

FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM

Fyzikální praktikum 1

Zpracoval: Tomáš Plšek, 461281

Naměřeno: 11.5.2017

Obor: Astrofyzika

Skupina: Čt, 8:00

Úloha: 4. Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení

$T = 22,5\text{ }^{\circ}\text{C}$

$\varphi = 30,9\text{ }^{\circ}$

$p = 97,95\text{ hPa}$

Úkoly:

1. Změřte tíhové zrychlení reverzním kyvadlem. Porovnejte výsledek s místní hodnotou.
2. Změřte gravitační konstantu Cavendishovými torzními vahami.

1. Úvod

Tíhové zrychlení g je definováno jako zrychlení volného pádu tělesa ve vakuu. Tíhové zrychlení závisí na zeměpisné šířce ϕ a nadmořské výšce H podle empirického vztahu:

$$g = [9,780\,356(1 + 0,005\,288\,5 \sin^2\phi - 0,000\,005\,9 \sin^2 2\phi) - 0,000\,003\,086\,H] \text{ ms}^{-2} \quad (1)$$

Tíhové zrychlení však může kolísat vlivem lokálních nepravidelností a nehomogenit zemského tělesa v řádu 10^{-3} ms^{-2} . Fyzikální tabulky pro Brno udávají hodnotu $g = 9,809\,980\text{ ms}^{-2}$.

Měření gravitační konstanty z definice je však velmi náročné. Obecně lze použít fyzické kyvadlo, jehož perioda je dána vztahem:

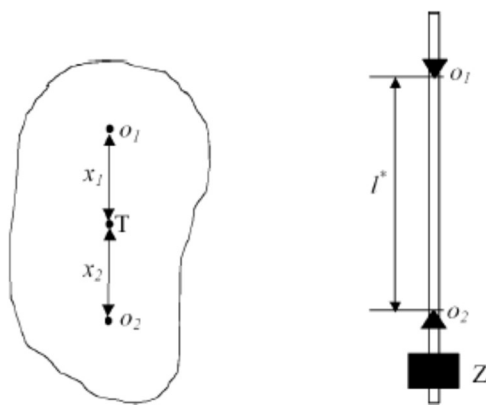
$$T(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi^2 + \frac{11}{3072} \varphi^4 + \frac{173}{737280} \varphi^6 \dots \right), \quad (2)$$

kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení, m je jeho hmotnost a x je vzdálenost těžiště tělesa od osy otáčení. V případě, že výchylka φ je dostatečně malá ($< 5^{\circ}$) jedná se o tzv. nulové kmity a z rovnice (2) tedy zůstává pouze první člen sumy (nezávislý na výchylce).

Gravitační silou na sebe působí každé dvě hmotné částice o hmotnostech m_1 a m_2 ve vzdálenosti r , které lze považovat za hmotné body. Tyto body se podle Newtonova gravitačního zákona budou přitahovat silou:

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3)$$

kde $\kappa = 6,673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitační konstanta.



Obrázek 1: Fyzické kyvadlo a reverzní kyvadlo¹

Pro **reverzní kyvadlo**, které může kmitat vzhledem ke dvěma různým osám o_1 a o_2 tak, že doby kmitu k příslušným osám jsou shodné tzn. $T_1 = T_2$, platí pro dobu kmitů:

$$T_{1,2} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + mx_{1,2}^2}{mgx_{1,2}}} \quad (4)$$

Za předpokladu rovnosti period ($T_1 = T_2$) a po zavedení redukované délky $l = x_1 + x_2$ dostáváme:

$$l = \frac{J_0 + mx_1^2}{mgx_1} = \frac{J_0 + mx_2^2}{mgx_2} \quad (5)$$

Pak tedy:

$$T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6)$$

Cavendishovy váhy jsou založeny na měření momentu gravitačních sil M_{grav} mezi dvěma hmotnými koulemi a dvojicí malých spojených kuliček zavěšených na torzním vlákně. Tíhová síla namáhá vlákno v tahu a gravitační interakce mezi koulemi namáhá vlákno v torzi.

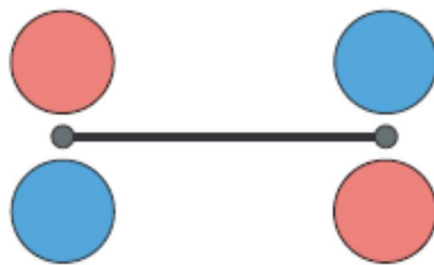
Pro moment gravitačních platí:

$$M_{grav} = 2\kappa(Mm)d \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (7)$$

Vychýlením velkých koulí z původní polohy váhy rozkmitáme. Pro úhlovou frekvenci netlumených kmitů platí vztah (budeme předpokládat, tlumení je minimální):

$$\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}, \quad (8)$$

kde J je moment setrvačnosti soustavy (pouze pohyblivých částí – dvojice kuliček spojených tyčkou na torzním vlákně) a D je direkční moment torzního vlákna.



