\partial x^i} \xi^i + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \omega_j \right) dx^l \tag{4.37}$$

a pro tenzorové pole u typu $(1,1)$

$$\partial_\xi u = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f^k_{-t}}{\partial x^i} \frac{\partial f^j_t}{\partial x^l} . (u^i_j \circ \alpha_t) \right) \right)_0 \frac{\partial}{\partial x^n} \otimes dx^l = \left(\frac{\partial u^k_l}{\partial x^m} \xi^m - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} u^i_l + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} u^k_j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^l. \tag{4.38}$$

Podobně se postupuje při určování souřadnicových reprezentací Lieových derivací ve všech dalších případech.

Poznámky a úlohy

7. Uvedeme konvenci, podle které se někdy zapisuje operace *Lieovy derivace „po složkách“*. Podle této konvence přepisujeme vztahy (4.35), (4.37), (4.38) (po řadě) ve tvaru

$$\partial_\xi \lambda^k = \frac{\partial \lambda^k}{\partial x^i} \xi^i - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \lambda^i \partial_\xi \omega_l = \frac{\partial \omega_l}{\partial x^i} \xi^i + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \omega_j \partial_\xi u^k_l = \frac{\partial u^k_l}{\partial x^m} \xi^m - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} u^i_l + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} u^k_j. \tag{4.39}$$

Uvedené výrazy je ovšem třeba chápat symbolicky proto, že na levé straně obsahují určitou pevně zvolenou složku tenzorového pole, zatímco Lieova derivace je vytvářena pomocí všech složek derivovaného tenzorového pole; to je vidět na pravých stranách výrazů (4.39). Není tedy správné vzít si z tohoto zápisu dojem, že se Lieovy derivace počítají „po složkách“. Kromě toho je třeba stále mít na mysli, že všechny složky tenzorových polí v (4.39) jsou chápány vůči souřadnicovým tenzorovým polím, indukovaným *stejnými* lokálními souřadnicemi základní variety (viz kapitola 3.5).

8. Lieova derivace tenzorového pole $u = \left(u^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \right)$ typu (r,s) podle vektorového pole $\xi = (xi^i)$ je dána — při respektování výše popsané konvence — vztahem

$$\partial_\xi u^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} = \frac{\partial u^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s}}{\partial x^l} \xi^l - \frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial x^l} u^{l,i_2,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} - \ldots + \frac{\partial \xi^l}{\partial x^{j_1}} u^{i_1,\dots,i_r}_{l,j_2,\dots,j_s} + \ldots \tag{4.40}$$

(porov. s kapitolou 2, pozn. 6)

9. Pro libovolná vektorová pole ξ, λ, η na varietě $\mathcal{X}$ a pro libovolná reálná čísla $a, b \in \mathcal{R}$ platí vztahy

$$\begin{aligned} &[a\xi + b\lambda, \eta] = a \cdot [\xi, \eta] + b \cdot [\lambda, \eta] \\ &[\xi, a\lambda + b\eta] = a \cdot [\xi, \lambda] + b \cdot [\xi, \eta] \\ &[\xi, \lambda] = -[\lambda, \xi] \\ &[\xi, [\lambda, \eta]] + [\eta, [\xi, \lambda]] + [\lambda, [\eta, \xi]] = 0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.4 Invariance

Nejdůležitější otázky, které budeme s pomocí Lieových derivací sledovat, budou otázky chování tenzorových polí ve směrech, vytčených v jednotlivých bodech základní variety daným vektorovým polem. Zejména nás budou zajímat podmínky, při kterých se tenzorové pole v daných směrech nemění.

Nechť u je libovolné tenzorové pole na varietě $\mathcal{X}$. Říkáme, že toto tenzorové pole je *invariantní* vůči jednoparametrické grupě α_t transformací variety $\mathcal{X}$, nebo že se nemění ve směru α_t, když pro každé $t \in (-\infty, \infty)$ platí

$$\alpha_t^* u = u \tag{4.42}$$

Pro odvození jednoduché charakteristiky tenzorových polí, invariantních vůči dané jednoparametrické grupě α_t, provedeme některé výpočty rutinního charakteru. Při těchto výpočtech bude poněkud subtilnější záležitostí sledování bodů, ve kterých se četné parciální derivace, obsažené ve formulích, uvažují. Budeme proto velmi pedanticky vyznačovat všechna zobrazení potřebná k tomu, aby nemohlo dojít k nedorozumění. Používané označování sleduje symboliku předcházejících odstavců.

Funkce f^j_{t+z} zesouřadnicového vyjádření zobrazení α_{t+z} jsou svázány s funkcemi f_t^j, f_z^j vztahem

$$\alpha_{t+z} = \alpha_t \circ \alpha_z \tag{4.43}$$

(kapitola 4.2). Docházíme tedy k rovnostem $x^j \circ \alpha_{t+z} = f^j_{t+z}(x^1, \ldots, x^n) = x^j \circ \alpha_t \circ \alpha_z = (f_t^j \circ \alpha_z)(x^1, \ldots, x^n) = f_t^j(f_z^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f_z^n(x^1, \ldots, x^n))$, ze kterých na základě věty o derivaci složené funkce plyne

$$\left(\frac{\partial f^j_{t+z}}{\partial x^l}\right)_x = \left(\frac{\partial f_t^j}{\partial x^m}\right)_{\alpha_z(x)} \cdot \left(\frac{\partial (x^m \alpha_z)}{\partial x^l}\right)_x = \left(\frac{\partial f_t^j}{\partial x^m}\right)_{\alpha_z(x)} \cdot \left(\frac{\partial f_z^j}{\partial x^l}\right)_x . \tag{4.44}$$

Indexy u těchto výrazů označují bod, ve kterém je uvažujeme. Přesněji bychom ovšem měli psát $\varphi(x)$ místo x a $\varphi(\alpha_z(x))$ místo $\alpha_z(x)$. Vztah (4.44) přepisujeme zjednodušeně takto:

$$\frac{\partial f^j_{t+z}}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial f_t^j}{\partial x^m} \circ \alpha_z\right) \frac{\partial f_z^m}{\partial x^l}. \tag{4.45}$$

Budeme ho potřebovat ještě v jiné verzi

$$\frac{\partial f^j_{-t-z}}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial f^j_{-z}}{\partial x^m} \circ \alpha_z\right) \cdot \left(\frac{\partial f^m_{-t}}{\partial x^l} \circ \alpha_t \circ \alpha_z\right), \tag{4.46}$$

kterou obdržíme, když v (4.44) zaměníme t za $-t$ a z za $-z$ a získané derivace budeme uvažovat v bodě $\alpha_z(\alpha_t(x))$.

Nyní předpokládejme, že je dáno tenzorové pole u typu (r, s) na $\mathcal{X}$ a že na souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$ je toto tenzorové pole vyjádřeno vztahem (4.26). Napíšeme tenzorové pole $\alpha_t^* u$ (4.27) ve tvaru

$$\alpha_t^* u = v^{k_1, \ldots, k_r}_{l_1, \ldots, l_s} \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \ldots \otimes dx^{l_1} \otimes \ldots, \tag{4.47}$$

kde

$$v^{k_1,\dots,k_r}_{l_1,\dots,l_s} = \left(\frac{\partial f^{k_1}_{-t}}{\partial x^{i_1}} \circ \alpha_t\right) \dots \frac{\partial f^{j_1}_{t}}{\partial x^{l_1}} \dots \left(u^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \circ \alpha_t\right) \tag{4.48}$$

(porov. s diskusí, následující po (4.14)). Pak bude na základě (4.27), (4.46) a (4.45)

$$\begin{aligned} \alpha^*_z(\alpha^*_t u) &= \left(\tfrac{\partial f^{p_1}_{-z}}{\partial x^{k_1}} \circ \alpha_t\right) \dots \tfrac{\partial f^{l_1}_{z}}{\partial x^{q_1}} \dots \left(v^{k_1,\dots,k_r}_{j_1,\dots,j_s} \circ \alpha_z\right) \tfrac{\partial}{\partial x^{p_1}} \otimes \dots \otimes dx^{q_1} \otimes \dots \\ &= \left(\tfrac{\partial f^{p_1}_{-z}}{\partial x^{k_1}} \circ \alpha_t\right) \cdot \left(\tfrac{\partial f^{p_1}_{-t}}{\partial x^{i_1}} \circ \alpha_t \alpha_z\right) \dots \tfrac{\partial f^{l^z_1}}{\partial x^{q_1}} \cdot \left(\tfrac{\partial f^{j_1}_{t}}{\partial x^{l_1}} \circ \alpha_z\right) \left(u^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \circ \alpha_t \circ \alpha_z\right) \tfrac{\partial}{\partial x^{p_1}} \otimes \dots \otimes dx^{q_1} \otimes \dots \\ &= \left(\tfrac{\partial f^{p_1}_{-t-z}}{\partial x^{i_1}} \circ \alpha_t \alpha_z\right) \dots \tfrac{\partial f^{l_1}_{t+z}}{\partial x^{q_1}} \dots \left(u^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \circ \alpha_t \circ \alpha_z\right) \tfrac{\partial}{\partial x^{p_1}} \otimes \dots \otimes dx^{q_1} \otimes \dots, \end{aligned} \tag{4.49}$$

takže přímým srovnáním vztahů (4.49), (4.43), (4.27) docházíme k identitě

$$\alpha^*_{t+z} u = \alpha^*_z(\alpha^*_t u). \tag{4.50}$$

Nyní již můžeme vyšetřovat podmínku (4.42) pro invarianci tenzorového pole u vůči jednoparametrické grupě α_t. Označme symbolem ξ generátor grupy α_t. Derivováním vztahu (4.42) podle t dostáváme

$$\partial_\xi u = 0. \tag{4.51}$$

Obráceně předpokládejme, že platí (4.51) pro generátor ξ jednoparametrické grupy α_t. Pak ze vztahu (4.51) a z linearity zobrazení α^*_z (viz pozn. 1) přímo plyne, že platí

$$\frac{d}{dz}\alpha^*_z u = \left(\frac{d}{dt}\alpha^*_{t+z} u\right)_0 = \partial_\xi \alpha^*_z u = \alpha^*_z \partial_\xi u \tag{4.52}$$

a tedy pro každé $z \in \mathcal{R}$, $\frac{d}{dz}(\alpha^*_z u) = 0$, $\alpha^*_z u = const = u$. Vidíme, že vztah (4.51) představuje nutnou a postačující podmínku proto, aby tenzorové pole u bylo invariantní vůči jednoparametrické grupě transformací α_t.

Poznámky a úlohy

10. Uvažujme na varietě $\mathcal{X}$ pole g symetrických kovariantních tenzorů druhého řádu (porov. s kapitolou 3, pozn. 8) a jednoparametrickou grupu α_t s generátorem ξ. Pro libovolný lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ napišme $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, $g_{ij} = g_{ji}$. Podobně jako v kapitole 4.3 pak snadno odvodíme formuli

$$\partial_\xi g = \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} g_{il} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} g_{ik}\right) dx^k \otimes dx^l \tag{4.53}$$

pro Lieovu derivaci tenzorového pole g podle ξ. Vidíme, že tenzorové pole g je invariantní vůči jednoparametrické grupě transformací α_t tehdy a jen tehdy, když na $\mathcal{U}$ platí tzv. *Killingovy rovnice*

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} g_{il} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} g_{ik} = 0. \tag{4.54}$$

Kapitola 5

Lineární konexe

Tečné vektory k eukleidovskému prostoru $\mathcal{R}^n$ v jeho různých bodech x, y považujeme za *rovnoběžné (paralelní)*, mají–li úměrné složky vůči bázím, indukovaným v tečných prostorech $T_x\mathcal{R}^n$, $T_y\mathcal{R}^n$ přirozeným globálním souřadnicovým systémem na $\mathcal{R}^n$. V případě obecné variety $\mathcal{X}$, na které nemusí existovat „přirozený“ globální souřadnicový systém, není ovšem jasné, které tečné vektory můžeme považovat za rovnoběžné. Vzniká složitá úloha na zobecnění „jednoduchého“ geometrického pojmu paralelnosti, kterou se v hlavních částech této kapitoly budeme zabývat.

