# Integrování na varietách – cvičení

TOPOLOGIE, HOMEOMORFISMY, VARIETY

1. Dokažte, že axiomy:
$i) \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
$ii) \rho(y,x) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$
jsou ekvivalentní axiomům MET1,2,3 metriky (pozitivní definitnost, symetrie, trojúhelníková nerovnost).

2. Uveďte příklad různých metrik na $\mathcal{R}^2$, které indukují tutéž topologii (např. přirozenou).

3. Dokažte: V Hausdorffově prostoru je každá konečná množina uzavřená.

4. Dokažte: Topologický prostor $\mathcal{X}$ je Hausdorffův právě tehdy, když diagonála $\Delta$ je uzavřená množina v $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$.

5. Uveďte příklad úplného a neúplného metrického prostoru, které jsou homeomorfní.

6. Dokažte, že kompaktnost (resp. souvislost, Hausdorffovost, separabilita, metrizovatelnost …) jsou topologickými invarianty. A co takhle typ spočetnosti?

7. Uveďte příklad topologického prostoru, který není metrizovatelný.

8. Uveďte příklad topologického Hausdorffova prostoru, který není metrizovatelný.

9. Uveďte příklad topologického Hausdoffova prostoru, prvního typu spočetnosti, který není metrizovatelný.

10. Jsou následující topologické prostory homeomorfní (uvažujeme vždy s indukovanou přirozenou topologií)? Dokažte.

a) Otevřený kruh a $\mathcal{R}^2$
b) Otevřený čtverec a$\mathcal{R}^2$
c) $S^1$ a okraj čtverce
d) $\mathcal{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ a válec $S^1 \times \mathcal{R}$
e) $[a,b]$ a $(a,b)$ v $\mathcal{R}$
f) $[a,b]$ a $[a,b)$ v $\mathcal{R}$
g) $S^2$ a $\mathcal{R}^2$
h) $S^1$ a $(0,1]$
i) $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}^n, n > 1$
j) $\mathcal{R}$ a $S^1$
k) $(a,b)$ a $(a,b]$ v $\mathcal{R}$
l) $[a,b]$ a $S^1$
m)-z) vymyslete si další

11. Nechť $D^n = \{\vec{v} \in \mathcal{R}^n \mid \|\vec{v}\| \leq 1\}$ – jednotková $n$-koule s okrajem $\partial D^n = S^{n-1}$. Dokažte, že $D^n/\sim$ (kde $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee x, y \in \partial D^n$) je homeomorfní s $S^n$.

12. $S^n = \{\vec{v} \in \mathcal{R}^{n+1} \mid \|\vec{v}\| = 1\}$. Dokažte, že $S^n/\sim$ (kde $\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$) je homeomorfní s reálnou projektivní rovinou $\mathcal{R}P^n$ (množina všech přímek v $\mathcal{R}^{n+1}$).

13. Lze oslabit definici topologické variety? Je možné na základě lokální homeomorfnosti s $\mathcal{R}^n$ dokázat Hausdorffovost nebo spočetnost báze topologie? Pokud ano, dokažte, v opačném případě uveďte protipříklady.

14. Dokažte, že obecná lineární grupa $GL(n, \mathcal{R})$ (regulární čtvercové matice) je hladká varieta. Určete její dimenzi, jakožto vektorového $\mathcal{R}$-prostoru.

15. Dokažte, že $Sl(n, \mathcal{R})$ (matice s jednotkovým determinatem) je její hladká podvarieta, určete dimenzi.

16. Příklady kompaktních souvislých variet dimenze 1 a 2.

17. Dokažte: na kompaktní varietě neexistuje globální souřadnicový

systém.

18. Nalezněte atlas na $\mathcal{S}^1$. Nalezněte atlas jiný atlas a prověřte, zda je kompatibilní s tím prvním. Je dvojice $(\mathcal{S}^1, \varphi : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{R})$, kde $\varphi^{-1}$ dáno vztahem $x = \cos t, y = \sin t$ souřadnicovým systémem na $\mathcal{S}^1$.

