

Početní praktikum 2

3b. jarní zápočtová písemka¹ doba řešení - 60 minut

1. Rozviňte funkci $f(x) = \begin{cases} x - a & x \in \langle -L, 0) \\ x + a & x \in \langle 0, L) \end{cases}$, (kde a je konstanta) do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a - (a+L)(-1)^k}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

2. Zadané číslo $\sqrt[5]{5 - \frac{15i}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

Výsledek: $10^{1/5} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}\right) \right]$, $10^{1/5} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5})}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$

3. Imaginární část v holomorfní funkce $f(z)$ komplexní proměnné z má tvar $v = x + \sinh x \sin y$, kde x je $\operatorname{Re}(z)$, y je $\operatorname{Im}(z)$. Napište podobu celé funkce $f(z)$ jako funkce z . (2,5 bodu)

Výsledek: $f(z) = iz + \cos(iz) + C$

4. Tenzor deformace E_{ij} lze zapsat formou

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right),$$

kde v_i jsou složky vektoru rychlosti. Napište explicitní podobu prvků E_{xx} a E_{xy} tohoto tenzoru. Napište rovněž divergenci tohoto tenzoru (v kartézské soustavě) pomocí Einsteinovy symboliky. (2,5 bodu)

Výsledek: $E_{xx} = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 \right]$,
 $E_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right]$,
 $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ (Einsteinova notace).

¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.