Kapitola 2

Algebra tenzorů

Tato kapitola předkládá, po stručném souhrnu potřebných základních pojmů algebry vektorových prostorů, definici tenzorových prostorů konstruovaných nad vektorovým prostorem $\mathcal{V}$ konečné dimenze, založenou na představě tenzorů jako multilineárních zobrazení operujících na vektorových argumentech z prostoru $\mathcal{V}$ a duálního prostoru $\mathcal{V}^*$. Tento způsob konstrukce pojmu tenzoru je z hlediska praktických výpočtů nejúčinnější. Kromě standardních operací vytvářejících na množinách tenzorů strukturu vektorového prostoru jsou zavedeny další operace potřebné pro tenzorovou analýzu a fyzikální aplikace. Jiné možné definice jsou s touto ekvivalentní, prostory tenzorů téhož typu definované ekvivalentními způsoby jsou kanonicky izomorfní, tj. totožné z hlediska jak algebraické struktury, tak transformačních vlastností při přechodech mezi bázemi.

2.1 Vektorový prostor a duální prostor

Vektorový prostor:

Značení: $\mathcal{V}(n, \mathcal{K})$ je vektorový prostor *dimenze* n *nad polem skalárů* $\mathcal{K}$, nejčastěji $\mathcal{K} = \mathcal{R}$, zjednodušené značení: $\mathcal{V}$ (jsou-li dimenze a pole skalárů zřejmé z kontextu)

Báze vektorového prostoru:

Každý maximální lineárně nezávislý systém $(e_1, \ldots, e_n)$ prvků prostoru $\mathcal{V}(n, \mathcal{K})$.

Lineární zobrazení vektorových prostorů:

Zobrazení $f : \mathcal{V}(n, \mathcal{K}) \to \mathcal{W}(m, \mathcal{K})$ s vlastností $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$

pro libovolné vektory $a, b \in \mathcal{V}(n, \mathcal{K})$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$

Lineární funkce (forma): Lineární zobrazení $g : \mathcal{V}(n, \mathcal{K}) \to \mathcal{K}$

Obraz lineárního zobrazení: $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathcal{V}) = \{b \in \mathcal{W} \mid \exists a \in \mathcal{V} : \; f(a) = b\}$

Jádro lineárního zobrazení: $\mathrm{Ker}\,(f) = f^{-1}(0_{\mathcal{W}}) = \{a \in \mathcal{V} \mid f(a) = 0_{\mathcal{W}}\}$

Izomorfismus vektorových prostorů:

Bijektivní lineární zobrazení $\iota : \; \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ nad polem $\mathcal{K}$ jsou izomorfní, právě když mají stejnou dimenzi. Dokažte.

Doplněk vektorového podprostoru $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{V}$:

Vektorový podprostor $\mathcal{L}' \subset \mathcal{V}$, pro který $\mathcal{L}' + \mathcal{L} = \mathcal{V}$, $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L} = \{0_{\mathcal{V}}\}$. Značíme $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L} = \mathcal{V}$. Přitom $\mathcal{L} + \mathcal{L}' = \{c = a + b \mid a \in \mathcal{L},\, b \in \mathcal{L}'\}$.

Vlastnosti doplňků: Dokažte.

- Doplněk není určen jednoznačně.
- $\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{L}' = \dim \mathcal{V}$
- Každý vektor $a \in \mathcal{V}$ má jednoznačný rozklad $a = a_{\mathcal{L}} + a_{\mathcal{L}'}, a_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}, a_{\mathcal{L}'} \in \mathcal{L}'$.

Věta 2.1

Nechť $f : \mathcal{V}(n, \mathcal{K}) \to \mathcal{W}(m, \mathcal{K})$ je lineární zobrazení. Pak $\mathrm{Im}\,(f)$ je vektorovým podprostorem ve $\mathcal{W}$, $\mathrm{Ker}\,(f)$ je vektorovým podprostorem ve $\mathcal{V}$ a platí $\dim \mathrm{Im}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\,(f) = n$. Dokažte.