Obrázek 2: Vychýlení koulí z původní polohy (modrá) do opačné polohy (červená)²

Dvě kuličky o hmotnosti m a poloměru ρ spojené tyčkou ve vzdálenosti středů $2d$ mají vzhledem k ose závěsu moment setrvačnosti:

$$J = 2m \left(\frac{2}{5} \rho^2 + d^2 \right). \quad (9)$$

2. Postup měření

2.1 Měření tíhové zrychlení reverzním kyvadlem

Redukovanou délku (vzdálenost obou os otáčení) změříme svinovacím metrem.

Kyvadlo rozkmitáme a pomocí počítače měříme periodu kmitů. Shodné periody pro závaží nahoře i dole docílíme postupným posouváním závaží, vynášením směrnic v závislosti na poloze závaží a následně odhadem požadované polohy závaží z grafu. Ověříme správnost výsledku pro získanou polohu závaží a z upraveného vztahu (6) dopočteme hodnotu tíhového zrychlení.

2.2 Měření gravitační konstanty Cavendishovými vahami

Rozkmitáme váhy vychýlením dvojice velkých koulí z původní polohy (viz obrázek 2). Na zrcátko, jež se součástí pohyblivé části vah, namíříme laser a jeho odraz pozorujeme na stínítku s měřidlem. Po určitých časových intervalech zaznamenáváme polohu stopy laseru.

Po naměření minimálně 3 maxim proces opakujeme: dvojici velkých koulí dáme do původní polohy a opět zaznamenáváme polohu stopy laseru.

Ze zjištěných maxim metodou 3 kyvů určíme hodnoty posunu rovnovážné polohy a to podle vzorce:

$$\varphi_0 = [(\varphi_1 + \varphi_3)/2 + \varphi_2]/2 \quad (10)$$

Pro jednotlivé posuny od rovnovážných poloh pak platí vztah:

$$\varphi_0 - \varphi'_0 = 4 \frac{M_{grav}}{D}. \quad (11)$$

Po úpravě tedy získáváme vzorec pro výpočet gravitační konstanty:

$$\kappa = \frac{m \left(\frac{2}{5} \rho^2 + d^2 \right) \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 (\varphi_0 - \varphi'_0)}{2d(Mm) \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(4d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}. \quad (12)$$

3. Použité měřicí přístroje

| Měřená veličina | Přístroj | Rozsah | Nejistota |
|-----------------|----------------------------------|--------|-----------|
| vzdálenost | svinovací metr | 500 cm | 0.03 cm |
| vzdálenost | školní pravítko | 30 cm | 0.03 cm |
| vzdálenost | reverzní kyvadlo (poloha závaží) | 14 cm | 0.03 cm |
| čas | optická závora | - | - |
| čas | stopky | - | - |

Tabulka 1: Použité přístroje

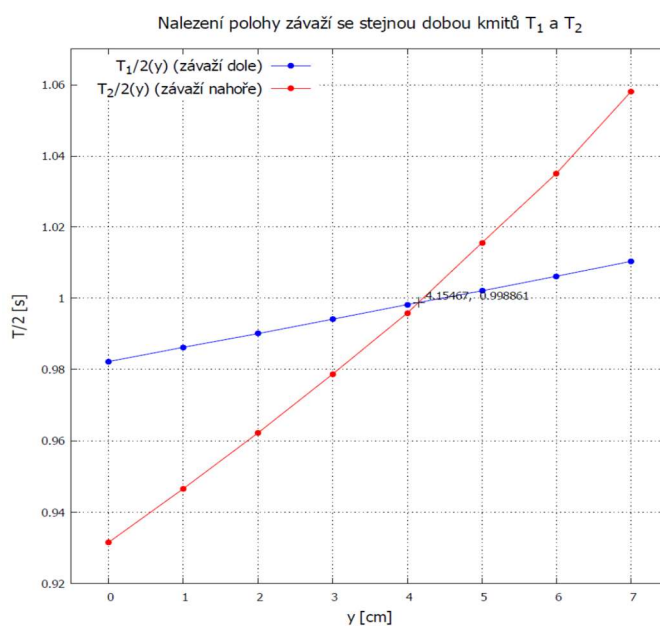
4. Měření

4.1 Měření tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

Pomocí optické závory připojené na sériový port počítače jsme získali hodnoty půlperiod v závislosti na poloze závaží.

| Poloha závaží | Dole | Nahoře |
|---------------|-------------|-------------|
| y [cm] | $T_1/2$ [s] | $T_2/2$ [s] |
| 0 | 0.982 | 0.932 |
| 1 | 0.986 | 0.947 |
| 2 | 0.990 | 0.962 |
| 3 | 0.994 | 0.979 |
| 4 | 0.998 | 0.996 |
| 5 | 1.002 | 1.016 |
| 6 | 1.006 | 1.035 |
| 7 | 1.010 | 1.058 |

Tabulka 2: Hodnoty půlperiod v závislosti na poloze závaží



Graf 1: Nalezení polohy závaží se stejnou periodou kmitů T_1 a T_2

Z grafu vidíme, že požadovaná poloha závaží (aby se perioda kmitů pro závaží dole i nahore rovnala) odpovídá hodnotě $y \doteq 4,15 \text{ cm}$. Pomocí vzorce (6) určíme hodnotu tíhového zrychlení.