19. Nalezněte různé atlasy na $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3$. Prověřte, jsou-li kompatibilní. Je systém sférických souřadnic $(\mathcal{S}^2, \varphi)$, kde $\varphi^{-1} : x = \cos\phi \sin\theta, y = \sin\phi \sin\theta, z = \cos\theta$ souřadnicovým systémem na $\mathcal{S}^2$?

20. Nechť $M_{m,n}, n > m$ je množina všech matic $m \times n$ nad $\mathcal{R}$ maximální hodnosti. Pak faktormnožina $G_{m,n} = M_{m,n}/GL(n, \mathcal{R})$ podle pravé akce obecné lineární grupy je množina všech $m$-rozměrných podprostorů vektorového prostoru $\mathcal{R}^n$. Dokažte. Nalezněte atlas na této množině a určete její dimenzi (tato množina se nazývá Grassmanián prvního řádu, a pro $m = 1$ je to totéž jako reálná projektivní rovina $P^{n-1}$.

21. Nechť $f$ je zobrazení dvou topologických prostorů, následující podmínky jsou ekvivalentní:
a) $f$ je spojité
b) vzor každé otevřené množiny je otevřená množina
c) vzor každé uzavřené množiny je uzavřená množina
d)$f(cl(A)) = cl(f(A))$
Dokažte.

22. $f$ je homeomorfismus právě tehdy, když je to spojitá otevřená bijekce. Dokažte.

23. Je diskrétní topologický prostor metrizovatelný? Dokažte.

24. Ukažte, že elipsa je difeomorfní s kružnicí.

25. Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ je varieta v $\mathcal{R}^n$, resp. v $\mathcal{R}^m$, $\mathcal{AT}_\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{AT}_\mathcal{Y}$ atlasy na $\mathcal{X}$ resp. $\mathcal{Y}$. Označme $\mathcal{AT}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \{\mathcal{U} \times \mathcal{V}, \varphi \times \psi \mid (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT}_\mathcal{X}, (\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{AT}_\mathcal{Y}\}$, kde $(\varphi \times \psi)(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Dokažte, že $\mathcal{AT}_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ je atlas na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ v $\mathcal{R}^{n+m}$.

26. Nechť $\mathcal{X} = \mathcal{R}^2 \setminus \{0\}$, ukažte, že systém polárních souřadnic je souřadnicovým systémem na $\mathcal{X}$. Platí to i pro $\mathcal{X} = \mathcal{R}^2$?

27. Určete, které z níže uvedených podprostorů Euklidova prostoru jsou topologické variety s okrajem. Určete jejich dimenzi a okraj.
a) Otevřená množina v $\mathcal{R}^n$
b) Uzavřená množina v $\mathcal{R}^n$
c) $\mathcal{X} = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 2\}$
d) $Q^n \subset \mathcal{R}^n$
e) uzavřený jednotkový kruh
f) $[0,1]^n \subset \mathcal{R}^n$
g) $fr[0,1]^2 \subset \mathcal{R}^n$
h) reálná projektivní rovina
i) $\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 \mid x, y > 0\}, x^2 + y^2 = 1\}$
j) Möbiova páska
k) Klainova láhev
l) toroid
m) válec
n) sféra

Dále příklady 1-49 ze str. 237–269 skript Krupka, Musilová, Integrální počet na euklidových prostorech a diferencovatelných varietách.

TENZORY

1. Vektorové prostory $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ nad polem $\mathcal{K}$ jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi. Dokažte.

2. Nechť $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je lineární, pak $\mathrm{Im}(f)$ je podprostorem ve $\mathcal{W}$, $\mathrm{Ker}(f)$ je podprostorem ve $\mathcal{V}$ a platí $\dim\mathrm{Im}(f) + \dim\mathrm{Ker}(f) = \dim\mathcal{V}$. Dokažte.

3. Nalezněte bázi duální k bázi $e_1 = (2,-2,0), e_2 = (1,2,3), e_3 = (0,0,-1)$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Nalezněte složky lineární formy $\omega$ v této bázi, je-li $\omega(x) = x^1 + x^2 - 2x^3$.