Hodnost a defekt lineárního zobrazení: $h = \dim \mathrm{Im}\,(f)$, $d = \dim \mathrm{Ker}\,(f)$

Duální prostor prostoru $\mathcal{V}$:

- $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*(n, \mathcal{K}) = \{f : \; \mathcal{V} \to \mathcal{K} \mid f \text{ je lineární}\}$ (f je *lineární forma*)
- Struktura vektorového prostoru zavedená standardním způsobem: $f,\, g \in \mathcal{V}^*$, $\alpha \in \mathcal{K}$, $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)\ \forall a \in \mathcal{V}$
  Dokažte, že $f + g$, $\alpha f \in \mathcal{V}^*$.

Duální báze:

$(e^1, \ldots, e^n)$, $e^i \in \mathcal{V}^*, i \in \{1, \ldots, n\} : \; e^i(e_j) = \delta^i_j\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$
Dokažte, že soubor lineárních zobrazení $(e^1, \ldots, e^n)$ je bází v prostoru $\mathcal{V}^*$.

Přechody mezi bázemi:

- $(e_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, $(\overline{e}_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ dvě báze ve $\mathcal{V}$, matice přechodu $A = (A^i_j)_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$, $B = A^{-1} = (B^i_j)_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$
- $\overline{e}_i = A^j_i e_j$, $e_i = B^j_i \overline{e}_j \Rightarrow \overline{e}^i = B^i_j e^j$, $e^i = A^i_j \overline{e}^j$

Najděte transformační vztahy pro složky vektoru $a = \alpha^i e_i = \overline{\alpha}^i \overline{e}_i$. Dokažte transformační vlastnosti duální báze a najděte transformační vztahy pro složky lineární formy $f = f_i e^i = \overline{f}_i \overline{e}^i$.

Duální (vnitřní) součin: Zobrazení

$< \mid >$: $\mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \ni (f,a) \to < f \mid a > = f(a) \in \mathcal{K}$. Platí $< f_i e^i \mid \alpha^j e_j > = f_i \alpha^i$.

Věta 2.2

Nechť $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ je vektorový podprostor dimenze k a $(e_1, \ldots, e_k)$ jeho báze. Označme $\mathcal{L}^*$ duální prostor k $\mathcal{L}$. (Prostor $\mathcal{L}^*$ je generován souborem lineárních forem $(e^1, \ldots, e^k)$. Pak $\mathcal{L}^\perp = \{a \in \mathcal{V} \mid < f \mid a > = 0_\mathcal{V}\ \forall f \in \mathcal{L}^*\}$ je doplněk podprostoru $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{V}$ (tzv. doplněk *generovaný duálním součinem*). Dokažte.

Pullback f^* :

Nechť $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je lineární zobrazení, $g : \mathcal{W} \to \mathcal{K}$ lineární funkce. Zobrazení $f^* : \mathcal{W}^* \ni g \to f^* g \in \mathcal{V}^*$ definujeme vlastností $f^* g(a) = g(f(a))\ \forall a \in \mathcal{V}$.

Operace $g\,(\,,\,)$:

Nechť $g : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ je libovolný izomorfismus, tj. $g(a) \in \mathcal{V}^*\ \forall a \in \mathcal{V}$. Definujeme $g\,(\,,\,) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (a,b) \to g(a,b) = < g(a) \mid b > \in \mathcal{K}$.
Platí $g(a,b) = < g(\alpha^i e_i) \mid \beta^j e_j > = < \alpha^i g_{ik} e^k \mid \beta^j e_j > = g_{ij} \alpha^i \beta^j$.

Skalární součin:

Symetrická a pozitivně definitní operace $g(\,,\,)$ tj.

- $g(a,b) = g(b,a)$
- $g(a,a) \geq 0$, rovnost $\Leftrightarrow a = 0_\mathcal{V}$

Poznámka: Prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}^*$ jsou stejné dimenze a jsou tedy izomorfní (najděte alespoň jeden izomorfismus). Vzhledem k různým transformačním vlastnostem při přechodech mezi bázemi však jejich izomorfismus není tzv. *kanonický*.

2.2 Tenzorové prostory

Prostor tenzorů $\mathcal{T}^p_q(\mathcal{V})$ typu (p,q) nad $\mathcal{V}(n,\mathcal{K}) = \mathcal{V}$:

- Prostor zobrazení

$$\tau : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^*}_{p-krát} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{q-krát} \ni (\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) \to$$

$$\to \tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathcal{K}$$

  lineárních ve všech vektorových argumentech $(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)$
- Struktura vektorového prostoru zavedena standardním způsobem:

$$(\tau + \sigma)(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) =$$

$$\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) + \sigma(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)$$

$$(\alpha\tau)(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \alpha\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)$$

$$\forall \tau,\ \sigma \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V}),\ \forall \alpha \in \mathcal{K}$$

Platí $\tau + \sigma,\ \alpha\tau \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V})$, $\dim \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V}) = n^{p+q}$. Dokažte.

