6. Periodické děje ve fyzice

- periodický děj = takový, při kterém se soustava vrátí do původního stavu za určitou dobu (= perioda)

Matematický popis kmitů

- kmity – periodicita ve výchylce i poloze (rovnovážná poloha se nepohybuje)
- kmitající objekt = oscilátor (když kmitá harmonicky (sin, cos) tak harmonický)
  - kmit = těleso se vrátí do původní polohy při stejné orientaci směru (nulté i první derivace)
  - kyv = polovina kmitu, z jedné krajní polohy do druhé
  - perioda = doba jednoho kmitu
  - rovnovážná poloha = poloha kolem, kt. těleso kmitá
  - výchylka = vzdálenost od rovnovážné polohy, rovnováha sil – nulové nulté a druhé derivace

- v 1D: $F = -k \cdot x$

$$m\ddot{x} = -kx \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = \underbrace{x_m}_{\text{amplituda}} \cdot \sin(\underbrace{\omega}_{\text{úhlová rychlost}} \cdot t + \underbrace{\varphi_0}_{\text{fáze}})$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot x$$

Energie kmit. pohybu:

$E = E_k + E_p$

$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A_m^2 \cos^2()$

$E_p = -\int_a^x F dx' = \frac{1}{2}kx^2$

$E(t) = \frac{1}{2}kA^2[\cos^2() + \sin^2()]$

$\underline{E(t) = \frac{1}{2}kA^2}$

- platí princip superpozice: $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$
  - pokud je frekvence (perioda) kmitů stejná $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$:

$$u(t) = u_{1,m} \sin(\omega t + \varphi_1) + u_{2,m} \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Rightarrow u(t) = \sin(\omega t) \cdot \underbrace{[u_{1,m} \cos\varphi_1 + u_{2,m} \cos\varphi_2]}_{B_1} + \cos(\omega t) \cdot \underbrace{[u_{1,m} \sin\varphi_1 + u_{2,m} \sin\varphi_2]}_{B_2}$$

$$\Rightarrow u(t) = B \cdot \sin(\omega t + \varphi), \text{ kde } B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{u_{1,m}^2 + u_{2,m}^2 + 2u_{1,m}u_{2,m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

  - interference = skládání vln
    - konstruktivní – $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$
    - destruktivní – $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$
  - pokud frekvence není stejná = ~~[illegible]~~ kmity blízké frekvence (ale stejná amplituda a fáze = 0)

$$x(t) = 2A \sin(\underbrace{\tfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t}_{\text{vnitřek}}) \cos(\underbrace{\tfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t}_{\text{obal}})$$

- např.: kyvadlo, pružina

Mechanické kmity, kmity v el. obvodech

- reálné mechanické kmity jsou většinou tlumené, případně i s vynucující silou
  - tlumení způsobuje pokles amplitudy – změna celkové energie – disipace
  - při nucených kmitech se vl. kmitání osc. zatlumí a zbyde jen kmitání s periodou vynucující síly

• **tlumené kmitání**: – tlumící síla F_t: tření $F_t = konst.$

úměrná rychlosti $F_t \sim v$ ... laminární

úměrná kvadrátu $F_t \sim v^2$ ... turbulentní

– pro případ laminárního proudění:

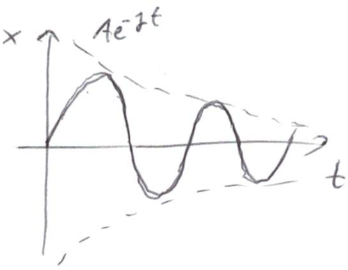
$$m\ddot{x} = -kx - B\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{B}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{, přeznačíme } \frac{B}{m} = 2\gamma \text{, } \frac{k}{m} = \omega_0$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \text{řešení } x(t) = A_0 e^{\alpha t} \text{, kde } \alpha_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\Rightarrow$ různé případy:

- $\gamma^2 > \omega_0^2$ – reálné řešení, oscilátor se zatlumí
- $\gamma^2 \doteq \omega_0^2$ – oscilátor se zatlumí ještě rychlejí
- $\gamma^2 < \omega_0^2$ – tlumené kmitání $x(t) = \underbrace{Ae^{-\gamma t}}_{\text{koeficient útlumu}} \cdot e^{\pm i\omega_0 t}$



– energie kmitání klesá:

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t}$$

• **nucené kmity**: – působí navíc i vynucující síla F_v, vždy i s tlumící silou

– harmonická vynucující síla $F_v = F_0 \sin(\Omega t)$

$$m\ddot{x} = -kx - B\dot{x} + F_v(t) \Rightarrow \underbrace{\ddot{x} + \frac{B}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x}_{\text{vyřešíme homogenní rovnici } x_0} = \underbrace{\frac{F_0}{m}\sin(\Omega t)}_{\text{najdeme partikulární řešení } x_p}$$

$$\Rightarrow x_0 = A e^{-\gamma t} \cdot e^{\pm i\omega t}$$

$$x_p = A_v \sin(\Omega t + \phi),$$

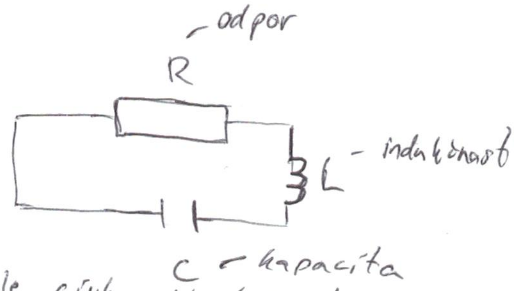
$$\text{kde } A_v = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2 + 4\Omega^2\gamma^2}} \text{, } \phi = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

– za nekonečně dlouhý čas se $x_0(t)$ zatlumí a zbyde jen $x_p = A_v \sin(\Omega t + \phi)$

– může dojít k rezonanci – vynucující síla musí mít frekvenci $\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

6. Periodické děje ve fyzice

Kmity v elektrických obvodech



- např. tlumené kmity v RLC obvodu
- kondenzátor se vybíjí → roste proud → roste pole cívky, klesá proud → indukuje se napětí → nabije to kondenzátor na opačnou polaritu → v cívce se neindukuje napětí → kondenzátor se vybíjí ; rezistor způsobuje tlumení

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad , \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma}\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{q}{LC}}_{\omega_0^2} = 0$$

$$\Rightarrow q = q_0 e^{-\gamma t}\cdot e^{\pm i\omega t} \quad , \quad \omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}}$$

Aplikace periodických dějů – přesné měření fyzikálních veličin

- měření času – u harmonických kmitů se nemění perioda s amplitudou
  - pomalu tlumené kmitání

~~Zavedení času – kmity~~

- určení grav. konstanty: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

* Doplněk – Plškův

Anharmonické kmity – harmonické $\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2$

- obecně: $E_p = \overset{\text{poč. poloha}}{E_0} + \underbrace{E_1 x}_{\text{síla v rovnovážné poloze}} + \underbrace{E_2 x^2}_{\text{harm. aproximace}} + E_3 x^3 + E_4 x^4 + \dots$

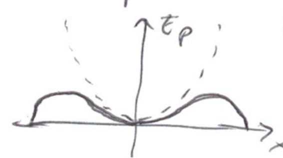
E_3: $E_3 < 0$ – energie chem. vazby

E_4: kladné

vratná síla roste rychleji

T s A klesá

záporné



vratná síla roste pomaleji

T s A roste