1. Derivování pro cvičené opice

Co je to reálná funkce reálné proměnné? Co je to derivace? Vzpomenete si na pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí? A co takhle funkce složená? Že je to v pohodě?

Příklady náhradní za neúčast a příklady pro kombinované studium

1. - 3. Určete derivace následujících funkcí a obory jejich existencí.

a) $\cos^3 4x$
b) $\frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$
c) $\sin^2(\cos 3x)$
d) $\frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} +$
$+ \frac{3}{8}\ln\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}$ e) $\mathrm{e}^{3\sin x}$
f) $2^{x\log x}$
g) $\ln 2\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$
h) $\ln\frac{x-1}{x+1}$
i) $\mathrm{e}^{\tan 2x}$
j) $\ln^2 x$
k) $x\cdot\sin x\cdot\ln x$
l) $\frac{\ln x}{x^n}$
m) e^{x^2}
n) $x\cdot\ln x$
o) $\ln(\sin x)$
p) x^x
q) $\sqrt{x}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$
r) $\ln(1+a^{-\varepsilon x})$
s) $\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$
t) $\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$
u) $\log_{\mathrm{e}^x} x^2$
v) $\sqrt{\mathrm{e}^{ax}}$
w) $\sqrt{\cos x}\cdot a^{\sqrt{\cos x}}$
x) $\ln(x\pm\sqrt{a^2+x^2})$
y) $\ln\cos\frac{x-1}{x}$
z) $\sqrt{x^2+1} - \ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$

Domácí úkol - opakovací vstupní test

1a. Načrtněte graf funkce $f: y = \log_2(3-x)+1$.

1b. V $\mathbf{R}$ řešte rovnice a nerovnice

i) $\log x^{2\log\sqrt{x}} + \log\frac{1}{x^2} = 3$

ii) $8.2^{x^2+4x} \leq 2^{2x+6}$

iii) $\cos 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$

iv) $|x+3| + 2x - 1 = |2x-4| + x - 2$

v) $\log(-\frac{36}{x^2} - \frac{6}{x} + 2) + 2\log x \leq \log(x+4) + \log(x-4)$

1c. V $\mathbf{C}$ řešte rovnici $x^4 - 1 = 0$.

2. Integrál jako obrázek, substituční metoda

Primitivní funkce a základní integrační metody, substituce.

1. – 3. Substituční metodou vypočtěte:

a) $\int (2x-3)^{10} \mathrm{d}x$

b) $\int x \cdot \sqrt{2-5x} \mathrm{d}x$

c) $\int x \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{d}x$

d) $\int \frac{5x-1}{x^2+1} \mathrm{d}x$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$

f) $\int \sqrt{a^2-x^2} \mathrm{d}x$

g) $\int \cos^2 x \mathrm{d}x$

h) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$

i) $\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$

j) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x \cdot (1-x)}}$

k) $\int \sqrt{2+x-x^2} \mathrm{d}x$

l) $\int \sqrt{1+\sin x} \mathrm{d}x$

Domácí úkol

2. Vypočtěte následující integrály

a) $\int \mathrm{cotg} x \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$

c) $\int \frac{1+3x^2}{x^2 \cdot (1+x^2)} \mathrm{d}x$

d) $\int (5^x - 1)(e^x + 1) \mathrm{d}x$

3. Integrál jako obrázek, metoda per partes

Primitivní funkce a základní integrační metody, per partes.

1. Integrací per partes vypočtěte:

a) $\int x \cdot e^x \mathrm{d}x$

b) $\int x^n \cdot \ln x \mathrm{d}x$

c) $\int x \cos x \mathrm{d}x$

d) $\int \sqrt{1-x^2}$

e) $\int \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$

f) $\int x \cdot \mathrm{arcsin} x \mathrm{d}x$

2. Odvoďte rekurentní vzorce pro následující integrály:

a) $\int \sin^n x \mathrm{d}x$

b) $\int \ln^n x \mathrm{d}x$

c) $\int x^n e^{-x} \mathrm{d}x$

3. Rozkladem na parciální zlomky vypočtěte:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+3)}$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$