K této úloze budeme přistupovat tak, že nalezneme pravidlo pro paralelní přenášení vektorů z daného tečného prostoru $T_x\mathcal{X}$ do libovolného jiného tečného prostoru $T_y\mathcal{X}$ podél křivek, spojujících body x, y variety $\mathcal{X}$. Vektor, přenesený z $T_x\mathcal{X}$ do $T_y\mathcal{X}$ a zpět podél té samé křivky, musí přitom přejít sám v sebe, postupné přenesení z $T_x\mathcal{X}$ do $T_y\mathcal{X}$ a pak z $T_y\mathcal{X}$ do $T_z\mathcal{X}$ musí vést ke stejnému výsledku, jako přímé přenesení z $T_x\mathcal{X}$ do $T_z\mathcal{X}$ podél „složené“ křivky. Výsledek paralelního přenosu vektorů nemůže záviset na „rychlosti“ přenášení, tedy na parametrizaci křivek.

Formálně jednoduchý postup pro zavedení paralelního přenosu vzniká za situace, kdy je na varietě $\mathcal{X}$ dána operace tzv. kovariantního derivování, nebo, což je totéž, tzv. lineární konexe. Zhruba lze říci, že lineární konexe přiřazuje každé dvojici ξ, λ vektorových polí na $\mathcal{X}$ nové vektorové pole $\nabla(\xi, \lambda)$, označované také $\nabla_\xi(\lambda)$, kovariantní derivaci vektorového pole λ ve směru ξ. Operace kovariantního derivování vede kromě koncepce paralelního přenosu také k zavedení významné geometrické veličiny, tenzoru křivosti, který se podstatnou měrou uplatňuje při formulování pohybových zákonů v OTR.

5.1 Lineární konexe, tenzor torze, tenzor křivosti

Připomeňme si, že v množině všech vektorových polí na dané varietě $\mathcal{X}$, označované $\mathcal{V}\mathcal{X}$, jsou zavedeny operace sečítání vektorových polí, jejich násobení skalárem (reálným číslem) a také obecněji násobení reálnou funkcí (3.38), (3.39). Dále lze z každé dvojice vektorových polí utvořit nové vektorové pole, jejich Lieovou závorku (4.30). Nakonec důležitou vlastností každého vektorového pole je, že působí na funkce jako diferenciální operátor (4.28). Tyto vlastnosti prostoru $\mathcal{V}\mathcal{X}$ využijeme při formulování následujících definic.

Lineární konexí na $\mathcal{X}$ nazýváme pravidlo ∇, přiřazující každému $\xi \in \mathcal{V}\mathcal{X}$ zobrazení $\nabla_\xi : \mathcal{V}\mathcal{X} \to \mathcal{V}\mathcal{X}$ takové, že pro každé ξ, λ, $\eta \in \mathcal{V}\mathcal{X}$ a libovolné funkce f, g na $\mathcal{X}$ platí

1. $\nabla_\xi(\lambda + \eta) = \nabla_\xi(\lambda) + \nabla_\xi(\eta)$,
2. $\nabla_\xi(f \cdot \lambda) = f \cdot \nabla_\xi(\lambda) + (\xi f) \cdot \lambda$,
3. $\nabla_{f\xi+g\lambda}(\eta) = f \cdot \nabla_\xi(\eta) + g \cdot \nabla_\lambda(\lambda)$.

Operátor ∇_ξ nazveme *operátorem kovariantní derivace* (dané lineární konexe) *ve směru* ξ.

Pro libovolná ξ, λ, $\eta \in \mathcal{V}\mathcal{X}$ dále klademe

$$T(\xi, \lambda) = \nabla_\xi(\lambda) - \nabla_\lambda(\xi) - [\xi, \lambda], \tag{5.1}$$

$$R(\xi, \lambda) \cdot \lambda = \nabla_\xi(\nabla_\eta(\lambda)) - \nabla_\eta(\nabla_\xi(\lambda)) - \nabla_{[\xi,\eta]}(\lambda). \tag{5.2}$$

Vztahem (5.1) je každým dvěma vektorovým polím bilineárně přiřazeno vektorové pole, takže T představuje tenzorové pole typu $(1,2)$ na $\mathcal{X}$ (porov. s kapitolou 2.4); nazýváme ho krátce *tenzorem torze* lineární konexe ∇. Vztahem (5.2) máme stejným způsobem zavedeno tenzorové pole R typu $(1,3)$, nazýváme ho *tenzorem křivosti* lineární konexe ∇. Říkáme, že lineární konexe ∇ je *bez torze*, platí–li

$$T = 0. \tag{5.3}$$

Říkáme, že ∇ je *plochou lineární konexí*, když

$$R = 0. \tag{5.4}$$

Případy (5.3), (5.4) znamenají, že tenzorová pole T, R jsou nulovými řezy příslušných tenzorových rozvrstvení (viz komentář kolem obr. 13).

Je třeba si povšimnout konvence pro zapisování zobrazení ∇ a R, vystihující nerovnoprávnost jejich argumentů.

K formálně dokonalým definicím, které má čtenář před sebou, přesně vystihujícím potřeby geometrie variet, se diferenciální geometrie prodírala po mnohá desetiletí. Definované objekty jsou „pojmově“ v pořádku a navíc zabírají v textu málo místa, nevýhoda však vznikla pro čtenáře tím, že se z nich vytratila názorná představa a že není jasné, k čemu může přemíra zobrazení sloužit. Částečné vyjasnění, alespoň pokud jde o tenzorovou povahu sledovaných objektů, může poskytnout souřadnicový popis.

Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ je lokální souřadnicový systém na $\mathcal{X}$, ∇ lineární konexe. Na souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$ můžeme uvažovat operátory $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$

kovariantních derivací *ve směru souřadnicových vektorových polí*. Pro jednoduchost píšeme

$$\nabla_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}. \tag{5.5}$$

Protože $\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ je podle definice vektorové pole na $\mathcal{U}$, lze najít jednoznačně určené funkce Γ^k_{ij} na $\mathcal{U}$, splňující vztah

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{5.6}$$

Tyto funkce budeme nazývat *složkami lineární konexe* ∇ vůči souřadnicím $x^1, \ldots, x^n$. Podobně lze psát

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = T^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{5.7}$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{kij} \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{5.8}$$

nebo (porov. s kapitolou 2.4)

$$T = T^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \otimes dx^j \tag{5.9}$$

$$R = R^l_{kij} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \tag{5.10}$$

nebo prostě $T = (T^k_{ij})$, $R = (R^l_{ijk})$, není–li třeba zdůrazňovat, o jaké lokální souřadnice se jedná. Vztahy (5.1), (5.2) vedou k relacím

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \tag{5.11}$$

$$R^l_{kij} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik} \tag{5.12}$$

Poznámky a úlohy

1. Konexe ∇ je *bez torze* tehdy a jen tehdy, když platí v libovolných lokálních souřadnicích

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} = 0. \tag{5.13}$$

2. Složky Γ^k_{ij} konexe vůči souřadnicím $y^1, \ldots, y^n$ a složky vůči souřadnicím $x^1, \ldots, x^n$ jsou svázány transformačním vztahem

$$\Gamma'^k_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \Gamma^l_{pq} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \tag{5.14}$$

Prověřte to. Tento transformační vztah představuje důležitý prostředek pro zadávání konexe. Možno totiž ukázat, že zadáním libovolného systému funkcí Γ^k_{ij} na každém souřadnicovém okolí nějakého atlasu na varietě, splňujícího (5.14), zadáváme lineární konexi na $\mathcal{X}$, která má složky Γ^k_{ij}.

3. Prověřte vztahy (5.11), (5.12).

4. *Kanonická lineární konexe* na $\mathcal{R}^n$ je dána vztahem

$$\nabla_\xi(\lambda) = \xi(\lambda^i)\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^j \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{5.15}$$

ve kterém vektorová pole $\xi = \xi^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\lambda = \lambda^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ jsou vyjádřena vůči přirozeným souřadnicím variety $\mathcal{R}^n$ a je použito (4.28). Pro tuto konexi v přirozených souřadnicích evidentně platí $\Gamma^k_{ij} = 0$.

5.2 Paralelní přenos

Nechť $\mathcal{I} \ni t \to \zeta(t) \in \mathcal{X}$ je křivka na $\mathcal{X}$. Volba libovolných dvou bodů $a, b \in \mathcal{I}$ $(a < b)$ určuje *oblouk* $\zeta_{ab}(t) = \zeta(t)$, kde $a \le t \le b$, spojující body $x = \zeta(a)$, $y = \zeta(b)$ variety $\mathcal{X}$. V dalším budeme pracovat s křivkami ζ, které nejsou zobrazeními intervalu na pevný bod a které se samy neprotínají. V libovolném lokálním souřadnicovém systému $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, se to zapisuje formou nerovností

$$\frac{d(x^i\zeta)}{dt} \ne 0, \qquad \zeta(t) \ne \zeta(s) \tag{5.16}$$

platných pro každé $s, t \in \mathcal{I}$.

Předpokládejme, že na n–rozměrné varietě $\mathcal{X}$ se zadanou lineární konexí ∇ je dána křivka $\zeta : \mathcal{I} \to \mathcal{X}$ a vektorové pole $\xi_0 : \mathcal{I} \to T\mathcal{X}$ podél této křivky. Vybereme body $a, b \in \mathcal{I}$ $(a < b)$ a takové vektorové pole ξ na $\mathcal{X}$, které na oblouku ζ_{ab} splývá s ξ_0, $\xi(\zeta(t)) = \xi_0(t)$, $a \le t \le b$, nebo, což je totéž, v lokálních souřadnicích

$$\lambda^i(\zeta(t)) = \frac{d(x^i\zeta)}{dt}. \tag{5.17}$$

Říkáme, že pole vektorů $\xi_0(t)$ je tvořeno *paralelními vektory*, nebo že je *paralelní podél oblouku* ζ_{ab}, když pro každé t z intervalu $a \le t \le b$ platí

$$\nabla_\lambda(\xi)(\zeta(t)) = 0. \tag{5.18}$$

Podmínkou paralelnosti pole vektorů ξ_0 je tedy anulování kovariantní derivace jeho „prodloužení“ ξ ve směru pole tečných vektorů uvažovaného oblouku.

Podmínku (5.18) můžeme přepsat v lokálních souřadnicích $x^1, \ldots, x^n$ pro oblouk ζ_{ab}, který celý leží v souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$. Z definice lineární konexe a z (5.5) dostáváme na $\mathcal{U}$ formuli

$$\nabla_\lambda(\xi) = \nabla_{\lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \lambda^i \left(\xi^j \nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \lambda^i \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \xi^j \Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{5.19}$$

Podél oblouku ζ_{ab}, jak ukazuje (5.18), ovšem platí (5.17), takže s pomocí identity $\left(\frac{d(x^i\zeta)}{dt}\right) \cdot \left(\frac{\partial \xi_0^j}{\partial x^i}\right) = \frac{d\xi_0^j}{dt}$ docházíme k ekvivalenci (5.18) se systémem rovnic

$$\frac{d\xi_0^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} \cdot \xi_0^j \frac{d(x^i\zeta)}{dt} = 0 \tag{5.20}$$

pro složky ξ_0^k vektorového pole ξ_0. Z tohoto systému mj. vyplývá, že podmínka paralelnosti (5.18) je nezávislá na volbě „rozšíření“ vektorových polí $\xi_0(t)$, $\zeta(t)$, $a \leq t \leq b$, na celou varietu $\mathcal{X}$, potřebných pro výpočet kovariantní derivace (5.18) z definice. Skutečně, vztahy (5.20) obsahují pouze hodnoty vektorových polí ξ, λ na křivce ζ.

