4. Formulace a řešení pohybových rovnic jednoduchých klasických a kvantových soustav

Pohyb klasických částic v silových polích, nerelativisticky i relativisticky

- deterministický – určen původním stavem, $t \to -t$ – děje jsou vratné

- **pole homogenní síly** – např. tíhové pole Země na povrchu

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz \quad \Rightarrow \text{separace} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \text{ a ytaky}$$

$\Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}},\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ a obě jsou konstantní

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} = -mg \Rightarrow \ddot{z} = -g$$

$$z = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

- integrace řešení

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-mgx}} \Rightarrow x = \underbrace{\frac{E}{mg}}_{\text{max. výška}} - \frac{1}{2}g(t-\underbrace{t_0}_{\text{doba max. výšky}})^2$$

- podle počátečních rychlostí rozdělujeme vrhy na svislý, vodorovný a šikmý

- **pole centrální síly** – velikost síly závisí na vzdálenosti (většinou nepřímo)
  - např. gravitační nebo coulombovská interakce

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$ – invariantní vůči otočení – zachovává se moment hybnosti kolem osy $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \overrightarrow{konst.}$

$\Rightarrow$ pohyb leží v jedné rovině

$$\Rightarrow L(r,\varphi,\cancel{t}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

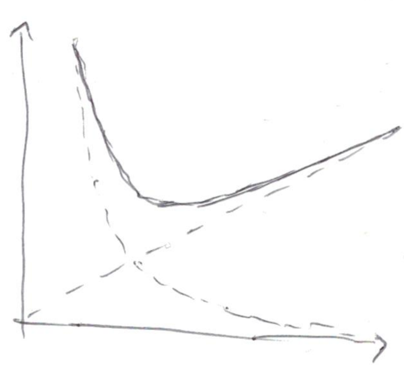
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = \underbrace{L}_{\text{moment hybnosti}} = \text{konst.}$$

- integrace řešení

$$dt = \frac{m}{L}r^2 d\varphi \Rightarrow \Delta t = \frac{m}{L}\underbrace{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi}_{2\cdot S \ldots \text{ opsaná plocha} = 2.\text{ Kepplerův zákon}}$$

- efektivní potenciál

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L}{2mr^2} + V(r)}_{V_{eff}}$$



- relativisticky: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$, m_0 ... klidová hmotnost

$$\vec F = \frac{d\vec p}{dt}, \quad \vec p = m_0\gamma\vec u \Rightarrow \frac{d\vec p}{dt} = m\frac{d\vec u}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec u = m\vec a + m\gamma^2\vec a = \vec F$$

$$\Rightarrow \vec F = m_0\gamma\vec a + m_0\gamma^3\vec a$$

$\vec F\cdot\vec u = 0$ $\quad \vec F = m_0\gamma\vec a$ - transverzální

$\vec F\times\vec u = 0$ $\quad \vec F = m_0\gamma^3\vec a$ - longitudální

Klasický ~~[illegible]~~ oscilátor - jednorozměrný pro jednoduchost

- potenciál $V(x)\sim x^2$, konstanta úměrnosti k - např. tuhost pružiny
  - z E-L rovnic: $m\ddot x = -kx = F \Rightarrow \ddot x = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$, kde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow$ řešení: $x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = C\cos(\omega t + \varphi)$, $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{B}{A}$

fáze

amplituda, úhlová rychlost, $C = \sqrt{A^2+B^2}$

- libovolné hodnoty energie

Kvantový oscilátor

- nekonečně hluboká parabolická jáma
- Sch. r.: $\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\frac{d^2}{dx^2}}_{\hat p^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\}\psi = E\psi$

$\Rightarrow$ zavedeme snižovací a zvyšovací operátor

$$\hat a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat p, \quad \hat a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat p$$

$\Rightarrow \hat H = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat a\hat a^+ + \hat a^+\hat a) = \hbar\omega(\hat a^+\hat a + \frac{1}{2})$, a platí $\hat a|0\rangle = 0 \Rightarrow \hat H|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle$

pohybová rovnice odpovídá ~~[illegible]~~ gausovce

$$\psi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \Rightarrow \text{vyšší stavy } E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

- základní stav

- diskrétní energiové spektrum

$\hat a^+\hat a|n\rangle = n|n\rangle$

$\hat a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$\hat a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

4. Formulace a řešení pohybových rovnic jednoduchých klasických a kvantových soustav

Kepplerova úloha

- částice v centrálním gravitačním poli – Newtonův potenciál $\sim \frac{1}{r}$
- rozdělení problému na pohyb těžiště a vzájemný pohyb soustavy

