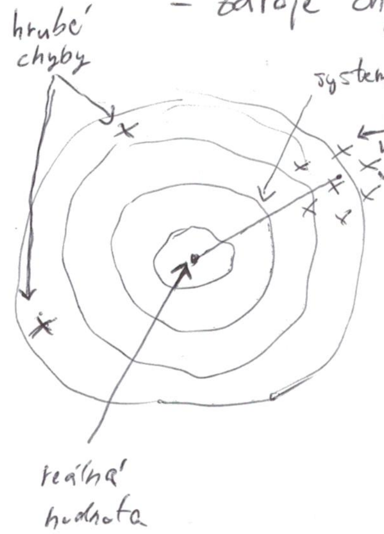
9. Problematika zpracování měření

Správnost a přesnost měření fyz. veličiny a vypočtené veličiny

- z principu nelze měřit úplně přesně – každé měření je zatíženo chybou
  - odchylka od skutečné hodnoty dané fyz. veličiny
    - může mít kladnou i zápornou hodnotu a má stejný rozměr jako veličina
  - zdroje chyb: <u>hrubé chyby</u> – nepozornost, porucha přístroje, nevhodná metody
    - většinou nelze nebo není snadné ji korigovat
      - ze sady měřených hodnot se vylučuje



<u>systematické chyby</u> – nedokonalost přístroje / metody měření (zpracování)
- lze ji korigovat
- při opakovaném měření má podobnou hodnotu

<u>náhodné chyby</u> – ovlivňují měření nepředvídatelně
- nelze vyloučit ani korigovat
  ⇒ měříme vícekrát a statisticky to zpracovat
- náhodné vlivy ~~[illegible]~~

- vždy je ~~[illegible]~~ přesnější měřit veličinu přímo (na jednom měřicím přístroji)
  - pokud chceme určit veličinu z více měřených veličin, chybu určíme ze zákona šíření chyb

• <u>aritmetický průměr</u>: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{\sum_i^N x_i w_i}{\sum_i^N w_i}$, $w_i = K\delta x_i^{-2}$

• <u>směrodatná odchylka</u> (standard deviation): $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i (x_i-\bar{x})^2 \cdot \frac{1}{\sum_i^N w_i}}$

$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$ – odstranění hrubých chyb $|x_i - \bar{x}| > \bar{x} + K(x)$, kde $K(x) = 3\hat{\sigma}$

• <u>nejistota typu A</u> = směrodatná odchylka aritmetického průměru

$$u_A(x) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$ – používá se rozšířená nejistota $U(x) = t_{p,\nu}\, u(x)$

p … pravděpodobnost
$\nu = N-1$ … počet stupňů volnosti

• <u>nejistota typu B</u> – nejistota přístrojů (příp. etalonů/konstant)
- systematické i náhodné chyby
- záleží na typu měřicího přístroje $u_B = \frac{a}{k}$ (a – polovina nejmenšího dílku, k – závisí na typu rozdělení)
- u měřidel el. veličin nejistota závisí na rozsahu i na měřené hodnotě

rozdělení	k	
normální	3	váhy
rovnoměrné	$\sqrt{3}$	metry
Diracovo	1	analogová

- kombinovaná nejistota – spojení statistické nejistoty (u_A) a nejistoty měřidla (u_B)

$$u(x) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$

- zákon šíření nejistoty – pro určení nejistoty nepřímo měřené veličiny

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad u_c(y) = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Bigg|_{[x_1=\bar{x}_1, \dots, x_n=\bar{x}_n]} \cdot u_c^2(x_i)}$$

– speciální případy:

$$y = x_1 \pm x_2 \quad \Rightarrow \quad u_c(y) = \sqrt{u_c^2(x_1) + u_c^2(x_2)}$$

$$y = A \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad u_c(y) = A \cdot u(x_1)$$

$$y = x_1 \cdot x_2^{\pm 1} \quad \Rightarrow \quad r(y) = \sqrt{r^2(x_1) + r^2(x_2)}$$

$$y = x_1^n \quad \Rightarrow \quad r(y) = |n| \cdot r(x_1)$$

– rozšířená nejistota se počítá trochu jinak: $U(y) = t_{p,\nu_{ef}}\, u(y)$, kde

$$\nu_{ef} = \frac{u^4(y)}{\sum_i^n \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad \text{případně} \quad \nu_{ef} = \min(\nu_i)$$

Grafické a numerické zpracování měření veličiny s diskrétním a spojitým spektrem, střední hodnota a disperze

– grafická vizualizace může leckdy pomoci

~~× potřeba minimálně dvě měřené veličiny nebo přečíst a spočítat~~

- graf $x, f(x)$ – aproximace fční závislosti
- histogram – četnost hodnot (u spojitých se dělí do intervalů)

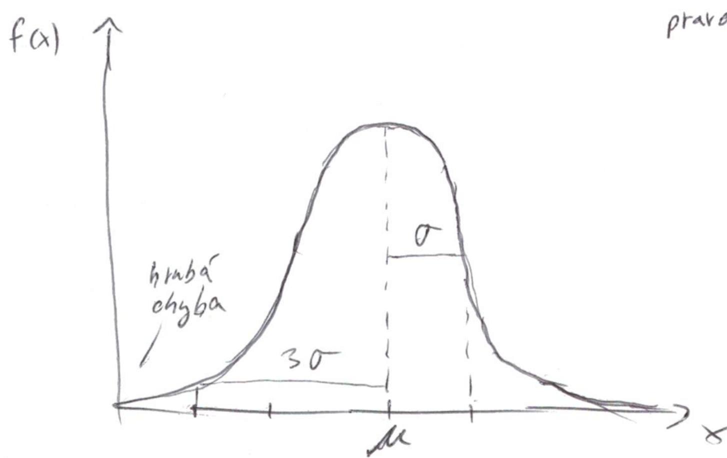
průměrný počet, naměřený počet výskytů

$$P(k,\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

– spektra veličin:
- diskrétní (např. počet částic) – Poissonovo rozdělení
- spojité (rychlost, teplota) – Gaussovo rozdělení

hustota pravděp. – $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

střední hodnota (průměr) (μ), disperze (σ^2)



$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)\,dx \doteq 0{,}683$$

$$P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) \doteq 0{,}997$$

9. Problematika zpracování měření

Aproximace funkčních závislostí polynomy, numerické derivování a integrování, metoda nejmenších čtverců

- aproximace polynomem – fční závislost nahradíme polynom často vyššího řádu
  - užití při interpolaci a extrapolaci – s rozumem
  - pokud reálná fční závislost ~~nen~~ neodpovídá stejnému polynomu nezískáme z aproximace žádnou další informaci
    - => je lepší fitovat přímo dané závislosti (např. exponenciální pokles)
- numerické derivování a integrování
  - **derivování** – tečna ke grafu je nahrazena sečnou blízkých bodů

$$d(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  - tři ekvidistantní body $f(x-h), f(x), f(x+h)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

  - **integrování** – rozdělíme na malinké kousky, kt. následně sečteme
- metoda nejmenších čtverců – hledání závislosti (polynomu) s nejmenším součtem kvadratických vzdáleností od měřených bodů

$$S = \sum_i^n (f(x_i) - y_i)^2 \quad \Rightarrow$$

pro polynom stupně m systém m rovnic

$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m$$

- lineární regrese $f(x) = b_0 + b_1 x \dots$
- nelineární regrese $f(x) = b_0 e^{b_1 x}$

$$b_0 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$