Zformulujeme nyní, co je známo o řešení systému rovnic (5.20) formou teorému, jehož důkaz nebudeme uvádět. [1]

Teorém o paralelních vektorových polích. Existují jednoznačně určené funkce $f^i(t, \lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^n)$ argumentu t, závislé na parametrech λ_0^i, kde $a \leq t \leq b$, $\lambda_0^i \in (-\infty, \infty)$ takové, že

1. pro každý výběr konstant λ_0^i funkce $\xi_0^k(t) = f^k(t, \lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^n)$ splňují systém (5.20),

2. pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $f^i(a, \lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^n) = \lambda_0^i$.

Jinými slovy, existuje právě jedno vektorové pole ξ_0, paralelní podél oblouku ζ_{ab}, získávající v bodě $\zeta(a) \in \mathcal{X}$ předem zadanou hodnotu $\lambda_0^i \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(t)}$. Je to vektorové pole

$$\xi_0(t) = \xi_0^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(t)}. \tag{5.21}$$

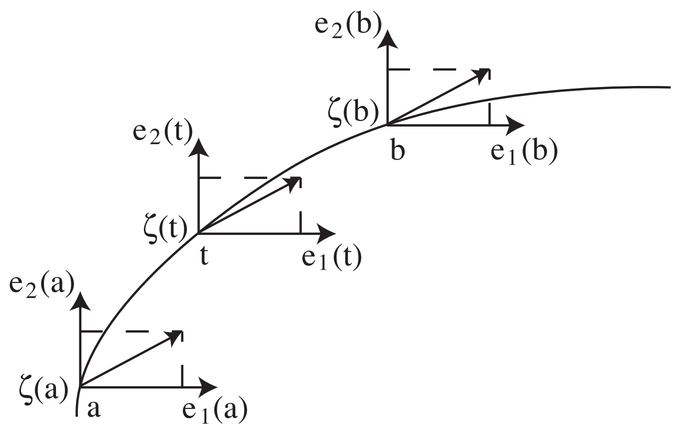
Teorém ukazuje, že složky $\xi_0^i(t)$ vektorového pole (5.21) získáme jako řešení systému (5.20) s „počátečními podmínkami“ $\xi_0^i(a) = \lambda_0^i$.

Z teorému o paralelních vektorových polích vyplývá, že vektoru $\lambda_0 = \lambda_0^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(a)}$ je jednoznačně přiřazen vektor $\xi_0^i(b) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(b)}$. V tomto smyslu říkáme, že vektor λ_0 je *paralelně přenesen* z bodu $\zeta(a)$ variety $\mathcal{X}$ do bodu $\zeta(b)$ *podél křivky* ζ. Vznikající zobrazení, označované stejným symbolem jako oblouk, ζ_{ab},

$$T_{\zeta(a)}\mathcal{X} \ni \lambda_0 = \xi_0(a) \to \zeta_{ab} \cdot \lambda_0 = \xi_0(b) \in T_{\zeta(b)}\mathcal{X}, \tag{5.22}$$

je lineární a vzájemně jednoznačné (viz. pozn. 6). Přeneseme–li paralelně součet dvou vektorů, dojdeme ke stejnému výsledku, jako když přeneseme každý zvlášť a pak sečteme. Přenášíme–li paralelně (podél oblouku) nějaké báze tečného prostoru, obdržíme opět báze v odpovídajících tečných prostorech podél oblouku; složky libovolného paralelního vektorového pole vůči těmto bázím jsou čísla, nezávislé na bodu křivky, podél které se přenáší. Situace je ve značně zjednodušené podobě znázorněna na obr. 16.

[1] Gromoll, 68, 251; Helgason, 42



Obr. 16. Složky paralelního vektorového pole vůči bázi z paralelních vektorových polí.

Podobné tvrzení platí o násobcích skalárem. Zobrazení (5.22) budeme nazývat *paralelním přenosem* vektorů z bodu $\zeta(a)$ do bodu $\zeta(b)$ variety $\mathcal{X}$ *podél křivky* ζ.

Poznámky a úlohy

5. S označením jako v textu výše je možno ukázat, že na $\mathcal{X}$ lze vždy vybrat vektorové pole ξ, splývající s vektorovým polem ξ_0 na oblouku ξ_{ab}.

6. Jednoznačnost zobrazení (5.22) je zaručena větou o paralelních vektorových polích. Ukážeme, že toto zobrazení je lineární. Nechť λ_{01}, λ_{02} jsou libovolné vektory z $T_x\mathcal{X}$, kde $x = \zeta(a)$. Paralelní přenos ζ_{ab} definuje vektory $\zeta_{ab} \cdot (\lambda_{01} + \lambda_{02})$, $\zeta_{ab} \cdot \lambda_{01} + \zeta_{ab} \cdot \lambda_{02}$ z $T_y\mathcal{Y}$, kde $y = \zeta(b)$. První výraz je určen n–ticí $f^k(t, \lambda_{01}^1 + \lambda_{02}^1, \dots)$, druhý n–ticí $f^k(t, \lambda_{01}^1, \lambda_{01}^2, \dots) + f^k(t, \lambda_{02}^1, \lambda_{02}^2, \dots)$ s $t = b$:

$$\begin{aligned} \zeta_{ab} \cdot (\lambda_{01} + \lambda_{02}) &= f^k(b, \lambda_{01}^1 + \lambda_{02}^1, \dots) \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)_y, \\ \zeta_{ab} \cdot \lambda_{01} + \zeta_{ab} \cdot \lambda_{02} &= (f^k(b, \lambda_{01}^1, \dots) + f^k(b, \lambda_{02}^1, \dots)) \left(\tfrac{\partial}{\partial x^k}\right)_y. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Funkce $f^k(t, \lambda_{01}^1 + \lambda_{02}^1, \dots)$ a $f^k(t, \lambda_{01}^1, \dots) + f^k(t, \lambda_{02}^1, \dots)$ představují řešení systému (5.20), splňující stejnou počáteční podmínku v bodě $t = a$, odkud dostáváme, že splývají. Totéž platí o funkcích $f^k(t, c\lambda 1_0, \dots, c\lambda_0^n)$, $cf^k(t, \lambda_0^1, \dots, \lambda_0^n)$ argumentu t pro libovolné hodnoty parametrů $\lambda_0^k \in \mathcal{R}$ a libovolnou konstantu c.

5.3 Geodetiky

Vektorové pole podél křivky ζ se nazývá *paralelní podél* této *křivky*, je–li paralelní podél každého oblouku ζ_{ab}. Sledujme podmínku paralelnosti (5.20) pro pole tečných vektorů. Dosadíme–li za ξ_0^k složky $\frac{d(x^i\zeta)}{dt}$ tohoto vektorového pole, dostaneme rovnici

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{5.24}$$

pro křivku ζ resp. její souřadnicové vyjádření $\varphi\zeta = (x^1\zeta, \dots, x^n\zeta)$. Je–li pole tečných vektorů ke křivce ζ paralelní, říkáme, že křivka ζ je *geodetikou* (vůči dané lineární konexi ∇). [2] Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby daná křivka byla geodetikou je, aby splňovala *rovnice geodetiky* (5.24).

Poznámky a úlohy

7. Složky kanonické lineární konexe na $\mathcal{R}^n$ jsou ve standardních souřadnicích nulové (viz. pozn. 4), takže rovnice geodetiky (5.24) mají tvar $\frac{d^2x^i}{dt^2} = 0$. Geodetiky jsou tedy přímky s rovnicemi typu $x^i = a^i t + b^i$ $(a^i, b^i \in \mathcal{R})$.

8. Určete složky kanonické lineární konexe na $\mathcal{R}^2$ v polárních souřadnicích (viz pozn. 2 a katitola 1, pozn. 12) a napište v těchto souřadnicích rovnice geodetiky.

5.4 Paralelní přenos tenzorů a kovariantní derivace

Ukážeme nejdříve, jak je svázána operace kovariantní derivace (5.19) vektorového pole s paralelním přenosem (5.22) vektorů. Nechť $\mathcal{I} \ni t \to \zeta(t) \in \mathcal{X}$ je křivka na varietě $\mathcal{X}$, splňující (5.16), $\dot\zeta$ pole tečných vektorů této křivky. Předpokládejme, že $0 \in \mathcal{I}$ a označme pro jednoduchost $\zeta_t = \zeta_{0t}$ oblouk, spojující body $\zeta(0)$ a $\zeta(t)$. Nechť λ je jako dříve libovolné vektorové pole na $\mathcal{X}$, splývající s $\dot\zeta$ na oblouku $\zeta_t (t \neq 0)$, ξ další vektorové pole na $\mathcal{X}$. Nakonec nechť η označuje nějaké paralelní vektorové pole podél oblouku ζ_t, splňující podmínku

$$\eta(\zeta(t)) = \xi(\zeta(t)). \tag{5.25}$$

Pro dostatečně malá t všechna vektorová pole leží v jistém souřadnicovém okolí $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ s lokálními souřadnicemi $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Můžeme psát

$$\eta(\zeta(t)) = \eta^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(t)}, \tag{5.26}$$

$$\xi(\zeta(t)) = \xi^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(t)}, \tag{5.27}$$

$$\frac{d\eta^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt} \cdot \eta^k = 0, \tag{5.28}$$

$$\eta^i(t) = \xi^i(t). \tag{5.29}$$

Nyní budeme upravovat výraz $\frac{d(\zeta_t^{-1}\cdot\xi(\zeta(t)))}{dt}$, ve kterém ζ_t^{-1} označuje paralelní přenos z bodu $\zeta(t)$ do $\zeta(0)$ podél křivky ζ. Užitím Taylorova rozvoje

$$\eta^i(t) = \eta^i(0) + t\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)_0 + \frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2\eta^i}{dt^2}\right)_0 + \dots \tag{5.30}$$

[2] Lze tedy říci, že geodetiky představují „přímky“ v uvažované geometrii.

a vztahů (5.28) a (5.29) spolu s identitou $\zeta_t^{-1}\cdot\xi(\zeta(t))=\eta(\zeta(0))$ dostáváme

$$\frac{1}{t}\left(\zeta_t^{-1}\xi(\zeta(t))-\xi(\zeta(0))\right)=\frac{1}{t}\left(\eta^i(0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(0)}-\xi^i(0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(0)}\right)=$$

$$=\frac{1}{t}\left(\eta^i(t)-t\left(\frac{d\eta^i}{dt}\right)_0-\frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2\eta^i}{dt^2}\right)_0-\ldots-\xi^i(0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(0)}=$$

$$=\frac{1}{t}\left(\xi^i(t)-\xi^i(0)+t\Gamma^i_{jk}(\zeta(0))\left(\frac{dx^j}{dt}\right)_0\eta^k(0)-\frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2\eta^i}{dt^2}\right)_0-\ldots\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(0)}$$

odkud

$$\left(\frac{d(\zeta_t^{-1}\xi(\zeta(t)))}{dt}\right)_0=\left(\frac{d\xi^i}{dt}\right)_0+\Gamma^i_{jk}(\zeta(0))\left(\frac{dx^j}{dt}\right)_0\xi^k(0).$$

Snadno nahlédneme, že analogický vztah platí pro každé t, ne pouze pro $t=0$. Porovnáním s (5.19) a (5.20) docházíme tedy k rovnosti

$$\nabla_\lambda(\xi)(\zeta(t))=\frac{d(\zeta_t^{-1}\xi(\zeta(t)))}{dt},\tag{5.31}$$

představující hledanou formuli.

