7. Integrální věty

Pozn.: V příkladech tohoto cvičení záměrně neuvádíme, kterou integrální větu máte při výpočtu použít.

1. Vypočtěte plochu kružnice užitím integrální věty. Vypočtěte plochu ohraničenou křivkou $\partial\mathcal{C} : x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0, 2\pi)$ užitím integrální věty.

2. Rozhodněte, které z příkladů cvičení 6 (Tok vektorového pole) lze vypočítat užitím integrální věty. Zapište příslušné integrály a alespoň některý z těchto příkladů vypočtěte. (Porovnejte výsledek a pracnost přímého výpočtu a výpočtu užitím integrální věty).

3. Silové pole $\vec{F}$ má velikost úměrnou druhé mocnině vzdálenosti od počátku soustavy souřadnic a směřuje do počátku.

a) Ukažte, že silové pole je konzervativní a určete jeho potenciál (tj. skalární pole φ, pro které $\vec{F} = \mathrm{grad}\varphi$),

b) Vypočtěte rotaci $\vec{F}$. Ukažte, že rotace každého konzervativního pole, jehož potenciál má spojité parciální derivace druhého řádu, je nulová.

c) Vypočtěte práci tohoto pole po křivce křivce $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, s počátečním bodem $A = [R, 0, 0]$ a koncovým bodem $B = [0, R, 0]$ pomocí potenciálu.

d) Pomocí integrální věty ukažte, že práce konzervativního pole po uzavřené křivce je nulová.

Domácí úkol

VII. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ uzavřenou plochou $S : x^2 + y^2 = R^2 z, z = 1, x \geq 0, y \geq 0$, orientovanou vnější normálou užitím integrální věty. Výsledek porovnejte s výsledkem úkolu VIa. cvičení 6.