Tenzor $(p+q)-$tého řádu $p-$krát kontravariantní a $q-$krát kovariantní:

Prvek $\tau \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V})$, zkrácené značení $\mathcal{T}^p_q$

Tenzorový součin tenzorů:

Nechť $\mu \in \mathcal{T}^p_q$, $\nu \in \mathcal{T}^r_s$. Zobrazení $\tau : (\mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^*)_{p+r} \times (\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V})_{q+s} \to \mathcal{R}$,

$$\tau(\omega_1, \ldots \omega_p, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_{p+r}; \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1}, \ldots, \xi_{q+s}) =$$

$$= \mu(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)\nu(\omega_{p+1} \ldots \omega_{p+r}; \xi_{q+1} \ldots \xi_{q+s})$$

je prvkem prostoru $\mathcal{T}^{p+r}_{q+s}$. Dokažte.

Vlastnosti tenzorového součinu: Dokažte.

- $\mu \otimes (\nu_1 + \nu_2) = \mu \otimes \nu_1 + \mu \otimes \nu_2$, $(\mu_1 + \mu_2) \otimes \nu = \mu_1 \otimes \nu + \mu_2 \otimes \nu$
- $\mu \otimes (\alpha\nu) = (\alpha\mu) \otimes \nu = \alpha\mu \otimes \nu$
- $\mu \otimes (\nu \otimes \chi) = (\mu \otimes \nu) \otimes \chi \Rightarrow$ značení $\mu \otimes \nu \otimes \chi$

Indukovaná báze:

- $(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q})_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ Dokažte, že jde o bázi v $\mathcal{T}^p_q$.
- $\tau = \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$

Příklad 1. Nechť $(e_1, \dots, e_n)$, $(\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n)$ jsou dvě báze prostoru $\mathcal{V}$, A nechť je matice přechodu, tj. $\overline{e}_i = A_i^k e_k$, $B = A^{-1}$. Nechť $\tau \in \mathcal{T}_q^p$. Dokažte následující transformační vztahy pro tenzor τ:

$$\overline{\tau}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{j_1}^{l_1} \dots A_{j_q}^{l_q} B_{k_1}^{i_1} \dots B_{k_p}^{i_p} \tau_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} .$$

Příklad 2. Dvojice $((e_i), (\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}))$, $((\overline{e}_i), (\overline{\tau}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}))$, $1 \leq i, i_1, \dots, i_p, j_1, \dots j_q \leq n$, kde (e_i), $(\overline{e}_i)$ jsou báze ve $\mathcal{V}$ a $(\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$, $(\overline{\tau}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ soubory čísel, nazveme ekvivalentními, existuje-li regulární matice A s inversní maticí B tak, že platí vztahy z Příkladu 1. Dokažte, že faktorová množina se strukturou vektorového prostoru zavedenou standardním způsobem (sčítání a násobení skalárem po složkách) je kanonicky izomorfní (kanonicky identická) s $\mathcal{T}_q^p$. Zkonstruujte jiné definice prostorů kanonicky identických s $\mathcal{T}_q^p$.

Tenzorový součin tenzorových prostorů:

$$\mathcal{T}_q^p \otimes \mathcal{T}_s^r = ||e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_r} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_s}|| = \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$$

Poznámka: Pro libovolné $\mu \in \mathcal{T}_q^p$, $\nu \in \mathcal{T}_s^r$ je součin $\mu \otimes \nu \in \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$, ale prvky $\eta \in \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$ nejsou obecně tvaru $\mu \otimes \nu$, $\mu \in \mathcal{T}_q^p$, $\nu \in \mathcal{T}_s^r$. Najděte příklady. Dokažte, že skutečně platí $\mathcal{T}_q^p \otimes \mathcal{T}_s^r = \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$.

2.3 Symetrizace a antisymetrizace

Symetrizace a antisymetrizace lineárně zobrazují prostor tenzorů typu (p, q) na podprostory tenzorů téhož typu, které vykazují vždy určitý typ záměnnosti pořadí vektorových argumentů.

