

Početní praktikum 2

4. jarní zápočtová písemka¹ doba řešení - 180 minut

1. Vypočítejte vektorovou identitu: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$. (2,5 bodu)

Výsledek: 0

2. Vypočítejte plošný integrál 1. druhu:

$$\iint_S x^2 z \, dS, \quad \text{kde } S = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}. \quad (2,5 \text{ bodu})$$

Výsledek: $\frac{\pi R^5}{4}$

3. Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy:

$$S = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in \langle 0, H \rangle\},$$

jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = x^2 + z^2$. (2,5 bodu)

Výsledek: $x_T = 0, y_T = 0, z_T = \frac{4H}{5}$

4. Plášť vodojemu ve tvaru kužele, stojícího „špičkou“ dolů, o poloměru horní vodorovné plochy $R = 7,5$ m a výšce $H = 15$ m je dimenzován tak, aby odolal celkové tlakové síle 2×10^7 N. Je dimenzován dostatečně, nedostatečně, nebo je přibližně na hranici konstrukční odolnosti? Pro vyčíslení uvažujte zaokrouhlené hodnoty konstant $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, násobky π spočítejte přibližně. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

Výsledek: $F_p \approx 2 \times 10^7$ N. Plášť vodojemu je dimenzován na hranici odolnosti.

5. Vypočítejte plošný integrál 2. druhu:

$$\iint_S (x, 1, y) \cdot d\vec{S}, \quad \text{kde } S \text{ je rovinná plocha ve tvaru obdélníka s vrcholy v bodech } (0, 0, 1), (0, 2, 2), (5, 2, 2), (5, 0, 1), \text{ ve směru normály } \vec{\nu} \text{ této plochy jejíž složka } \nu_y \text{ je kladně orientovaná.} \quad (2,5 \text{ bodu})$$

Výsledek: -5

6. Vypočítejte tok Φ vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$ uzavřenou plochou, tvořící povrch tělesa:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0, \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{1}{2}\}. \quad (2,5 \text{ bodu})$$

Výsledek: $\Phi_F = \frac{\pi}{2}$

7. Pomocí Stokesovy věty určete práci síly $\vec{F} = (y^2, xz, y^2)$ působící po obvodu plochy dané předpisem $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, z = 6\}$, po vykonání 1 okruhu z bodu $(R, 0, 6)$ do stejného bodu, v matematicky záporném směru. (2,5 bodu)

Výsledek: $-6\pi R^2$

8. Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} - 2$ v bodě $(2, 1)$. (2,5 bodu)

Výsledek: $2x - y - 2 + \frac{1}{2} [-3(x-2)^2 + 4(x-2)(y-1) - (y-1)^2]$

¹Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.

9. Rozviňte zadanou funkci $f(x) = \sin x \cos x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$, do Fourierovy řady. (2,5 bodu)

Výsledek: $\pi \sin(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{4 - k^2\pi^2} \sin(k\pi x)$

10. Zadané číslo $\sqrt[3]{-5 + \frac{5i}{\sqrt{3}}}$ napište v goniometrickém i v exponenciálním tvaru. (2,5 bodu)

Výsledek: $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right], \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k = 0, 1, 2.$

11. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek ověřte, jestli funkce $z^2 + \ln z + 1$, $z \in \mathbb{C}$, může být holomorfní na otevřených podmnožinách komplexní roviny \mathbb{C} . (2,5 bodu)

Výsledek: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y + \frac{y}{x^2 + y^2},$

Cauchy-Riemannovy podmínky jsou splněny.

12. Tzv. tenzor viskózního (střihového) napětí σ_{ij} lze zapsat formou

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

kde v_i jsou složky vektoru rychlosti, η a λ jsou konstanty (koeficient dynamické viskozity, koeficient dilatační viskozity). Napište explicitní podobu prvků σ_{xx} a σ_{xy} tohoto tenzoru a také divergenci tohoto tenzoru (v kartézské soustavě) pomocí Einsteinovy a vektorové symboliky. (2,5 bodu)

Výsledek: $\sigma_{xx} = 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \lambda \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} \quad (\text{Einsteinova notace}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \eta \Delta \vec{v} + (\eta + \lambda) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (\text{vektorový zápis}).$$