Domácí úkol

3. Vypočtěte následující integrály:

a) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

b) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2 x}$

c) $\int x \cdot \mathrm{arccos} x \mathrm{d}x$

d) $\int x \cdot \sin \sqrt{x} \mathrm{d}x$

4. Vektory, matice, skalární a vektorový součin

1. Jedna z možných definic determinantu je následující:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \det(\mathbf{A}_{(i,k)}),$$

kde $\mathbf{A}_{(i,k)}$ je matice typu $(n-1, n-1)$, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ (typu (n,n)), vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce. (Determinant matice typu $(1,1)$, $\mathbf{A} = (a)$, je číslo a.)
Ukaž, že pro $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ platí

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{(j,i)})}{\det \mathbf{A}},$$

explicitně to ukaž pro matice typu $(2,2)$.

2. U následujících matic zjistěte, zda jsou regulární a v kladném případě stanovte matice inverzní. Užijte obou způsobů výpočtu $\mathbf{A}^{-1}$ a výsledky porovnejte.

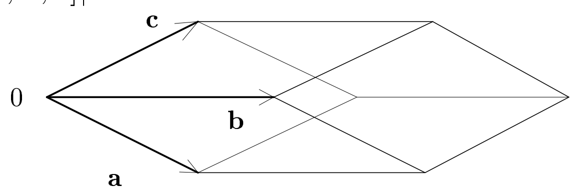
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Dokažte vztah pro smíšený součin

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \equiv \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

užitím vlastností determinantu najděte vztahy mezi smíšenými součiny těchto vektorů ve všech možných pořadích. Dále ukažte, že objem rovnoběžnostěnu o hranách $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (viz obrázek) je roven $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|$.



Domácí úkol

4.

a) Určete (oběma způsoby) inverzní matici k matici $\mathbf{A}$ (pokud je regulární)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ mají v bázi $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ složky $a^1 = 1, a^2 = 1, b^1 = 1, b^2 = -1$, v bázi $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2$ složky $\overline{a}^1 = -1, \overline{a}^2 = 0, \overline{b}^1 = 1, \overline{b}^2 = 2$. Určete matici přechodu mezi bázemi a vyjádřete pruhované vektory báze jako lineární kombinaci nepruhovaných a obráceně. Mají báze stejnou orientaci?

c) Udejte podmínku, která
i) je nutná, ale není dostatečná,
ii) není nutná, ale je dostatečná,
iii) je nutná a dostatečná,
aby systém vektorů $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (\alpha, \beta, \gamma)$ byl bází $\mathbf{R}^3$.

5. Písemka

Písemka první - základní mat. metody 1

1. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{\sin 4x + \sqrt{x}}}.$$

Návod: Využijte skutečnosti, že pro libovolnou funkci je $f(x) = e^{\ln f(x)}$.

[2 body]

2. Vypočtěte následující integrály

a) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \mathrm{d}x$

Návod: Substituce

b) $\int x \cdot \sin x \mathrm{d}x$

Návod: Per partes

c) $\int 2 \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}$

Návod: Rozložte na parciální zlomky $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$.

[5 bodů]

3a. Vektory $\vec{a}, \vec{b}$ mají v bázi (e_1, e_2) složky $a^1 = 3, a^2 = 2, b^1 = 2, b^2 = 2$, v bázi $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ složky $\overline{a}^1 = 1, \overline{a}^2 = 1, \overline{b}^1 = -1, \overline{b}^2 = 1$. Určete matici přechodu mezi bázemi, vypočtěte její determinant a vyjádřete pruhované vektory báze jako lineární kombinaci nepruhovaných a obráceně.
3b. Určete inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

[3 body]

Domácí úkol

5. Pro předmět kulového tvaru platí při malých rychlostech následující vztah pro odporovou sílu:

$$F_o = 6\pi\eta r v$$

(Lze exaktně odvodit z Navier-Stokesových rovnic!) r je poloměr kuličky, v je rychlost. Ukažte, že pokud na kuličku nepůsobí žádné další síly, je pohybová rovnice diferenciální rovnicí tvaru:

$$\dot{v} = -Cv$$

Rovnici vyřešte pro nějakou konkrétní počáteční podmínku a najděte "dolet" tzn. vzdálenost, ve které se kulička s určitou počáteční rychlostí zastaví.