Symetrizace v $\alpha-$tém a $\beta-$tém horním (dolním) indexu:

- $S^{\alpha\beta} : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to S^{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}_q^p$:

$$S^{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1, \dots, \omega_\alpha \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) +$$
$$+ \tau(\omega_1, \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_\alpha, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q)]$$

- $S_{\alpha\beta} : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to S_{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}_q^p$:

$$S_{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_\alpha, \dots, \xi_\beta, \dots, \xi_q) +$$
$$+ \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_\beta, \dots, \xi_\alpha, \dots, \xi_q)]$$

Antisymetrizace v $\alpha-$tém a $\beta-$tém horním (dolním) indexu:

- $A^{\alpha\beta} : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to S^{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}_q^p$:

$$A^{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1, \dots, \omega_\alpha \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) -$$

$$-\tau(\omega_1,\dots,\omega_\beta,\dots,\omega_\alpha,\dots,\omega_p;\xi_1,\dots,\xi_q)]$$

- $A_{\alpha\beta} : \mathcal{T}^p_q \ni \tau \to A_{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}^p_q$:

$$A_{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_1,\dots,\xi_\alpha,\dots,\xi_\beta,\dots,\xi_q)-$$

$$-\tau(\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_1,\dots,\xi_\beta,\dots,\xi_\alpha,\dots,\xi_q)]$$

Tenzor symetrický (antisymetrický) v horních resp. dolních indexech α, β:

- $\tau = S^{\alpha\beta}\tau$, resp. $\tau = S_{\alpha\beta}\tau$
- $\tau = A^{\alpha\beta}\tau$, resp. $\tau = A_{\alpha\beta}\tau$

Příklad 3. Dokažte, že symetrický tenzor v indexech α, β má složky invariantní vůči záměně indexů na $\alpha-$té a $\beta-$té pozici, zatímco složky antisymetrického tenzoru při takové záměně změní znaménko. Jaký vztah platí pro složky antisymetrického tenzoru, které mají index na $\alpha-$té a $\beta-$té pozici stejný? Dokažte, že množiny symetrických a antisymetrických tenzorů (v α-tém a $\beta-$tém horním, resp. dolním indexu) jsou vektorovými podprostory v $\mathcal{T}^p_q$. Zobecněte definici symetrie a antisymetrie na skupiny tří a více indexů i na skupinu všech indexů.

Úplná symetrizace: (ve všech horních resp. dolních indexech)

- $P_p = \{(\sigma_1,\dots,\sigma_p) \mid \text{permutace indexů}\,(1,\dots,p)\}$
- $\overline{S}\tau(\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_1,\dots,\xi_q) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in P_p}\tau(\omega_{\sigma_1},\dots,\omega_{\sigma_p};\xi_1,\dots,\xi_q)$
- $\underline{S}\tau(\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_1,\dots,\xi_q) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in P_q}\tau(\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_{\sigma_1},\dots,\xi_{\sigma_q})$

Úplná antisymetrizace (alternace): (ve všech horních resp. dolních indexech)

- $\overline{A}\tau(\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_1,\dots,\xi_q) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in P_p}\operatorname{sgn}(\sigma)\tau(\omega_{\sigma_1},\dots,\omega_{\sigma_p};\xi_1,\dots,\xi_q)$
- $\underline{A}\tau\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_1,\dots,\xi_q) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in P_q}\operatorname{sgn}(\sigma)\tau(\omega_1,\dots,\omega_p;\xi_{\sigma_1},\dots,\xi_{\sigma_q})$

Příklad 4. Charakterizujte úplně symetrické a úplně antisymetrické tenzory pomocí složek. Dokažte, že všechna zobrazení symetrizace i antisymetrizace jsou lineární.