4. Buď $(e_i)$ báze ve $\mathcal{V}$, $(e^i)$ báze ve $\mathcal{V}^*$, k ní duální, $\dim\mathcal{V} = n$. Vypočtěte:
a)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
b)$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
c)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$
d)$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
e)$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$
f)$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
g)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
h)$\omega^1 \otimes \ldots \otimes \omega^k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$

5. Ukažte, že vztah $\xi \otimes \eta = \xi^i \eta^\alpha e_i \otimes f_\alpha$ je definován nezávisle navolbě báze.

6. Přepište následující vztahy do složek:
$(\xi + \eta) \otimes \lambda = \xi \otimes \lambda + \eta \otimes \lambda$
$\xi \otimes (\eta + \lambda) = \xi \otimes \eta + \xi \otimes \lambda$
$(c_1\xi) \otimes (c_2\eta) = c_1 c_2 \xi \otimes \eta$
Dokažte.

7. Určete složky tenzoru $\Delta = \delta^i_j f_i \otimes f^j$ vůči bázi $e_i \otimes e^j$, matice přechodu mezi bázemi je $A$.

8. Je operace tenzorového součinu tenzorů komutativní? Dokažte.

9. Lze každý tenzor jednoznačně vyjádřit ve tvaru součtu symetrického a antisymetrického?

10. Dokažte větu o normálním tvaru bilineární formy (Krupka, str.42).

11. Dokažte, že relace $\sim$ definovaná na množině křivek: $(x_1, \zeta) \sim (x_2, \chi) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \frac{dx^i\zeta}{dt}|_0 = \frac{dx^i\chi}{dt}|_0, i \in \{1, \ldots, n\}$ je relací ekvivalence.

12. Vymyslete si 10 příkladů na antisymetrizaci, symetrizaci (v horních i dolních indexech, úplnou i po dvou), úžení, kontrakci vekto-

rovým argumentem (konkrétně v souřadnicích).

13. Určete dimenzi prostoru (vše nad $\mathcal{R}^n$):
a) úplně symetrických $k$-tenzorů
b) úplně antisymetrických $k$-tenzorů
c) symetrických tenzorů ve dvou indexech
d) antisymetrických tenzorů ve dvou indexech
e)tenzorů typu $(1,2)$ symetrických ve spodních dvou indexech (tenzor torze)
f) tenzorů typu $(0,4)$ antisymetrických v prvních dvou indexech, v posledních dvou indexech a symetrických vůči záměně první a druhé dvojice indexů.
g) stejně jako f), ale navíc splňují rovnost $R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0$ (tenzor křivosti).

14. Sestavte úplně symetrický tenzor čtvrtého řádu, jehož všechny složky jsou invariantní vůči transformaci souřadni.

Dále příklady ze cvičení týkajících se tenzorů a forem ze skript Krupka, Musilová, Integrální počet na euklidových prostorech a diferencovatelných varietách.

LIEOVY DERIVACE

1. Určete tvar integrálních křivek a jednoparametrickou grupu transformací generovanou vektorovým polem $\xi$.
a)$\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
b)$\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
c) $\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$
d) $\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
e) $\xi = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + 2(x^1)^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
f) $\xi = \frac{\partial}{\partial x^1}$
g)$\xi = k_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + k_2 \frac{\partial}{\partial x^2}$
h) $\xi = \frac{\partial}{\partial x^1} + \cos x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}$

2. Definujme Lieovu závorku $[\xi,\eta](f)=\xi(\eta(f))-\eta(\xi(f))$. Odvoďte vyjádření v souřadnicích.

3. Dokažte Jacobiho identitu $[\xi,[\eta,\lambda]]=[[\xi,\eta],\lambda]+[\eta,[\xi,\lambda]]$, dokažte bilinearitu a uzavřenost, antikomutativitu operace Lieovy zavorky.