Při dodržení předcházejícího označení zavedeme operaci paralelního přenosu pro lineární formy a pak pro obecné tenzory typu (r,s). Nechť $\omega\in T^*_{\zeta(0)}\mathcal{X}$ je lineární forma. Zvolme v bodě $\zeta(t)$ vektor $\xi\in T_{\zeta(t)}\mathcal{X}$ a přeneseme ho paralelně do bodu $\zeta(0)$ zobrazením ζ_t^{-1}. Dostaneme vektor $\zeta_t^{-1}\xi\in T_{\zeta(0)}\mathcal{X}$, takže má smysl výraz $\omega(\zeta_t^{-1}\cdot\xi)$. Vzhledem k linearitě paralelního přenosu (viz pozn. 6) dostáváme lineární formu $\xi\to\omega(\zeta_t^{-1}\cdot\xi)$ na $T_{\zeta(t)}\mathcal{X}$, tedy element prostoru $T^*_{\zeta(t)}\mathcal{X}$, který označíme $\zeta_t\cdot\omega$:

$$(\zeta_t\cdot\omega)(\xi)=\omega(\zeta_t^{-1}\cdot\xi).\tag{5.32}$$

Závislost $\zeta_t\cdot\omega$ na ω je zjevně lineární a vzájemně jednoznačná. Zobecnění operace paralelního přenosu na libovolné tenzory provedeme v lokálních souřadnicích ve tvaru, vhodnějším pro další výpočty. Je–li u libovolný tenzor typu (r,s) v bodě $\zeta(0)$, vyjádřený v lokálních souřadnicích ve tvaru (3.16), pak definujeme tenzor $\zeta_t\cdot u$ typu (r,s) v bodě $\zeta(t)$ vztahem

$$\zeta_t\cdot u=u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\left(\zeta_t\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_{\zeta(t)}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\zeta_t\left(dx^{j_1}\right)_{\zeta(t)}\right)\otimes\ldots.\tag{5.33}$$

Vztahy (5.32) a (5.33) přirozeným způsobem zavádí paralelní přenos libovolných tenzorů podél dané křivky pomocí paralelního přenosu vektorů. Pro tenzory typu $(0,0)$, tedy skaláry, klademe

$$\zeta_t\cdot c=c.\tag{5.34}$$

Vraťme se nyní k formuli (5.21). Její interpretace spočívá v tom, že kovariantní derivace vektorového pole ξ ve směru vektorového pole λ je „infinitesimální charakteristikou" odchylky ξ od paralelního vektorového pole $\zeta_t \cdot \xi(\zeta(0))$ podél křivky ζ; je–li tato infinitesimální charakteristika rovna nule, pak je vektorové pole ξ paralelní podél ζ (5.18). V naší situaci, kdy je vztahy (5.32), (5.33) a (5.34) dáno zobecnění operace paralelního přenosu na libovolné tenzory, můžeme obdobnou charakteristiku získat pro libovolná tenzorová pole.

Pro tenzorová pole u klademe

$$\nabla_\lambda(u)(\zeta(t)) = \frac{d}{dt}\zeta_t^{-1} \cdot u(\zeta(t)) \tag{5.35}$$

a výraz (5.35) nazveme *kovariantní derivaci tenzorového pole u ve směru vektorového pole λ.*

Odvodíme souřadnicové vyjádření pro kovariantní derivaci tenzorového pole u. Z definice (5.32)

$$\left(\zeta_t^{-1} \cdot (dx^j)_{\zeta(t)}\right)(\xi_0) = \left(dx^j\right)_{\zeta(t)}(\zeta_t \cdot \xi_0).$$

Označíme–li ξ paralelní vektorové pole, jednoznačně určené podmínkami

$$\xi(t) = \xi^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(t)},$$

$$\xi(0) = \xi_0 = \xi_0^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\zeta(0)},$$

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma^i_{kj}\xi^j\frac{d(x^k\zeta)}{dt} = 0.$$

(viz kapitola 5.2), tedy vektorové pole $\zeta_t \cdot \xi_0$, bude

$$\left(dx^j\right)_{\zeta(t)}(\zeta_t \cdot \xi_0) = \xi^j(t)$$

a pro kovariantní derivaci lineární formy dx^j dostáváme

$$\left(\frac{d}{dt}\zeta_t^{-1} \cdot (dx^j)_{\zeta(t)}\right)_0 = -\Gamma^j_{ik}\lambda^i(dx^k)_{\zeta(0)}.$$

Porovnáním (5.35) a (5.33) pak obecně

$$\zeta_t^{-1} \cdot u(\zeta(t)) = \zeta_t^{-1}\left(\left(u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}\right) \circ \zeta_t \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_{\zeta(t)} \otimes \ldots \otimes \left(dx^{j_1}\right)_{\zeta(t)} \otimes \ldots\right) =$$

$$= \left(u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \circ \zeta_t\right) \cdot \zeta_t^{-1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_{\zeta(t)} \otimes \ldots \otimes \zeta_t^{-1} \cdot \left(dx^{j_1}\right)_{\zeta(t)} \otimes \ldots$$

odkud derivováním podle t snadno získáme

$$\nabla_\lambda(u)(\zeta(t)) = \frac{\partial u^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}}{\partial x^m} \cdot \lambda^m \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \ldots \otimes dx^{l_1} \otimes \ldots + u^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \cdot \lambda^i$$

$$\left(\Gamma^{k_1}_{ii_1}\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\ldots\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots+\ldots-\Gamma^{j_1}_{ik_1}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes dx^{k_1}\otimes dx^{j_2}\otimes\ldots-\ldots\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial u^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}}{\partial x^m}+u^{i_1k_2\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}\cdot\Gamma^{k_1}_{mi_1}+\ldots-u^{k_1\ldots k_r}_{j_1l_2\ldots l_s}\cdot\Gamma^{j_1}_{ml_1}-\ldots\right)\lambda^m\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\otimes\ldots\otimes dx^{l_1}\otimes\ldots \tag{5.36}$$

kde všechny báze, tj. součiny vektorů $\frac{\partial}{\partial x^i}$ a forem dx^j, jsou uvažovány v bodě $x=\zeta(t)$. Vztah (5.36) představuje hledanou souřadnicovou formuli. Pro reálné funkce f dodefinujeme

$$\nabla_\lambda(f)=\partial_\lambda f=\lambda^i\frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{5.37}$$

Poznámky a úlohy

9. Kovariantní derivace $\nabla_\lambda(u)$ (5.36) závisí lineárně na vektorovém poli λ. Zvolíme–li za toto vektorové pole souřadnicové vektorové pole $\frac{\partial}{\partial x^i}$, dojdeme k často používanému složkovému zápisu kovariantní derivace. Označíme–li

$$\nabla_i(u)=u^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s\,;i}\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\otimes\ldots\otimes dx^{l_1}\otimes\ldots \tag{5.38}$$

dojdeme k souřadnicovým vztahům

$$\begin{aligned}
f_{;i}&=\frac{\partial f}{\partial x^i},\\
\xi^m_{\ ;i}&=\frac{\partial\xi^m}{\partial x^i}+\xi^j\Gamma^m_{ij},\\
\omega_{m;i}&=\frac{\partial\omega_m}{\partial x^i}-\omega_j\Gamma^j_{im},\\
\eta^m_{l\ ;i}&=\frac{\partial\eta^m_l}{\partial x^i}+\eta^k_l\Gamma^m_{ik}-\eta^m_k\Gamma^k_{il},\\
A^{ij}_{\ ;m}&=\frac{\partial A^{ij}}{\partial x^m}+A^{lj}\Gamma^i_{ml}+A^{il}\Gamma^j_{ml},\\
B_{ij;m}&=\frac{\partial B_{ij}}{\partial x^m}-B_{kj}\Gamma^k_{mi}-B_{ik}\Gamma^k_{mj}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

pro složky $\nabla_i(u)$, kde u je postupně rovno f, $\xi=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega=\omega_i dx^i$, $\eta=\eta^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$, $A=A^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}$, $B=B_{ij}dx^i\otimes dx^j$. Se zřejmou dávkou konvence se často o vztazích (5.39) a dalších s nimi analogických mluví jako o *kovariantní derivaci funkce*, *vektorového pole* (nebo prostě *vektoru*), *pole lineárních forem* (nebo prostě *kovariantního vektoru*), *kontravariantního tenzoru druhého řádu* a *kovariantního tenzoru druhého řádu*.

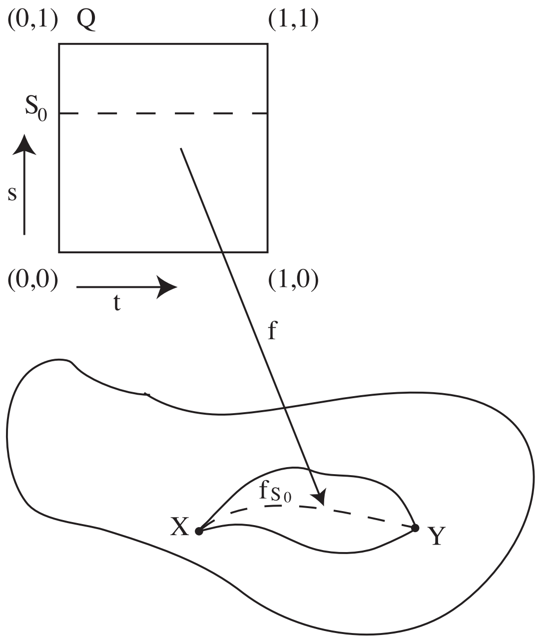
10. Je třeba podotknout, že pojem kovariantní derivace je úzce svázán s danou konexí. Zvolíme–li na uvažované varietě dvě různé lineární konexe, dojdeme k rozdílným pojmům paralelnosti vektorů a tedy také k rozdílným operacím kovariantního derivování.

5.5 Geometrický význam tenzoru křivosti

Uvažujme n–rozměrnou varietu $\mathcal{X}$ s lineární konexí ∇ a lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U},\varphi)$, $\varphi=(x^1,\ldots,x^n)$ na $\mathcal{X}$. Nechť Q je čtverec v rovině, $Q=\{(s,t)\in\mathcal{R}^2\mid 0\le s,t\le 1\}$, f jeho zobrazení do $\mathcal{U}$ takové, že pro všechna s

$$f(s,0)=x,\qquad f(s,1)=y \tag{5.40}$$

kde x, y jsou pevné body množiny $\mathcal{U}$. Zobrazení f tedy představuje jednoparametrický systém křivek $t \to f_s(t) = f_t(s) = f(s,t)$, spojujících body x, y (viz obr. 17).



Obr. 17. Jednoparametrický systém křivek, spojující dva body variety.

Zvolme v bodě x vektor ξ_0 a označme

$$\xi(s,t) = \xi^i_s(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{f(s,t)} = \xi^i(s,t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{f(s,t)} \tag{5.41}$$

paralelní vektorové pole podél křivky f_s, splňující počáteční podmínku $\xi_s(0) = \xi_0$. Toto vektorové pole vzniká paralelním přenosem vektoru ξ_0 podél f_s. Funkce ξ^i tedy splňují podmínku

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial t} + \Gamma^k_{ij}\xi^j \frac{\partial x^i}{\partial t} = 0. \tag{5.42}$$

Pro vyšetřování geometrického významu tenzoru křivosti R (5.2) je třeba se zabývat druhými kovariantními derivacemi, jak vyplývá z definice R. K tomu budou směřovat naše další výpočty.