Prostory $\bigwedge^p_{(q)}$ *a* $\bigwedge^{(p)}_q$:

- $\bigwedge^p_{(q)} = \{\tau \in \mathcal{T}^p_q \mid \tau = \overline{A}\tau\}$ vektorový podprostor v $\mathcal{T}^p_q$, $\dim\bigwedge^p_{(q)} = n^q\binom{n}{p}$
- $\bigwedge^{(p)}_q = \{\tau \in \mathcal{T}^p_q \mid \tau = \underline{A}\tau\}$ vektorový podprostor v $\mathcal{T}^p_q$, $\dim\bigwedge^{(p)}_q = n^p\binom{n}{q}$

Vnější součin: $\mu \in \mathcal{T}^p_q$, $\nu \in \mathcal{T}^r_s$

- $\mu\overline{\wedge}\nu = \frac{(p+r)!}{p!r!}\overline{A}(\mu\otimes\nu)$
- $\mu\underline{\wedge}\nu = \frac{(q+s)!}{q!s!}\underline{A}(\mu\otimes\nu)$

Příklad 5. Zapište definice alternace a vnějšího součinu pro p=0, resp. q=0. Pro tyto případy značíme $\bigwedge_q^{(0)} = \bigwedge_q$ a $\bigwedge_{(0)}^p = \bigwedge^p$, $\mu \underline{\wedge} \nu = \mu \wedge \nu$, $\mu \overline{\wedge} \nu = \mu \wedge \nu$. Dokažte, že báze v $\bigwedge_q$ má tvar $(e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q})$, $j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$. Vypočtěte $\mu \wedge \nu(\xi_1, \ldots, \xi_{q+s})$ pro $\mu \in \mathcal{T}_q^0$, $\nu \in \mathcal{T}_s^0$, jestliže $\mu = \mu_{j_1 \ldots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}$, $\nu = \mu_{l_1 \ldots l_s} e^{l_1} \wedge \ldots \wedge e^{l_s}$, $\xi_k = \xi_k^i e_i$. Dále dokažte: $\mu \wedge \nu = (-1)^{pq} \nu \wedge \mu$, $\mu \wedge (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2) = \alpha_1 (\mu \wedge \nu_1) + \alpha_2 (\mu \wedge \nu_2)$, $\mu \wedge (\nu \wedge \chi) = (\mu \wedge \nu) \wedge \chi = \mu \wedge \nu \wedge \chi$.

2.4 Kontrakce

Kontrakce jsou jistá lineární zobrazení prostoru tenzorů typu (p, q) do prostorů tenzorů nižšího řádu $((p-1, q-1)$, resp. $(p, q-1)$ a $(p-1, q)$, zadaná speciální volbou některých vektorových argumentů.

Úžení v $\alpha-$tém horním a $\beta-$tém dolním indexu:

- $\iota_\beta^\alpha : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \rightarrow \iota_\beta^\alpha \tau \in \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}$, $1 \leq \alpha \leq p$, $1 \leq \beta \leq q$

$$\iota_\beta^\alpha \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) =$$

$$\tau(\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha-1}, e^\gamma, \omega_\alpha, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_{\beta-1}, e_\gamma, \xi_\beta, \ldots, \xi_{q-1})$$

Příklad 6. Dokažte, že obraz $\iota_\beta^\alpha \tau$ je skutečně prvkem $\mathcal{T}_{q-1}^{p-1}$ a že platí

$$\iota_\beta^\alpha \tau = \tau_{j_1 \ldots j_{\beta-1} j_\gamma j_\beta \ldots j_{q-1}}^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} \gamma i_\alpha \ldots i_{p-1}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{p-1}} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{q-1}}$$

Dále ukažte užitím vztahů pro přechod mezi bázemi, že ač je kontrakce definovaná pomocí báze, je ve skutečnosti na její volbě nezávislá. Dokažte, že kontrakce je lineární zobrazení.

Stopa tenzoru: $Tr_\beta^\alpha \tau = \frac{1}{n} \iota_\beta^\alpha \tau$

Kontrakce vektorovým argumentem:

Nechť $\xi \in \mathcal{V}$, resp. $\omega \in \mathcal{V}^*$

- $\iota_\beta(\xi) : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \rightarrow \iota_\beta(\xi)\tau \in \mathcal{T}_{q-1}^p$, $1 \leq \beta \leq q$:

  $\iota_\beta(\xi)\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) = \tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_{\beta-1}, \xi, \xi_\beta, \ldots, \xi_{q-1})$
- $\iota^\alpha(\omega) : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \rightarrow \iota^\alpha(\omega)\tau \in \mathcal{T}_q^{p-1}$, $1 \leq \alpha \leq p$:

  $\iota^\alpha(\xi)\tau(\omega_1, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha-1}, \omega, \omega_\alpha, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_q)$