$l = 0.995(2) \text{ m}$...redukovaná délka reverzního kyvadla

| Poloha závaží | $T/2 \text{ [s]}$ | $g \text{ [m/s}^2\text{]}$ |
|---------------|-------------------|----------------------------|
| Dole | 0.998880(2) | 9.84(2) |
| Nahore | 0.998884(5) | 9.84(2) |

Tabulka 3: Ověření požadované polohy závaží $y \doteq 4,15 \text{ cm}$

4.1 Měření gravitační konstanty Cavendishovými torzními vahami

Ze získaných hodnot (poloh stop laseru v závislosti na čase) určíme polohu středů (rovnovážné polohy), z rozdílu poloh středů a znalosti kolmé vzdálenosti určíme rozdíl úhlů $\varphi_0 - \varphi_0'$.

| | $x_1 \text{ [cm]}$ | $x_2 \text{ [cm]}$ | $x_3 \text{ [cm]}$ | $x_0 \text{ [cm]}$ |
|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1. měření | 14,5(1) | 37,3(1) | 16,2(1) | 26,3(2) |
| 2. měření | 10,2(1) | 34,3(1) | 11,6(1) | 22,6(2) |

Tabulka 4: Hledání poloh maxim tlumeného kmitání Cavendishových torzních vah

Poloměr kuliček $\rho = 8,19 \text{ mm}$

Hmotnost kuliček $m = 38,3(2) \text{ g}$

Vzdálenost středů kuliček $2d = 100 \text{ mm}$

Hmotnost koule $M = 1,5 \text{ kg}$

Minimální vzdálenost středu koule od těžiště kuliček $r = 46,5 \text{ mm}$

Rozdíl rovnovážných poloh $(\varphi_0 - \varphi_0') = 1,00(8)^\circ$

Perioda $T = 463(5) \text{ s}$

Kolmá vzdálenost vah od stínítka $D = 213,1(3) \text{ cm}$

Po dosazení do vzorce (12) získáváme hodnotu gravitační konstanty:

$$\kappa = 6,3(5) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

5. Závěr

Tíhové zrychlení jsem pomocí reverzního kyvadla stanovil na hodnotu $g = 9,84(2) \text{ m/s}^2$. Na výslednou nejistotu má vliv nejistota měření redukované délky kyvadla (nejistota aritmetického průměru a nejistota měřidla) a nejistota aritmetického průměru při měření času.

Tabulky³ udávají pro Brno hodnotu $g = 9,809980 \text{ m/s}^2$.

Gravitační konstantu jsem pomocí Cavendishových vah určil na $\kappa = 6.3(5)10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Na nejistotu má vliv nejistota měřidla na stínítku (respektive nejistota zapříčiněná velikostí stopy laseru), nejistota svinovacího metru při měření vzdálenosti a nejistota hmotnosti kuliček. Výsledek však ovlivnily i nepřesnosti spojené s měřením času a odhadováním správného momentu pro odečtení polohy stop laseru na stínítku.

Hodnota gravitační konstanty je $\kappa = 6,673 \text{ } 84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

6. Zdroje

¹ ZDENĚK BOCHNÍČEK, JANA JURMANOVÁ, PAVEL KONEČNÝ, ZDENĚK NAVRÁTIL A LUBOŠ POLÁČEK. *Fyzikální praktikum 1, Návodů k úlohám*; Úloha č. 4: Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení, Obrázek 1: Fyzické kyvadlo a reverzní kyvadlo. Brno, 2013. Dostupný z https://is.muni.cz/www/108960/trans/navody/skripta_fp1.pdf.

² ZDENĚK BOCHNÍČEK, JANA JURMANOVÁ, PAVEL KONEČNÝ, ZDENĚK NAVRÁTIL A LUBOŠ POLÁČEK. *Fyzikální praktikum 1, Návodů k úlohám*; Úloha č. 4: Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení, Obrázek 2: Ke stanovení rovnovážné polohy metodou tří kyvů. Brno, 2013. Dostupný z https://is.muni.cz/www/108960/trans/navody/skripta_fp1.pdf.

³ J.BROŽ, V. ROSKOVEC, M. VALOUCH. *Fyzikální a mat. tabulky*. SNTL, Praha, 1980.

⁴ ZDENĚK BOCHNÍČEK, JANA JURMANOVÁ, PAVEL KONEČNÝ, ZDENĚK NAVRÁTIL A LUBOŠ POLÁČEK. *Fyzikální praktikum 1, Návodů k úlohám*; Úloha č. 4: Měření gravitační konstanty a tíhového zrychlení. Brno, 2013. Dostupný z https://is.muni.cz/www/108960/trans/navody/skripta_fp1.pdf.