Působí-li navíc nějaká konstantní síla (např. pád ocelové kuličky v nádobě naplněné olejem) pohybová rovnice má tvar:

$$\dot{v} = -Cv + B$$

Rovnici vyřešte (obecně a pro určité počáteční podmínky) a nakreslete graf závislosti rychlosti na čase. (všimněte si, že postup řešení nezávisí na tom, působí-li ta konstantní síla ve směru pohybu nebo proti směru pohybu.)

6. Diferenciální rovnice

1. Do dna nádoby ve tvaru válce o poloměru R je vyvrtaná díra o poloměru r. Do nádoby nalejeme vodu. Určete závislost $h(t)$ výšky hladiny na čase. Taková úloha vede na diferenciální rovnici tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = A\sqrt{h(t)}$$

Rovnici vyřešte separací proměnných. Jaký je význam integrační konstanty? Jak vypadá partikulární řešení pro počátční podmínku $h(t_0) = H$? Navíc můžete fyzikálním rozborem určit konstantu A.

2. řešte následující diferenciální rovnice:

$$\dot{x} = 2tx$$

$$\dot{y} = -2y - t + 1$$

$$t^2\dot{y} + ty + 1 = 0$$

3.řešte následující diferenciální rovnice:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5x = 0$$

$$\ddot{x} + \dot{x} - 5x = 0$$

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$$

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$$

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$$

Domácí úkol

6. Při vyšších rychlostech platí pro odporovou sílu Newtonův vztah (empiricky zjištěno):

$$F_o = \frac{1}{2} C S \varrho v^2$$

Pokud na těleso nepůsobí žádné další síly, je pohybová rovnice tvaru:

$$\dot{v} = -Qv^2$$

(odpovídající fyzikální situace je např. brždění rozjetého parníku) Rovnici vyřešte a zjistěte "dolet" (viz. úloha 2.)

Působí-li navíc určitá konstantní síla, pak postup řešení závisí na tom, působí-li tato síla ve směru či proti směru pohybu.

- kromě odporové síly působí navíc konstantní síla proti směru pohybu. (odpovídající fyzikální situace: předmět s hustotou nižší než voda dopadá určitou počáteční rychlostí do vody. Jak hluboko se ponoří?) Pohybová rovnice je má tvar:

  $$\dot{v} = -Qv^2 - R, \qquad R > 0$$

  Rovnici vyřešte a najděte "hloubku ponoru".

- kromě odporové síly působí navíc konstantní síla ve směru pohybu. (odpovídající fyzikální situace je např. pád parašutisty) Pohybová rovnice má tvar:

  $$\dot{v} = -Qv^2 + R, \qquad R > 0$$

  Rovnici vyřešte.

7. Diferenciální rovnice, soustavy

1. řešte následující diferenciální rovnice:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t^2$$

$$2\ddot{x} + \dot{x} - x = t^3 + 2t^2 + t + 1$$

$$2\ddot{x} + \dot{x} - x = 2e^t$$

$$\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = 3t + \sin t$$

2. řešte následující soustavy diferenciálních rovnic:

$$\dot{y_1} = y_1 + y_2, \quad \dot{y_2} = -2y_1 + 3y_2$$

$$\dot{y_1} = 2y_1 + y_2, \quad \dot{y_2} = -y_1 + 4y_2$$

$$\dot{x_1} = x_1 + x_2 + 1 + e^t, \quad \dot{x_2} = 3x_1 - x_2$$

3.řešte následující diferenciální rovnice:

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = \cos t + \sin t$$

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^t(t-1)$$

$$\ddot{y} + a^2 y = b\cos\beta x$$

Domácí úkol

7. Určete řešení uvedených počátečních problémů:

$$\ddot{y} - \dot{y} = 2(1-t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1$$

$$\ddot{y} + y = \sin 2t, \quad y(\pi) = \dot{y}(\pi) = 1$$

$$y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = y''(0) = 1$$

8. Písemka

Písemka druhá - základní mat. metody 1

1. Vyřešte diferenciální rovnici (separace proměnných)

$$y(y-1) = t\dot{y}$$

2. Vyřešte diferenciální rovnici

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 10x = 7\cos t + 11\sin t + t$$