Příklad 7. Dokažte, že skutečně $\iota_\beta(\xi)\tau \in \mathcal{T}_{q-1}^p$ a $\iota^\alpha(\omega)\tau \in \mathcal{T}_q^{p-1}$ a ukažte, že pro složky kontrahovaných tenzorů v indukovaných bázích platí:

$$\iota_\beta(\xi)\tau = \xi^\gamma \tau_{j_1 \ldots j_{\beta-1} \gamma j_\beta \ldots j_{q-1}}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{q-1}}$$

a podobně pro $\iota^\alpha(\omega)\tau$. Dokažte, že kontrakce vektorovými argumenty jsou lineární zobrazení.

Příklad 8. Dokažte, že pro $\tau \in \bigwedge_q \subset \mathcal{T}^0_q$ a $\xi \in \mathcal{V}$ platí pro libovolné $1 \leq \beta \leq q$

$$\iota_\beta(\xi)\tau(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = \tau(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{q-1}),\ \iota_\beta(\xi)\tau = \xi^\gamma \tau_{\gamma j_1, \dots, j_{q-1}} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{q-1}}$$

2.5 Metriky, snižování a zvedání indexů

Metrický tenzor (metrika)

- Regulární symetrický tenzor $g \in \mathcal{T}^0_2$ (kovariantní metrika)
- Regulární symetrický tenzor $g \in \mathcal{T}^2_0$ (kontravariantní metrika)

Věta 2.3

Pro každou metriku $g \in \mathcal{T}^0_2$ existuje báze $(e_1, \dots, e_n)$ prostoru $\mathcal{V}$, ve které je

$$g = e^1 \otimes e^1 + \dots + e^k \otimes e^k - e^{k+1} \otimes e^{k+1} - \dots - e^n \otimes e^n$$

Důkaz: Viz například důkaz o kanonickém tvaru kvadratických forem. Analogická věta platí pro kontravariantní metriku. $\diamondsuit$

Signatura metriky:

- $(k, n-k)$
- $(n, 0)$ *euklidovská metrika*
- $(n-1, 1)$ *Minkowského metrika*

Snížení indexu:

- $g \in \mathcal{T}^0_2$ metrika, $\quad g{\downarrow}^\alpha_\beta \colon \mathcal{T}^p_q \ni \tau \to g{\downarrow}^\alpha_\beta\, \tau \in \mathcal{T}^{p-1}_{q+1}$

$$g{\downarrow}^\alpha_\beta\, \tau(\omega_1, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_{q+1}) =$$
$$= \tau(\omega_1, \dots, \omega_{\alpha-1}, g(\xi_\beta), \omega_\alpha, \dots, \omega_{p-1}; \xi_1, \dots, \xi_{\beta-1}, \xi_{\beta+1}, \dots, \xi_{q+1})$$

Zvednutí indexu:

- $g \in \mathcal{T}^2_0$ metrika, $\quad g{\uparrow}^\alpha_\beta \colon \mathcal{T}^p_q \ni \tau \to g{\uparrow}^\alpha_\beta\, \tau \in \mathcal{T}^{p+1}_{q-1}$

$$g{\uparrow}^\alpha_\beta\, \tau(\omega_1, \dots, \omega_{p+1}; \xi_1, \dots, \xi_{q-1}) =$$
$$= \tau(\omega_1, \dots, \omega_{\alpha-1}, \omega_{\alpha+1}, \dots, \omega_{p+1}; \xi_1, \dots, \xi_{\beta-1}, g(\omega_\alpha)\xi_\beta, \dots, \xi_{q-1})$$

Příklad 10. Dokažte, že pro $\tau \in \mathcal{T}^p_q$ je skutečně $g{\downarrow}^\alpha_\beta\, \tau \in \mathcal{T}^{p-1}_{q+1}$ a že platí

$$g{\downarrow}^\alpha_\beta\, \tau = g_{\gamma j_\beta} \tau^{i_1 \dots i_{\alpha-1} \gamma i_{\alpha+1} \dots i_p}_{j_1 \dots j_{\beta-1} j_{\beta+1} \dots j_{q+1}}\, e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{\alpha-1}} \otimes e_{i_{\alpha+1}} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_{q+1}}.$$

Analogický důkaz proveďte pro zvednutí indexu.