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}), \text{ kde } \quad M = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow L_r = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}), \text{ kde } V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{|\vec{r}|} = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r}$$

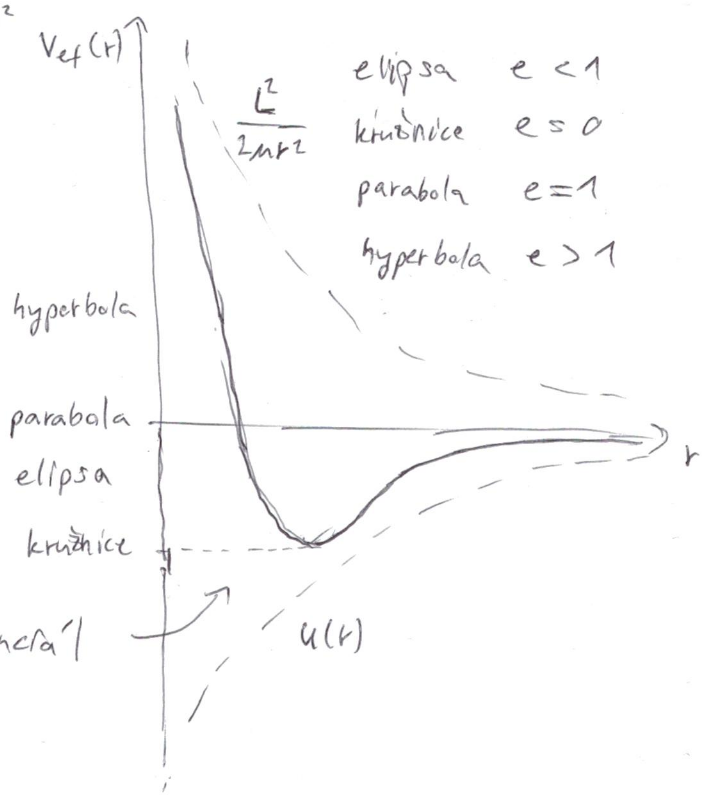
moment hybnosti $L = mr^2 \dot{\varphi} = \text{konst.}$

- pohybové rovnice určíme integrací $\varphi = \pm \int \frac{L\,dr}{r^2 \sqrt{2m[E + \frac{\alpha}{r}] - \frac{L^2}{r^2}}} = \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{m\alpha}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{L^2}}}$

označme $p = \frac{L^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \cos\varphi \cdot e}$$

ellipsa $e < 1$
kružnice $e = 0$
parabola $e = 1$
hyperbola $e > 1$



Coulombovská interakce klasicky

- velmi podobné Kepplerově úloze
  - pole centrální síly $\sim \frac{1}{r^2}$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r),$$

kde $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ ⇒ efektivní potenciál

- Spojité spektrum energií
- zásadní nedostatek podle KM by elektron musel při změně trajektorie vyzařovat foton.

KEPPLEROVY ZÁKONY

1. částice se pohybuje po kuželosečce s ohniskem v centru síly.
2. Zákon ~~obje~~ ploch – plocha opsaná průvodičem za určitou dobu stejná
3. Zákon oběžných dob.

Coulombovská interakce kvantově

$$\hat{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi - \frac{e^2\psi}{4\pi\varepsilon_0 r} = E\psi$$

- neobvyklá fo – úhlová fce (hustota pravděp.)
- potenciál popsán $V = k\frac{qQ}{r}$ – vázané stavy pouze pro nesouhlasné náboje
- například model atomu vodíku – Sch. r. se rozpadne radiální a úhlovou část
  - úhlová část je kulová fce → budeme zkoumat pouze radiální část
    - legendrovy polynomy (energie nezávisí na kvantovém čísle l a m)

$$\Rightarrow E_n = -\frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\frac{m_e}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$ – diskrétní silně degenerované spektrum

$$\underbrace{\psi(r,\varphi,\vartheta)}_{} = \underbrace{R(r)}_{\text{radiální část}} \cdot \underbrace{Y(\varphi,\vartheta)}_{\text{kulová fce}}$$

$$\underbrace{\hat{L}^2}_{\text{operátor momentu hybnosti}} Y = \lambda Y = \hbar^2 l(l+1)$$

$$R_1(r) = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

Vliv počátečních podmínek na řešení pohybových rovnic

- u homogenního pole ~~...~~ rozhodují o povaze vrhu (svislý, vodorovný, šikmý, volný pád)
- u centrálního pole $\frac{1}{r}$ určují trajektorie
- u centrálního pole r^2 určují hodnotu energie