3. Vyřešte soustavu diferenciálních rovnic pro počáteční podmínky $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

$$\dot{x} = -2x + 13y$$
$$\dot{y} = x + 2y$$

4. Pro předmět kulového tvaru platí při malých rychlostech následující vztah pro odporovou sílu:

$$F_o = 6\pi\eta r v$$

(Lze exaktně odvodit z Navier-Stokesových rovnic!) r je poloměr kuličky, v je rychlost. Ukažte, že pokud na kuličku nepůsobí žádné další síly, je pohybová rovnice diferenciální rovnicí tvaru:

$$\dot{v} = -Cv$$

Rovnici vyřešte pro nějakou konkrétní počáteční podmínku a najděte "dolet" tzn. vzdálenost, ve které se kulička s určitou počáteční rychlostí zastaví.

Působí-li navíc nějaká konstantní síla (např. pád ocelové kuličky v nádobě naplněné olejem) pohybová rovnice má tvar:

$$\dot{v} = -Cv + B$$

Rovnici vyřešte (obecně a pro určité počáteční podmínky) a nakreslete graf závislosti rychlosti na čase. (všimněte si, že postup řešení nezávisí na tom, působí-li ta konstantní síla ve směru pohybu nebo proti směru pohybu.)

Domácí úkol

8. Pomocí křivkového integrálu

a) spočtěte délku závitu šroubovice,

b) spočtěte délku Archimedovy spirály v závislosti na počtu oběhů,

c) spočtěte obvod kružnice.

9. Křivkový integrál

1. Spočtěte práci silového pole $\vec{F} = (x, xy)$ po drahách
a) úsečka z bodu $[2, 0]$ do bodu $[0, 3]$
b) část elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ z bodu $[2, 0]$ do bodu $[0, 3]$.

2. Spočtěte práci silového pole $\vec{F} = (x, y)$ po drahách
a) úsečka z bodu $[2, 0]$ do bodu $[0, 3]$
b) část elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ z bodu $[2, 0]$ do bodu [0,3].

3. Vypočtěte polohu těžiště homogenní cykloidy (jednoho oblouku), $\mu(x, y) = 1$, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Domácí úkol

9a. V rovině xy je dána křivka $\mathcal{C}$ s parametrickým vyjádřením $x(t) = R\cos^3 t$, $y(t) = R\sin^3 t$, $R > 0$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (čtvrtina asteroidy). Určete práci síly $\vec{F} = (\frac{x^2}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}}, \frac{y^2}{x^{\frac{5}{3}}+y^{\frac{5}{3}}})$ po $\mathcal{C}$.

9b. V počátku souřadnicové soustavy v $\mathbf{R}^3$ je umístěn bodový náboj Q. Vyjádřete vektorové pole udávající intenzitu elektrostatického pole v libovolném bodě (x, y, z). Ukažte, že práce tohoto pole po libovolné uzavřené hladké křivce $\mathcal{C}$:$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ je rovna nule. (Návod: vyjádřete integrál pro práci a použijte vhodné substituce).

10. Funkce dvou a více proměnných

1a. Vypočtěte parciální derivaci $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ následujících funkcí

i) $z = x^3 y$

ii) $z = y^2 \sin x$

1b. Vypočtěte intenzitu $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$, $(E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z})$ jestliže potenciál Φ je roven

i) $\Phi = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+y^2}}$

ii) $\Phi = \exp\left(-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

2 Vypočtěte parciální derivace následujících složených funkcí

i) $z = (y \sin x)^{e^{x^2 y}}$

ii) $z = xy \sin^2 x + 2y^2 x \ln y$

3a. Divergence vektoru $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ je definována jako

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} + \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^i}$$

Rotace vektoru $\mathbf{A}$ je vektor $\mathbf{X} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ jehož složky jsou definovány

$$\mathbf{X} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}, \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}, \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right) .$$

Pomocítěchto definic dokažte následující vztahy pro libovolné vektory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a spojité funkce f, g

i) $\mathrm{grad}(fg) = \mathrm{grad}(f)g + f\mathrm{grad}(g)$

ii) $\mathrm{div}(f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathrm{grad}f + f\mathrm{div}\mathbf{A}$

iii) $\mathrm{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{B}$

Domácí úkol

10. Dokažte následující vztahy

i) $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}f = 0$

ii) $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} = 0$

11. Funkce dvou a více proměnných, úplný diferenciál

Diferenciál funkce jedné proměnné v bodě x^0 je dán

$$df(x) = f'(x^0)dx \ , f'(x^0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^0} \ .$$