Označíme–li $\Xi^k(s,t)$ levou stranu rovnice (5.42), dojdeme k identitě

$$\frac{\partial \Xi^k}{\partial s} + \Gamma^k_{rj}\Xi^j \frac{\partial x^r}{\partial s} = 0, \tag{5.43}$$

která po rozepsání dává

$$\frac{\partial^2 \xi^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s} \xi^j \frac{\partial x^i}{\partial t} + \Gamma^k_{ij} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial s} \frac{\partial x^i}{\partial t} + \xi^j \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} \right) + \Gamma^k_{rm} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial t} + \Gamma^m_{ij} \xi^j \frac{\partial x^i}{\partial t} \right) \frac{\partial x^r}{\partial s} = 0. \tag{5.44}$$

Na druhé straně pro vektor

$$\Theta^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial s} + \Gamma^k_{ij} \xi^j \frac{\partial x^i}{\partial s} \tag{5.45}$$

dostáváme

$$\frac{\partial \Theta^k}{\partial t} + \Gamma^k_{rm} \Theta^m \frac{\partial x^r}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \Gamma^k_{lj}}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial t} \xi^j \frac{\partial x^l}{\partial s} +$$
$$+ \Gamma^k_{ij} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial s} + \xi^j \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} \right) + \Gamma^k_{rm} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial s} + \Gamma^m_{ij} \xi^j \frac{\partial x^k}{\partial s} \right) \frac{\partial x^r}{\partial t}, \tag{5.46}$$

takže porovnáním (5.44) a (5.46) dojdeme ke vztahu

$$\frac{\partial \Theta^k}{\partial t} + \Gamma^k_{rm} \Theta^m \frac{\partial x^r}{\partial t} + \frac{\partial x^m}{\partial s} \frac{\partial x^i}{\partial t} \xi^j R^k_{mij} = 0 \tag{5.47}$$

obsahující tenzor křivosti (5.12). To je hledaná formule svazující ve studované situaci druhou kovariantní derivaci vektorového pole (5.41) podél křivek f_s, f_t s komponentami tenzoru křivosti.

Předpokládáme–li nyní, že v uvažované oblasti $R = 0$, .j. že $R^k_{ljm} = 0$, dostaneme, že vektorové pole (5.45) je paralelní podél f_s. V bodě x ovšem podmínky (5.40), (5.45) dávají $\Theta^k(s, 0) = 0$, takže vektorové pole Θ^k vzniká paralelním přenosem nulového vektoru a je tedy nulové (viz pozn. 6). Vidíme tedy, že vektorové pole (5.41) je paralelní také podél křivek $s \to f_t(s)$ pro každé t. V bodě y vektor $\xi(s, 1)$ nezávisí na s. Docházíme k výsledku, že paralelní přenos vektoru ξ_0 z bodu x do bodu y nezávisí na oblouku, podél kterého se přenáší. Obrácené tvrzení je zřejmě také pravdivé.

Paralelní přenos nezávisí na použité křivce tehdy a jen tehdy, je–li lineární konexe ∇ plochá (viz kapitola 5.1). V obecném případě tenzor křivosti představuje míru závislosti paralelního přenosu na volbě oblouku v uvažovaném souřadnicovém okolí.

Kapitola 6

Variety s metrickým polem

Je dobře známo, že pro délku ds nekonečně malého vektoru (dy^1, dy^2, dy^3) ve standardních souřadnicích eukleidovského prostoru $\mathcal{R}^3$ platí tzv. Pythagorova věta $ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$. V přesnější tenzorové terminologii říkáme, že na $\mathcal{R}^3$ je dáno metrické tenzorové pole $g = ds^2$, které zapisujeme jako $g = dy^1 \otimes dy^1 + dy^2 \otimes dy^2 + dy^3 \otimes dy^3$, nebo v obecných souřadnicích x^1, x^2, x^3

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

kde $i, j = 1, 2, 3$. Tenzorové pole g určuje tzv. *metrické vlastnosti* variety $\mathcal{R}^3$. Pomocí něho počítáme *skalární součin vektorů* $\xi = (\xi^i)$, $\lambda = (\lambda^i)$, tečných k varietě $\mathcal{R}^3$ v libovolném bodě $x = (x^1, x^2, x^3)$,

$$\xi \cdot \lambda = g_{ij}(x^1, x^2, x^3) \cdot \xi^i \cdot \lambda^i, \tag{6.1}$$

obsahující v sobě pojem *délky* vektoru ξ, $|\xi|$, a *úhlu* mezi dvěma nenulovými vektory, $\angle(\xi, \lambda)$:

$$|\xi| = \sqrt{\xi \cdot \xi}, \qquad \cos \angle(\xi, \lambda) = \frac{\xi \cdot \lambda}{|\xi| \cdot |\lambda|}. \tag{6.2}$$

Metrický tenzor určuje „délkový element“, který když zintegrujeme, získáme *délku* libovolného *oblouku* ζ v $\mathcal{R}^3$ podle vztahu

$$l = \int_\zeta ds = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{d\zeta^i}{dt} \frac{d\zeta^j}{dt}} dt. \tag{6.3}$$

Je základní veličinou při výpočtu plošných obsahů a objemů atd. To, že se o něm při úvahách o geometrických útvarech v $\mathcal{R}^3$ někdy ani nezmiňujeme, je dáno faktem, že na $\mathcal{R}^3$ existuje globální souřadnicový systém, ve kterém lze provádět všechny geometrické úvahy a ve kterém jsou zároveň složky metrického tenzorového pole rovny nule nedo jedné.

Pro tento svůj geometrický význam bude hrát metrické tenzorové pole primární roli i v OTR. Navíc zde získá ještě fundamentální fyzikální interpretaci – na základě úvah, spojených s principem ekvivalence se stane veličinou, charakterizující gravitační pole, „gravitačním potenciálem“, „proměnnou gravitačního pole“. Metrické tenzorové pole v OTR bude ovšem polem hyperbolickým, jak vyžaduje korespondence OTR se speciální teorií relativity. Jeho vlastnosti se proto budou v mnohém odlišovat od metrického tenzorového pole prostoru $\mathcal{R}^3$.

6.1 Riemannovské a hyperbolické variety

Metrické pole na n–rozměrné varietě $\mathcal{X}$ – to je každé tenzorové pole typu $(0,2)$ na $\mathcal{X}$ s vlastností, že tenzor $g(x)$ je metrikou tečného prostoru $T_x\mathcal{X}$ pro každé $x \in \mathcal{X}$ (porov. s kapitolou 2.6). Je–li signatura tenzoru $g(x)$ rovna $(n,0)$ pro každé x, říkáme, že metrické pole g je *Riemannovou metrikou* na $\mathcal{X}$. V případě signatury $(n-1,1)$ v každém bodě variety $\mathcal{X}$ mluvíme o *hyperbolické metrice* na $\mathcal{X}$. Pro metrické pole používáme často názvu *metrický tenzor*. Varieta s Riemannovou metrikou se nazývá *riemannovskou varietou*, s hyperbolickou metrikou *hyperbolickou varietou*.

Nechť $(\mathcal{U},\varphi)$, $\varphi = (x^1,\ldots,x^n)$ je lokální souřadnicový systém na $\mathcal{X}$. Metrické pole g má na $\mathcal{U}$ vyjádření (viz (3.37))

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j \tag{6.4}$$

ve kterém funkce g_{ij} proměnných $x^1,\ldots,x^n$ splňují pro každou hodnotu těhto proměnných vztahy

$$g_{ij} = g_{ji}, \qquad \det(g_{ij}) \neq 0. \tag{6.5}$$

Pro tenzorové pole g se často používá také označení $ds^2 = g_{ij}dx^idx^j$, připomínající, že toto tenzorové pole charakterizuje „délkový element“ uvažované variety. Vyjádření (6.4) se od klasického výrazu ds^2 liší pouze precizovaným významem symbolů dx^i a jejich „kvadrátů“ dx^idx^j.

Poznámky a úlohy

1. *Eukleidovská metrika* variety $\mathcal{R}^3$, daná v přirozených souřadnicích vztahem

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + \ldots + dx^n \otimes dx^n, \tag{6.6}$$

je Riemannovou metrikou. Určete složky této metriky ve sférických souřadnicích (viz kapitola 3, pozn. 4). Pojem Riemannovy metriky představuje zobecnění pojmu eukleidovské metriky topologicky jednoduchých variet $\mathcal{R}^n$.

2. Na každé varietě existuje Riemannova metrika. Naproti tomu existují variety, na kterých nelze zadat hyperbolickou metriku. Čtenář, zajímající se o nutná ohraničení, nechť se obrátí na literaturu [1].

[1] Choquet – Bruhat

3. *Prostoročas speciální teorie relativity* představuje nejjednodušší příklad hyperbolické variety. Je to varieta $\mathcal{R}^4$ s hyperbolickou metrikou, která má v přirozených souřadnicích x^1, x^2, x^3, x^4 na $\mathcal{R}^4$ tvar

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 - dx^4 \otimes dx^4 \tag{6.7}$$

(porov. s kapitolou 2.6). Metrické pole (6.7) definuje v každém tečném prostoru $T_x\mathcal{R}^4$ Minkowského metrický tenzor. Klademe

$$x^4 = ct, \tag{6.8}$$

kde c je konstanta (*rychlost světla ve vakuu*) a t je časová souřadnice. Nechť $\zeta(t) = (\zeta^1(t), \zeta^2(t), \zeta^3(t), ct)$ je křivka, charakterizující pohyb nějaké částice; první trojice udává polohu částice v okamžiku, udaném čtvrtou složkou křivky. Pro pole $\dot{\zeta}(t)$ tečných vektorů k této křivce, tedy pro „*čtyřrychlost*“ uvažované částice dostáváme

$$g(\dot{\zeta}(t), \dot{\zeta}(t)) = g_{ij}\frac{d\zeta^i}{dt}\frac{d\zeta^i}{dt} = \left(\frac{d\zeta^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta^3}{dt}\right)^2 - c^2 = v^2 - c^2 < 0, \tag{6.9}$$

kde v označuje rychlost uvažované částice, která je vždy menší než rychlost světla. Vidíme tedy, že vektor čtyřrychlosti je vždy časupodobný. Křivky v uvažované hyperbolické varietě $\mathcal{R}^4$, kterých tečné vektory jsou časupodobné, se samy nazývají *časupodobnými.*

Podobně jako v kapitole 2 pozn. 20 lze definovat v libovolném bodě každé hyperbolické variety prostorupodobné, časupodobné a izotropní vektory a také pojem světelného kužele. Jelikož mají tyto pojmy úzký vztah k fyzikálně důležitým podvarietám hyperbolické variety (porov. s pozn. 3), pozastavíme se u nich podrobněji.

Uvažujme hyperbolickou varietu $\mathcal{X}$ s metrickým polem g. Na každém tečném prostoru $T_x\mathcal{X}$ definuje metrické pole g tenzor $g(x) \in T_x^*\mathcal{X} \otimes T_x^*\mathcal{X}$, metriku prostoru $T_x\mathcal{X}$ (viz kapitola 2.6). Libovolným dvěma vektorům $\xi, \lambda \in T_x\mathcal{X}$ je tak přiřazeno číslo $g(x)(\xi, \lambda)$ (viz (2.30)), zapisované pro větší jednoduchost s vynecháním argumentu x, který je ostatně zbytečný, víme–li, do kterého prostoru vektory ξ, λ patří. V libovolném lokálním souřadnicovém systému $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, s $x \in \mathcal{U}$, kde $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, platí

$$g(\xi, \lambda) = g_{ij}\xi^i\lambda^j \tag{6.10}$$

vektor $\xi \in T_x\mathcal{X}$ budeme nazývat (po řadě) *prostorupodobným*, *časupodobným*, *izotropním*, platí–li (po řadě) $g(\xi, \xi) > 0$, $g(\xi, \xi) < 0$, $g(\xi, \xi) = 0$. Světelný kužel v $T_x\mathcal{X}$ je tvořen všemi izotropními vektory.

