10. Zákony zachování

- úzce spjaty se symetrií prostoru a času (homogenita a izotropie).
  - teorém Emmy Noetherové

Zákony zachování energie, hmotnosti a náboje

- **energie** - nelze vytvořit ani zničit pouze se převádí jedna forma na druhou
  - homogenita času $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$
  - mechanika: ~~???~~ uvažujeme, že $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \quad E = \sum_i^k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i - L$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \sum_i \left(\dot{p}_i \dot{x}_i + p_i \ddot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

  - termodynamika: $dE = \delta Q - \delta W + \sum_k \mu_k dN_k = 0$

- **hmotnosti** - v klasické fyzice (klidová hmotnost) zůstává hmotnost zachovalá
  - rovnice kontinuity

$$\underbrace{\operatorname{div}(\rho \vec{v})}_{\text{vekt. pole toku hmoty}} + \frac{\partial \overbrace{\rho}^{\text{hustota}}}{\partial t} = 0 \qquad \underbrace{\oint_{\partial V} (\rho \vec{v}) \vec{n} dS}_{\text{tok plochou}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV}_{\text{časová změna hmotnosti v objemu}}$$

  - v relativitě se může měnit $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

- **náboje** - obdobně jako hmotnost - rovnice kontinuity

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \underbrace{\oint_{\partial V} \vec{j} d\vec{S}}_{\text{tok náboje plochou}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV}_{\text{úbytek náboje}}$$

  - platí i v mikrosvětě - baryony $\pm 2/3$ nebo $\pm 1/3$

Izolované soustavy (zachování hybnosti, momentu hybnosti, energie mechanické)

- vychází opět ze symetrie - homogenita a izotropie prostoru
- **hybnosti** - homogenita prostoru $L'(\vec{r}_a) = L(\vec{r}_a + \vec{R}) = L(\vec{r}_a) + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \vec{R} + (\text{čvř.})$

~~??????~~ aby $L' = L \Rightarrow \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = 0$

- 1. věta impulzová

$$\Rightarrow -\sum_a \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a \vec{F}_a = \vec{0} \qquad \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} = \sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \vec{p}_a = \frac{d}{dt} \vec{P} = 0 \qquad \vec{R} = \frac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}$$

- momentu hybnosti – izotropie prostoru = invariance vůči otočení

  - otočení o malý úhel $\vec{r}_a' = \vec{r}_a + \vec{\varphi} \times \vec{r}_a$

$$L' = L(\vec{r}_a + \varphi \times \vec{r}_a) = L(\vec{r}_a) + \underbrace{\sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \vec{\varphi} \times \vec{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \vec{\varphi} \times \vec{v}_a \right)}_{\text{musí být } 0} + [\text{čvi}$$

$$\left| \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} (\vec{A} \times \vec{B}) \right|$$

$$\Rightarrow \vec{\varphi} \cdot \sum \left(\vec{r}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} + \vec{v}_a \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \right) = \vec{\varphi} \cdot \sum \left(\vec{r}_a \times \dot{\vec{p}}_a + \dot{\vec{r}}_a \times \vec{p}_a \right)$$

$$= \varphi \underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{\text{2. věta impulsová}} = 0 \quad , \text{kde } \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

  - např. v tíhovém poli se zachovává MH při otočení kolem osy ~~...~~ rovnoběžné s polem
  - v centrálním poli se zachovává vůči středu síly

- mechanické energie – viz předchozí strana

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \left(\dot{p}_i \dot{x}_i + p_i \ddot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i \right) = \frac{\partial L}{\partial t}$$

  - platí v poli konzervativních sil $\oint_{\partial S} \vec{F} d\vec{l} = 0$ $\Rightarrow \vec{F} = -\operatorname{grad} V$

- v poli nekonzervativních sil se mech. energie nezachovává a mění se na jiné formy energie – teplo, elektrická energie $\oint_{\partial S} \vec{F}_n d\vec{l} \neq 0$
  - dochází k výměně energie mezi tělesy