Podobně definujeme *n-tý* diferencial dané funkce v bodě x^0 jako

$$d^n f(x^0)) = f^{(n)}(x^0)dx^n \ , dx^n = (dx)^n \ ,$$

kde $f^{(n)}(x^0)$ je *n-tá* derivace funkce $f(x)$ v bodě x^0.
1a. Vypočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí

i) $f = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - 5$

ii) $y = a\sin(bx + c)$

Diferenciál funkce více proměnných $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ v bodě $[x_1^0, \ldots, x_n^0]$ je definován jako

$$dy = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{[x_1^0,\ldots,x_n^0]} dx_1 + \ldots \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{[x_1^0,\ldots,x_n^0]} dx_n \ .$$

Pro funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$ definujeme diferenciál *n-tého* řádu následovně

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \frac{\partial^n z}{\partial^k x \partial^{n-k} y} dx^k dy^{n-k} \ .$$

2.Vypočtěte první a druhý diferenciál následujících funkcí

i) $z = x^4y^3 + 3x^2y$

ii) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

iii) $z = y^2e^x$

O nasledujícím výrazu $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ říkáme, že je totálním diferenciálem, jestliže platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \; .$$

3.Rozhodněte, zda daný výraz je totálním diferenciálem a v kladném případě určete danou funkci

i) $(3x^2 + 8ax + 2by^2 + 4y)dx + (4bxy + 3x + 5)dy = 0$

ii) $(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0$

Domácí úkol

11a. Vypočtěte první a druhé diferenciály následující funkcí

i) $z = x^3 y^4 \cos(x^2 + y^2)$

ii) $z = (x^2 + y^2)e^{x^2 + y^2 e^{xy}}$

11b.

i) Spočítej $\sqrt[5]{250}$ s přesností 10^{-3}, víš-li, že $3^5 = 243$,

ii) pomocí Taylorova rozvoje funkcí dvou proměnných vypočtěte $\arcsin \frac{0{,}48}{1{,}05}$.

12. Dvojný a trojný integrál

1. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního rotačního elipsoidu s poloosami a, b, c kde $a = b$ kolem osy z.

2. Obrazec M v $\mathbf{R}^2$ je omezen křivkami $y = x$, $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$. Plošná hustota je $\sigma(x,y) = k/y\sqrt{x}$. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose z, kolmé na rovinu obrazce.

3. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního anuloidu kolem osy symetrie.

Domácí úkol

12.

a) Těleso omezené plochou $\frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{(z-h)^2}{h^2}, 0 < z < h$ má konstantní hustotu ϱ. Spočítejte jeho hmotnost, těžiště a momenty setrvačnosti.

b) Spočítejte objem homogenní koule, kulové výseče, kulové úseče a kulového vrchlíku, jejich polohy těžiště a momenty setrvačnosti kolem různých os.

c) NEPOVINNÉ!:
Tělesa: válec, kužel, rotační paraboloid, elipsoid, anuloid… Objem, pro homogenní případ momenty setrvačnosti kolem různých os.

13. Dvojný a trojný integrál

1. Vypočtěte polohu těžiště a J_x, J_y, J_z pro část homogenního anuloidu, vzniklého rotací kružnice kolem osy z. Část je vymezena nerovností
a) $z \geq 0$,
b) $y \geq 0$,
c) $y - x \leq 0$.

2. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního eliptického kužele vzhledem k ose z a vyjádřete jej pomocí hmotnosti M kužele.

3. Najděte souřadnice těžiště plochy M v rovině xy omezené čarami $y = 2^7\sqrt{x}$, $y = 4^7\sqrt{x}$, $y = x^{-3}$, $y = 3^7 x^{-3}$, je-li plošná hustota $\sigma(x,y)\frac{2}{7}\sqrt{x}$. Použijte větu o transformaci integrálu.

Domácí úkol

13. Vypočtěte objem tělesa ohraničeného plochami $\mathcal{S} : x^2+y^2+z^2 = R^2$, $\mathcal{S}_2 : x^2+y^2-Rx = 0$ (část ležící uvnitř plochy $\mathcal{S}_2$).