Křivka ζ na $\mathcal{X}$ se nazývá (po řadě) *prostorupodobnou*, *časupodobnou*, *izotropní*, je–li pole tečných vektorů $\dot{\zeta}$ této křivky tvořeno (po řadě) prostorupodobnými, časupodobnými, izotropními vektory (porov. s kapitolou 4.2 a také kapitolou 6, pozn. 3). Podvarieta variety $\mathcal{X}$ se nazývá *prostorupodobnou*, je–li každá křivka, která na ní leží, prostorupodobná.

Délkou oblouku ζ_{ab} prostorupodobné, časupodobné nebo izotropní křivky ζ nazýváme číslo

$$s(\zeta) = \int_a^b \sqrt{|g(\dot{\zeta}, \dot{\zeta})|}dt. \tag{6.11}$$

Délka oblouku je geometricky dobře definována, jelikož, jak možno přímo prověřit, je nezávislá na parametrizaci křivky ζ.

Předpokládejme nyní, že je dána $(n-1)$–rozměrná prostorupodobná podvarieta $\mathcal{Y}$ variety $\mathcal{X}$. Všechny tečné vektory k této podvarietě jsou tedy prostorupodobné a dále ke každému bodu $y_0 \in \mathcal{Y}$ lze vybrat lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$, tak, že $y_0 \in \mathcal{U}$ a že rovnice

$$x^n = c \tag{6.12}$$

představuje rovnici podvariety $\mathcal{Y}$ na souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$ (viz kapitola 1.3). Každý vektor $\tilde{\xi} \in T_{y_0}\mathcal{Y}$ má tvar

$$\tilde{\xi} = \sum_{k=1}^{n-1} \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{6.13}$$

a lze ho interpretovat také jako vektor $\xi \in T_{y_0}\mathcal{X}$, lišící se od $\tilde{\xi}$ pouze nulovou složkou u vektoru báze $\frac{\partial}{\partial x^n}$. Klademe

$$\tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\lambda} = g(\xi, \lambda) = \sum_{k,l=1}^{n-1} g_{kl}\xi^k\lambda^l \tag{6.14}$$

a dostáváme tak na podvarietě $\mathcal{Y}$ metrické pole $\tilde{g}$, vyjádřené v lokálních souřadnicích $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ na $\mathcal{Y}$ ve tvaru

$$\tilde{g} = \sum_{k,l=1}^{n-1} g_{kl} dx^k \otimes dx^l. \tag{6.15}$$

Výraz (6.15) lze také obdržet přímo dosazením $dx^n = 0$ z rovnice (6.12) do (6.4). Každý nenulový tečný vektor k $\mathcal{Y}$ je ovšem prostorupodobný, takže vždy $\tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) > 0$ a $\tilde{g}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = 0$ tehdy a jen tehdy, když $\tilde{\xi} = 0$. Takto $\tilde{g}$ je Riemannovou metrikou na $\mathcal{Y}$, jak vyplývá z nezávislosti skalárního součinu na volbě báze (porov. s kapitolou 2, pozn. 20). Docházíme k závěru, že hyperbolická metrika variety $\mathcal{X}$ definuje na každé $(n-1)$–rozměrné prostorupodobné podvarietě Riemannovu metriku. O této metrice budeme mluvit jako o *indukované*.

Všimněme si, že rovnice $x^4 = 0$ definuje ve standardních souřadnicích na prostoročase speciální relativity prostorupodobnou podvarietu s indukovanou eukleidovskou metrikou (viz pozn. 1). Toto spolu s úvahou o pohybu částice (pozn. 3) může pro čtenáře sloužit za motivaci pro zavedení terminologie naší klasifikace tečných vektorů k hyperbolickým varietám.

6.2 Levi–Civitova konexe

Uvažujme libovolné metrické pole g na varietě $\mathcal{X}$, reprezentované v lokálních souřadnicích ve tvaru (6.4). Označme g^{ij} prvky inverzní matice k matici g_{kl}. Veličiny g^{ij}, g_{kl} splňují analogické vztahy jako (2.50) s tím rozdílem, že nyní představují funkce lokálních souřadnic $x^1, \ldots, x^n$ a vztahy

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k, \tag{6.16}$$

platí v každém bodě uvažovaného souřadnicového okolí, tedy pro libovolnou hodnotu lokálních souřadnic x^i. Klademe

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right), \tag{6.17}$$

a výrazy Γ^i_{jk} nazýváme Christoffelovými symboly. Na každém souřadnicovém okolí tak dostáváme n^3 funkcí Γ^i_{jk}, splňujících vztahy

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}. \tag{6.18}$$

Přímým výpočtem možno prověřit, že tyto funkce splňují transformační vztah (5.14). Představují tak složky jisté lineární konexe ∇ na $\mathcal{X}$, kterou budeme nazývat *Levi–Civitovou konexí* (někdy se o ∇ mluví také jako o Riemannově konexi). Vzhledem k (6.18) a (5.13) je Levi–Civitova konexe konexí bez torze.

Popsaná konstrukce ukazuje, že každé metrické pole indukuje jistou lineární konexi. V tomto smyslu je metrické pole na varietě silnější strukturou, než lineární konexe. Je samozřejmé, že s pomocí Levi–Civitovy konexe lze na varietě s metrickým polem mluvit o paralelnosti vektorů a tenzorů, o geodetikách a kovariantních derivacích tak, jak byly tyto pojmy zavedeny v předcházející kapitole. Kromě toho lze snadno prověřit, že pro každé vektorové pole ξ platí

$$\nabla_\xi(g) = 0 \tag{6.19}$$

nebo ve „složkové symbolice“ (5.39)

$$g_{ij;k} = 0. \tag{6.20}$$

Poznámky a úlohy

4. Jelikož na každé varietě existuje Riemannova metrika (viz pozn. 2), úvaha tohoto odstavce vede k závěru, že na každé varietě existuje lineární konexe.

5. Uvažujme na $\mathcal{R}^3$ eukleidovskou metriku (6.6). Jaké jsou složky příslušné Levi–Civitovy konexe v přirozených souřadnicích a ve sférických ? Porovnejte s kapitolou 5, pozn. 4.

6. Ukažte, že funkce Γ^i_{jk} splňují vztah (5.14) pro složky lineární konexe.

7. Je možno ukázat, že Levi–Civitova konexe je jedinou konexí bez torze (tj. s nulovým tenzorem torze), splňující (6.20). Její úzkou svázanost s metrickým polem nejlépe demonstruje geometrická interpretace relace (6.20), kterou zde uvedeme bez podrobnějšího rozboru. Tato interpretace je založena na faktu, že kovariantní derivace metrického pole ve směru libovolného vektorového pole je rovna nule tehdy a jen tehdy, zachovává–li paralelní přenos uvažované lineární konexe operaci skalárního součinu v tečných prostorech [2].

6.3 Izometrie

Uvažujme libovolnou n–rozměrnou varietu $\mathcal{X}$ s metrickým polem g. Nechť $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ je difeomorfismus. V souladu s kapitolou 4.4 říkáme, že metrické pole g je *invariantní* vůči α, nebo také že α je *izometrie*, platí–li

$$\alpha^* g = g. \tag{6.21}$$

[2] Helgason, 60

Izometrie tedy představují zobrazení variety $\mathcal{X}$, zachovávající její metriku.

Velmi často se zajímáme o podmínky, kdy je daná jednoparametrická grupa transformací variety $\mathcal{X}$ (viz kapitola 4.2) tvořena izometriemi, tedy kdy je *jednoparametrickou grupou izometrií.* Jednoparametrická grupa transformací α_t je jednoparametrickou grupou izometrií tehdy a jen tehdy, když její generátor ξ splňuje tzv. *Killingovu rovnici*

$$\partial_\xi g = 0 \tag{6.22}$$

(viz kapitola 4, pozn. 10). V libovolných lokálních souřadnicích $x^1, \dots, x^n$ může být Killingova rovnice přepsána ve tvaru (4.54)

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} g_{il} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} g_{ik} = 0. \tag{6.23}$$

Přiřadíme–li vektorovému poli ξ pomocí operace snížení indexů pole lineárních forem $\xi_k dx^k$,

$$\xi_k = g_{kl}\xi^l, \tag{6.24}$$

můžeme s pomocí operace kovariantní derivace (5.39) přepsat podmínky (6.23) v ekvivalentním tvaru

$$\xi_{k;i} + \xi_{i;k} = 0. \tag{6.25}$$

Každé vektorové pole $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, splňující jednu z ekvivalentních podmínek (6.22), (6.23), (6.25), se nazývá *Killingovým vektorovým polem*, nebo krátce *Killingovým vektorem.*

Poznámky a úlohy

8. Všechny izometrie diferencovatelné variety s daným metrickým polem tvoří Lieovu grupu (kapitola 1, pozn. 13), když je uvažujeme s operací kompozice zobrazení (viz kapitola 1.2). Tato grupa se nazývá *grupou izometrií* uvažovaného metrického pole. Je známo, že existují variety s metrickým polem, jehož grupa izometrie je triviální, tedy skládající se z identické transformace [3].

9. Snadno lze popsat všechny izometrie prostoročasu speciální teorie relativity (pozn. 3). Podmínku (6.21) pro transformaci α, vyjádřenou v přirozených souřadnicích ve tvaru $y^k = f^k(x^1, \dots, x^4)$, lze přepsat ve tvaru $g_{lj} = \frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j} g^{kl}$, ve kterém g_{ij} jsou prvky matice (2.55). Derivováním této podmínky podle x^m a užitím vztahů (1.10) a (6.16) dojdeme k rovnicím

$$\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^m} = 0 \tag{6.26}$$

pro funkce f^k, které ukazují, že izometrie α je lineární homogenní transformací v každé z proměnných x^i. Tyto izometrie se nazývají *Lorentzovými transformacemi* a jejich grupa *úplnou Lorentzovou grupou.* Vlastnosti lorentzovy grupy jsou velmi dobře známy; zmiňujeme se o nich především kvůli lepšímu pochopení významu a struktury podmínek typu (6.21).

[3] Eisenhart, hl.VI

6.4 Tenzor křivosti, Ricciho tenzor, skalární křivost

V tomto odstavci a také často v dalším textu budeme označovat tenzory pomocí složek vůči nějakým lokálním souřadnicím, které nebude třeba specifikovat (viz kapitola 2, pozn.6, kapitola 3, pozn.9). Vyhneme se tím zavádění nových symbolů.

Uvažujme tenzor křivosti R^i_{jkl} Levi–Civitovy konexe variety $\mathcal{X}$ s metrickým polem g_{ij} (viz (5.12),(6.17)). Tomuto tenzoru přiřadíme kovariantní tenzorové pole čtvrtého řádu R_{ijkl} pomocí operace snižování indexů (kapitola 2.6).

$$R_{ijkl} = g_{im} R^m_{jkl}. \tag{6.27}$$

Platí také inverzní formule

$$R^m_{jkl} = g^{mi} R_{ijkl}. \tag{6.28}$$

O tenzoru R_{ijkl} budeme proto také mluvit jako o *tenzoru křivosti.* Přímým výpočtem snadno prověříme identity

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= R_{klij}, \\ R_{ijkl} &= -R_{jikl} = -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} &+ R_{iljk} + R_{iklj} = 0, \end{aligned} \tag{6.29}$$

které ukazují, že v obecném případě jsou některé ze složek tenzoru křivosti stejné. První ze vztahů (6.29) ukazuje, že tenzor křivosti obsahuje $\frac{1}{2}k(k+1)$ různých složek, kde k koresponduje s počtem dvojic indexů i, j (resp. k, l), pro které jsou všechny hodnoty R_{ijkl} při pevném k, l (resp. i, j) různé; vzhledem k antisymetričnosti R_{ijkl} (druhá z podmínek (6.29)) máme $k = \frac{1}{2}n(n-1)$. Pro výpočet různých složek tenzoru křivosti jsme zatím nevyužili třetí ze vztahů (6.29). Snadno lze ukázat, že výraz na levé straně třetí identity (6.29) je symetrický ve všech indexech, takže dává celkem $\binom{n}{4}$ relací. Celkově tedy dostáváme pro počet obecně různých složek tenzoru křivosti číslo

$$N = \frac{1}{2}k(k+1) - \binom{n}{4} = \frac{1}{12}n^2(n^2-1) \tag{6.30}$$

(porov. s [4]).