4. Odvoďte souřadnicové vyjádření pro Lieovu derivaci funkce, vektorového pole, lineární formy.

5. Dokažte: $\partial_\xi f=\xi(f)$ pro funkce
$\partial_\xi \eta=[\xi,\eta]$ pro vektorová pole.

6. Dokažte (značení pochopíte z kontextu):
a) $\partial_\xi(f\omega)=(\partial_\xi f)\omega+f\partial_\xi\omega$
b) $\partial_\xi(\omega(\eta))=(\partial_\xi\omega)(\eta)+\omega(\partial_\xi\eta)$
c) $\partial_\xi(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}\partial_\xi f$
d) $i_{[\xi,\eta]}=\partial_\xi i_\eta-i_\eta\partial_\xi$
e) $\partial_{f\xi}\omega=f\partial_\xi\omega+\mathrm{d}f\wedge i_\xi\omega$
f) $\partial_\xi(\lambda\wedge\varrho)=\partial_\xi\lambda\wedge\varrho+\lambda\wedge\partial_\xi\varrho$
g) $i_{f\xi}=fi_\xi$
h) $i_\xi(f\omega)=fi_\xi\omega$

j) $\partial_\xi(\tau\otimes\chi)=\partial_\xi\tau\otimes\chi+\tau\otimes\partial_\xi\chi$
k) $\partial_{[\xi,\zeta]}\tau=\partial_\xi\partial_\zeta\tau-\partial_\zeta\partial_\xi\tau$
l) $\partial_{f\xi}\zeta=[f\xi,\zeta]=f[\xi,\zeta]-(\partial_\zeta f)\xi$
m) $\partial_\xi\varrho=\mathrm{d}\mathrm{i}_\xi\varrho+\mathrm{i}_\xi\mathrm{d}\varrho$
n) $\mathrm{i}_\xi(\varrho\wedge\theta)=\mathrm{i}_\xi\varrho\wedge\theta+(-1)^q\varrho\wedge\mathrm{i}_\xi\theta$
o) $\partial_\xi\mathrm{i}_\xi\varrho=\mathrm{i}_\xi\partial_\xi\varrho$
p) $\xi\,\omega(\zeta)-\zeta\,\omega(\xi)-\omega([\xi,\zeta])=\mathrm{d}\omega(\xi,\zeta)$ pro $p=0$, $q=1$

7. Dokažte, že metrika $g=g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$ je invariantní vůči jednoparametrické grupě generované polem $\xi$ právě tehdy, splňuje-li Killingovy rovnice.

8. Vymyslete si 5 konkrétních příkladů na výpočet Lieových derivací (vektorových a tenzorových polí) v souřadnicích a ty spočítejte.

METRIKA, KONEXE

1. Vyjádřete indukovanou metriku na sféře (jako podvarietě $\mathcal{R}^3$), na torusu, na válci.

2. Uveďte příklad, kdy na podvarietě pseudoriemannovy variety nelze indukovat metriku.

3. Odvoďte transformační vztah pro koeficienty $\Gamma^k_{ij}$ lineární konexe. Pro $\mathcal{R}^2$ je odvoďte také v polárních souřadnicích.

4. Dokažte, že $T$ a$R$ jsou tenzorová pole (odvozením transformačních vztahů).

5. Vyjádřete $T^k_{ij}$ a $R^l_{kij}$ pomocí $\Gamma^a_{bc}$. Vyšetřete symetrie tenzorů $T$ a $R$.

6. Odvoďte hodnoty koeficientů $\Gamma^i_{jk}$ pro kanonickou lineární konexi.

7. Dokažte, že paralelní přenos je lineární zobrazení.

8. Určete geodetiky v $\mathcal{R}^n$ s kanonickou lineární konexí.

9. Určete složky kanonické lineární konexe na $\mathcal{R}^2$ v polárních souřadnicích a napište rovnici geodetik.

10. Vypočtěte délkový element $dl^2$ na sféře $\mathcal{S}^2$ ve sférických souřadnicích.

11. Určete prostoročasovou (pseudo)metriku rotujícího korouče, která vznikne transformací $t' = t, r' = r, \varphi' = \varphi + \Omega t, z' = z$ z (pseudo)metriky $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$.