Kromě algebraických identit (6.29) splňují složky tenzoru křivosti ještě tzv. *Bianchiho identity*

$$R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jmk;l} = 0, \tag{6.31}$$

které lze přepsat, vzhledem k tomu, že se složky metrického tenzoru chovají při kovariantním derivování jako konstanty (viz (6.20)), také ve tvaru

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0. \tag{6.32}$$

[4] Eisenhart, 21

Ricciho tenzorem nazýváme tenzorové pole typu $(0,2)$ o složkách

$$R_{ij} = R^k_{ijk} \tag{6.33}$$

vznikající kontrakcí C^1_3 tenzoru křivosti (viz kapitola 2.5). Pomocí složek Levi–Civitovy konexe

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{km}\Gamma^m_{li} - \Gamma^l_{lm}\Gamma^m_{ki}. \tag{6.34}$$

Evidentně platí

$$R_{ij} = R_{ji}. \tag{6.35}$$

Skalární křivostí na $\mathcal{X}$ pak nazýváme kontrakci tenzoru $R^i_j = g^{im}R_{mj}$, tedy funkci na $\mathcal{X}$, danou v uvažovaných lokálních souřadnicích jako

$$R = g^{ij}R_{ij}. \tag{6.36}$$

Tenzor křivosti spolu s Ricciho tenzorem a skalární křivostí v sobě obsahují řadu informací o geometrické struktuře variety. Některé z těchto informací se získávají vyšetřováním tzv. *Riemannovy křivosti* nebo *křivosti v dvojsměru*, kterou přiřazujeme každému bodu $x \in \mathcal{X}$ a každé dvojici lineárně nezávislých vektorů $\xi, \lambda \in T_x\mathcal{X}$ vztahem

$$K = \frac{R_{ijkl}\xi^i\lambda^j\xi^k\lambda^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\xi^i\lambda^j\xi^k\lambda^l} \tag{6.37}$$

(součty v čitateli i jmenovateli). Je možno ukázat [5], že číslo K je ve skutečnosti funkcí dvojrozměrného prostoru v $T_x\mathcal{X}$, tedy „dvojsměru na $\mathcal{X}$“ (porov. s definicí tečného vektoru v kapitole 3.1), tedy že nezávisí na volbě lineárně nezávislých vektorů ξ, λ z pevně zvoleného dvojrozměrného podprostoru v $T_x\mathcal{X}$. V případě, kdy K nezávisí na výběru bodu $x \in \mathcal{X}$ a dvojice lineárně nezávislých vektorů $\xi, \lambda \in T_x\mathcal{X}$, tedy na „dvojsměru“ v bodě x, evidentně platí

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{6.38}$$

a říkáme, že varieta $\mathcal{X}$ je *prostorem s konstantní křivostí.*

V případě dvojrozměrné variety $\mathcal{X}$ existuje jednoduchá souvislost mezi Riemannovou křivostí (6.37) a skalární křivostí (6.36). Tenzor křivosti má v tomto případě pouze jedinou nezávislou složku, např. R_{1212}. Zvolíme–li $\xi^1 = 1$, $\xi^2 = 0$, $\lambda^1 = 0$, $\lambda^2 = 1$, dostaneme

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{R_{1212}}{\det(g_{kl})}. \tag{6.39}$$

Skalární křivost je v uvažovaném případě rovna

$$R = g^{ij}g^{kl}R_{kijl} = 2R_{1212}\det(g^{il}), \tag{6.40}$$

[5] Bishop, Eisenhart

takže

$$R = 2K. \tag{6.41}$$

Poznámky a úlohy

10. Někteří autoři [6] pracují s definicí Ricciho tenzoru, lišící se od naší definice znaménkem.

11. Na každé podvarietě riemannovské variety lze definovat Riemannovu metriku způsobem, analogickým s případem prostorupodobných podvariet hyperbolické variety (kapitola 6.1). Říkáme, že metrický tenzor *indukuje* na podvarietě Riemannovu metriku.

12. Snadno lze ukázat, že eukleidovská metrika variety R^3 má ve sférických souřadnicích (kapitola 3, pozn. 4) tvar

$$g = dr \otimes dr + r^2 (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi). \tag{6.42}$$

Uvažujme sféru S^2_a o poloměru a se středem v počátku prostoru $\mathcal{R}^3$ danou rovnicí $r = a$ (porov. s kapitolou 1, pozn. 8,9). Indukovaná metrika na této sféře má v souřadnicích φ, ϑ tvar

$$g = a^2 (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2 \vartheta d\varphi \otimes d\varphi). \tag{6.43}$$

To dává pro složky metrického tenzoru

$$\begin{array}{lll} g_{11} = a^2 \sin^2 \vartheta, & g_{12} = 0, & g_{22} = a^2, \\ g^{11} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta}, & g^{12} = 0, & g^{22} = \frac{1}{a^2} \end{array} \tag{6.44}$$

a pro Christoffelovy symboly

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = 0, & \Gamma^1_{12} = \cot \vartheta, & \Gamma^1_{22} = 0, \\ \Gamma^2_{11} = -\sin \vartheta \cos \vartheta, & \Gamma^2_{12} = 0, & \Gamma^2_{22} = 0. \end{array} \tag{6.45}$$

Tenzor křivosti má jedinou nezávislou složku, např.

$$R_{1212} = a^2 \sin^2 \vartheta. \tag{6.46}$$

Odtud dostáváme pro složky Ricciho tenzoru a pro skalární křivost uvažovaného riemannovského prostoru

$$\begin{array}{lll} R_{11} = sin^2 \vartheta, & R_{12} = 0, & R_{22} = 1, \\ R = \frac{2}{a^2}. & & \end{array} \tag{6.47}$$

Riemannova křivost je podle (6.41) rovna $\frac{1}{a^2}$.

13. Pozn. 12 může být chápána jako ilustrace geometrického významu tenzoru křivosti, resp. Riemannovy křivosti. Podotýkáme, že pojem Riemannovy křivosti byl zaveden zobecněním tzv. *Gaussovy křivosti*, definované pro dvojrozměrné plochy v $\mathcal{R}^3$ pomocí tzv. hlavních poloměrů křivosti ρ_1, ρ_2 vztahem $K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$; Riemannova křivost v případě dvojrozměrných variet splývá s Gaussovou křivostí. Čtenáře, který se hlouběji zajímá o geometrickou stránku věci, odkazujeme na literaturu [7].

[6] Landau

[7] Gromoll, Eisenhart

14. Podobně jako v pozn. 13 lze určit metriku trojrozměrné sféry S^3_a poloměru a se středem v počátku variety $\mathcal{R}^4$. Eukleidovská metrika variety $\mathcal{R}^4$, zapsaná ve standardních souřadnicích,

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i, \tag{6.48}$$

může být převedena ke čtyřrozměrným sférickým souřadnicím [8] r, φ, ϑ, χ vztahy

$$\begin{aligned} x^1 &= r\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi, \\ x^3 &= r\sin\chi\cos\vartheta, \quad x^4 = r\cos\chi. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Z rovnice sféry S^3_a v $\mathcal{R}^4$, $r = a$ lze pro indukovanou metriku $\tilde{g}$ na S^3_a odvodit vztah

$$\tilde{g} = a^2(d\chi\otimes d\chi + \sin^2\chi(\sin^2 d\varphi\otimes d\varphi + d\vartheta\otimes d\vartheta)), \tag{6.50}$$

To vede na nezávislé složky metrického tenzoru v souřadnicích φ, ϑ, χ

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2\sin^2\chi\sin^2\vartheta, \quad g_{12} = g_{13} = 0, \\ g_{22} &= a^2\sin^2\chi, \quad g_{23} = 0, \quad g_{33} = a^2 \end{aligned} \tag{6.51}$$

a na složky Levi-Civitovy konexe

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = 0, \quad \Gamma^1_{12} = \cot\vartheta, \quad \Gamma^1_{13} = \cot\chi, \quad \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^1_{33} = 0, \\ &\Gamma^2_{11} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^2_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{23} = \cot\chi, \quad \Gamma^2_{33} = 0, \\ &\Gamma^3_{11} = -\sin^2\vartheta\sin\chi\cos\vartheta, \quad \Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{13} = 0, \quad \Gamma^3_{22} = -\sin\chi\cos\chi, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{33} = 0. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Položme v uvažových souřadnicích $\xi = (1,0,0)$, tedy $\xi = \frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\lambda = (0,1,0)$ a spočtěme Riemannovu křivost $K = K(\xi,\lambda)$ ve dvojsměru, určeném vektory ξ, λ. Ze vztahu

$$R_{1212} = a^2\sin^4\chi\sin^2\vartheta \tag{6.53}$$

a z (6.37) snadno odvodíme, že

$$K(\xi,\lambda) = \frac{1}{a^2}. \tag{6.54}$$

Ukažte, že pro další lineárně nezávislý vektor $\eta = (0,0,1)$ platí

$$K(\xi,\eta) = K(\eta,\lambda) = K(\xi,\lambda), \tag{6.55}$$

takže sféra S^3_a je prostorem s konstantní křivostí.

15. Složky Levi–Civitovy konexe prostoročasu speciální teorie relativity jsou ve standardních souřadnicích prostoru $\mathcal{R}^4$ rovny nule, takže Levi–Civitova konexe je v tomto případě rovna kanonické lineární konexi prostoru $\mathcal{R}^4$ (viz kapitola 5, pozn.4). Tenzor křivosti je identicky roven nule, Riemannova křivost je tedy konstantní a rovna nule.

16. Vyšetřete rovnice geodetiky pro sféru S^2_a s metrikou (6.43).

[8] Landau, Møller

6.5 Integrování funkcí na varietě s metrickým polem

Pojem integrálu reálné funkce, definované na eukleidovském prostoru $\mathcal{R}^n$, jak jej známe z klasického integrálního počtu, je založen na existenci globálního souřadnicového systému na $\mathcal{R}^n$, ve kterém se dají provádět všechny úvahy; v případě potřeby nebo plyne–li z toho nějaká početní výhoda lze přejít transformací souřadnic k libovolnému jinému lokálnímu souřadnicovému systému. Chceme–li ovšem integrovat funkce, definované na „netriviální“ varietě, nedifeomorfní s $\mathcal{R}^n$, musíme odstranit těžkosti, spojené s neexistencí globálního souřadnicového systému. K tomu je třeba zavést některé nové topologické pojmy (porov. s kapitolami 1.4 a 1.5).

Uvažujme libovolnou n-rozměrnou varietu $\mathcal{X}$ a připomeňme si, že je topologickým prostorem (viz kapitola 1.3). *Otevřeným pokrytím* podmnožiny $\mathcal{Y}$ variety $\mathcal{X}$ nazveme každý systém $\mathcal{U}_\iota$, $\iota \in \mathcal{I}$ otevřených množin takový, že $\bigcup_\iota \mathcal{U}_\iota \supset \mathcal{X}$. Každý atlas variety zadává současně její otevřené pokrytí. Podmnožina $\mathcal{Y}$ se nazývá kompaktní, jestliže každé její otevřené pokrytí $\mathcal{U}_\iota$ obsahuje *konečné podpokrytí*, tj. takový konečný podsystém $\mathcal{U}_{\iota_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\iota_k}$, že $\mathcal{U}_{\iota_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{\iota_k} \supset \mathcal{X}$. Množina $\mathcal{Y}$ se nazývá *uzavřenou*, je–li její doplněk $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} | x \notin \mathcal{Y}\}$ otevřenou množinou. Definice dovoluje rozhodnout, které podmnožiny variety $\mathcal{X}$ jsou uzavřené.

Nechť f je reálná funkce na $\mathcal{X}$. Nejmenší uzavřená množina, vně které funkce f nabývá nulových hodnot, se nazývá *nosičem* funkce f a označuje se $supp\, f$.

Pomocí zavedených pojmů lze zformulovat jednu ze základních vět diferenciální topologie, kterou použijeme v definici integrálu na libovolné varietě s metrickým polem.

Věta o rozkladu jednotky. Ke každému atlasu $\{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota)\}$, $\iota \in \mathcal{I}$, na varietě $\mathcal{X}$ existuje takový systém reálných diferencovatelných funkcí f_κ, $\kappa \in K$, tzv. *rozklad jednotky*, asociovaný s daným atlasem, že

1. každá z množin $supp\, f_\kappa$ je kompaktní a leží v některém ze souřadnicových okolí daného atlasu,

2. ke každému bodu $x \in \mathcal{X}$ existuje jeho okolí, které má neprázdný průnik pouze s konečným počtem množin $supp\, f_\kappa$,

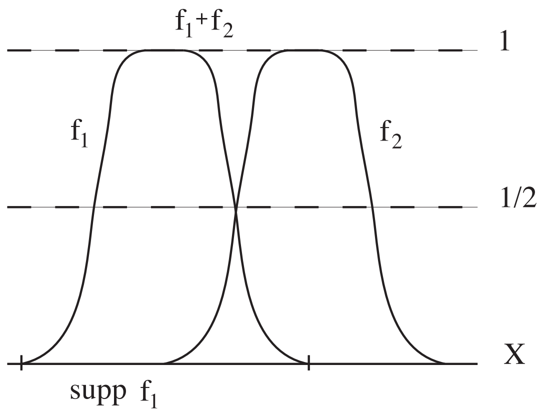
3. pro každé $\kappa \in K$ platí nerovnost $0 \le f_\kappa(x) \le 1$ pro všechna $x \in \mathcal{X}$ a
$$\sum_\kappa f_\kappa(x) = 1. \tag{6.56}$$

Všimněme si, že součet (6.56) je vzhledem k tvrzení 2. v každém bodě x konečný. Z 2. také plyne, že $\bigcup_\kappa supp\, f_\kappa = \mathcal{X}$.

Větu o rozkladu jednotky zde ovšem nebudeme dokazovat [9]. Doporučujeme čtenáři, aby se pro její pochopení vrátil v nutné míře k základním topologickým

[9] Choquet, Sternberg

pojmům, které jsme již zavedli dříve (viz např. kapitola 1, pozn.3). Instruktivní obrázek, charakterizující popsaný rozklad (6.56) funkce na $\mathcal{X}$, rovné jedné v každém bodě $x \in \mathcal{X}$, možno nakreslit snad pouze v případě, kdy za „model" variety $\mathcal{X}$ vezmeme přímku nebo úsečku (viz obr.18).



Obr. 18. Rozklad jednotky.

Připomeňme si nyní klasickou formuli pro *záměnu proměnných* v určitém integrálu [10]. Uvažujme integrační obor $\mathcal{C}$ v $\mathcal{R}^n$ a vzájemně jednoznačně diferencovatelné zobrazení $\zeta : \mathcal{C} \to \mathcal{R}^n$. Pak pro libovolnou spojitou funkci $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ platí

$$\int\limits_{\zeta(\mathcal{C})} f = \int\limits_{\mathcal{C}} (f \circ \zeta)|\mathcal{J}(\zeta)|, \tag{6.57}$$

kde $|\mathcal{J}(\zeta)|$ označuje absolutní hodnotu Jakobiánu zobrazení ζ (viz (1.1)), uvažovaného jako funkce bodu oblasti $\mathcal{C}$.

Po těhto přípravných úvahách můžeme přejít k teorii integrálu. Předpokládejme, že na varietě $\mathcal{X}$ je dáno metrické pole g. Definujme integrál funkce $\mathcal{X} \to \mathcal{R}$ přes libovolnou kompaktní podmnožinu $\mathcal{Y}$ variety $\mathcal{X}$, o které budeme nejdříve předpokládat, že celá leží v jistém souřadnicovém okolí $\mathcal{U}$ s lokálními souřadnicemi $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Na $\mathcal{U}$ je metrické pole g reprezentováno funkcemi g_{ij} proměnných $x^1, \ldots, x^n$,

$$\begin{aligned} &g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \\ &\det(g_{ij}) \neq 0. \end{aligned} \tag{6.58}$$

Na $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{R}^n$ dostáváme reálnou funkci $f\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \mathcal{R}$, kterou můžeme integrovat přes množinu $\varphi(\mathcal{Y})$ v Riemannově smyslu. *Integrálem* funkce f *přes množinu* $\mathcal{Y}$ nazveme číslo

$$\int\limits_{\mathcal{Y}} f = \int\limits_{\varphi(\mathcal{Y})} (f\varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n) \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \ldots dx^n. \tag{6.59}$$

[10] Spivak

Zvolíme–li na $\mathcal{U}$ jiné lokální souřadnice $\psi = (y^1, \dots, y^n)$, pak

$$\begin{aligned} &\tilde{g} = \tilde{g_{ij}} dy^i \otimes dy^j, \\ &\tilde{g_{ij}} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} g_{kl}, \\ &\det(\tilde{g_{ij}}) = \left(\det\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right)\right)^2 \det(g_{ij}). \end{aligned} \tag{6.60}$$

Zde $det(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}) = \mathcal{J}_{\psi(x)}(\varphi\psi^{-1})$ je Jacobián zobrazení $\varphi\psi^{-1}$ (viz (1.1)), takže formule (6.57) pro záměnu proměnných vede na vztah

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\psi(\mathcal{Y})} (f\psi^{-1})(y^1, \dots, y^n) \sqrt{|\det(\tilde{g_{ij}})|} dy^1 \dots dy^n = \\ &= \int\limits_{\varphi(\mathcal{Y})} (f\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) \sqrt{\left(\det\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^l}\right)\right)^2 |\det(g_{ij})|} \sqrt{\left(\det\left(\frac{\partial x^m}{\partial y^k}\right)\right)^2} dx^1 \dots dx^n = \\ &= \int\limits_{\varphi(\mathcal{Y})} (f\varphi^{-1})(x^1, \dots, x^n) \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \dots dx^n. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Vidíme, že číslo (**??**) je definováno nezávisle na volbě lokálního souřadnicového systému, s pomocí kterého je určeno, tedy že integrál (**??**) je *invariantní* vůči záměnám souřadnic.

Nyní rozšíříme integrování funkcí na „větší“ oblasti, které nemusí ležet v jediném souřadnicovém okolí. Nechť $\mathcal{Y}$ je libovolná kompaktní podmnožina v $\mathcal{X}$. Vybereme na $\mathcal{X}$ atlas $\{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota)\}$, $\iota \in \mathcal{I}$, a s nimi asociovaný rozklad jednotky f_κ, $\kappa \in \mathcal{K}$. Víme, že ke každému bodu $y \in \mathcal{Y}$ existuje takové okolí $\mathcal{U}_y$ obsahující $\mathcal{Y}$, že pouze konečný počet množin $\mathcal{U}_\mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa$ je neprázdný (viz věta o rozkladu jednotky). Zvolme taková okolí $\mathcal{U}_y$ pro každé $y \in \mathcal{Y}$. Dostáváme otevřené pokrytí množiny $\mathcal{Y}$, které má vzhledem ke kompaktnosti $\mathcal{Y}$ konečné podpokrytí $\mathcal{U}_{y_1}, \dots, \mathcal{U}_{y_k}$. Pouze konečný počet množin $\mathcal{U}_{y_1} \cap supp\, f_\kappa, \dots, \mathcal{U}_{y_k} \cap supp\, f_\kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$, je neprázdných, takže pouze konečný počet množin $\mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa$ je neprázdných. *Integrálem funkce* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ *přes množinu* $\mathcal{Y}$ nyní nazýváme číslo

$$\int\limits_{\mathcal{Y}} f = \sum_\kappa \int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot f_\kappa. \tag{6.62}$$

Zde $\mathcal{Y}_\kappa = \mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa$ a součet integrálů na pravé straně, definované vztahem (6.59), je ve skutečnosti konečný. Je ovšem třeba dokázat, že integrál (6.62) nezávisí na volbě atlasu a s ním asociovaného rozkladu jednotky. Nechť $\{(\mathcal{V}_\lambda, y_\lambda)\}$ je jiný atlas a $\bar{f}_\kappa$ s ním asociovaný rozklad jednotky. Vzhledem k identitě (6.56) pro každé $\kappa \in \mathcal{K}$ platí

$$f_\kappa = f_\kappa \cdot 1 = f_\kappa \cdot \sum_\nu \bar{f}_\nu = \sum_\nu f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu, \tag{6.63}$$

takže

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot f_\kappa = \int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot \left(\sum_\nu f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu\right) = \sum_\nu \int\limits_{\mathcal{Y}_{\kappa\nu}} f \cdot f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu, \tag{6.64}$$

kde $\mathcal{Y}_{\kappa\nu} = \mathcal{Y} \cap supp\, f_\kappa \cap supp\, \bar{f}_\nu$. V této formuli poslední rovnost vyplývá z faktu, že integrál $\int_{\mathcal{Y}_\kappa} f \left(\sum_\nu f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu\right)$ je uvažován v pevném souřadnicovém okolí podobně jako (6.59). Celkově

$$\sum_\kappa \int\limits_{\mathcal{Y}_\kappa} f \cdot f_\kappa = \sum_\kappa \sum_\nu \int\limits_{\mathcal{Y}_{\kappa\nu}} f \cdot f_\kappa \cdot \bar{f}_\nu. \tag{6.65}$$

Ke stejnému výrazu bychom dospěli, kdybychom vycházeli z $\sum\limits_\nu \int\limits_{\mathcal{Y}_\nu} f \cdot \bar{f}_\nu$ a pak použili rozkladu jednotky f_κ. Tím je ukázáno, že integrál (6.62) je definován nezávisle na lokálních souřadnicích a na asociovaném rozkladu jednotky.

6.6 Lokální souřadnicové systémy na prostoročase

Jedním ze základních axionů OTR je, že lokální souřadnicové systémy na prostoročasu jsou fyzikání povahy v tom smyslu, že to jsou „pozorovatelé“ či „měřící přístroje“, určující časové a prostorové relace mezi fyzikálními událostmi. Jinými slovy to znamená, že každá volba přístrojů, měřících naše „smyslové“ prostorové a časové relace je vlastně volbou lokálního souřadnicového systému na prostoročasu.

Přitom je ovšem třeba mít na zřeteli, že při dané interpretaci lokálních souřadnicových systému resp. fyzikálních vztažných soustav dochází k zanedbání interakce mezi „pozorovatelem“ tj. přístroji a zkoumaným fyzikálním systémem, tedy že se předpokládá, že měření nenarušuje podstatně fyzikální procesy; obráceně se předpokládá, že také pozorovatel není narušován těmito procesy. Fyzikální oprávnění těchto předpokladů spočívá v tom, že všechna reálná měření jsou uskutečňována světelnýmí sygnály.

Se speciální volbou variety jsou často svázany speciální souřadnicové systémy. Tak např. na varietě $\mathcal{R}$ máme tzv. přirozené souřadnice (viz kapitola 1, pozn. 5), se sférou jsou svázány sférické souřadnice (viz např. kapitola 1, pozn. 10). Také v obecném případě variety s metrickým polem lze zavést jisté typy lokálních souřadnicových systémů, které lze použít pro usnadnění některých výpočtů. Zavedeme si některé z nich.