Početní praktikum 2

1b. jarní zápočtová písemka[1]

1. Dokažte platnost vektorové identity:
   $\vec{A} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + \left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{A} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} A^2.$ (2,5 bodu)

   Výsledek: Na obou stranách bude vektor

$$\left[A_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial x}, A_x \frac{\partial A_x}{\partial y} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial y}, A_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial z} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial z}\right].$$

2. Vypočítejte velikost plochy dané předpisem: $S = \left\{x - y^2 - z^2 = 0,\ x \in \langle 0, H \rangle\right\}$. Výsledek vyjádřete v jednotkách délky H. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

   Výsledek: $S = \frac{\pi}{6}\left[(4H+1)^{3/2} - 1\right]$, jde o paraboloid jehož osu tvoří kladná část osy x, s podstavou v rovině yz, s výškou H a s poloměrem podstavy $R = \sqrt{H}$.

3. Vypočítejte polohu středu hmotnosti plochy: $S = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x \leq 0,\ z \leq 0\right\}$, jejíž plošná hustota σ je dána funkcí $\sigma = |z|$. Načrtněte zadanou plochu. (2,5 bodu)

   Výsledek: $x_T = -\frac{4R}{3\pi}$, $y_T = 0$, $z_T = -\frac{2R}{3}$, jedná se o část kulové plochy v 6. a 7. oktantu, se středem v bodě $(0, 0, 0)$, s poloměrem R.

4. Mísa ve tvaru polokoule o poloměru $R = 1\,\mathrm{m}$ je naplněna speciální kapalinou, v níž tlak roste s hloubkou jako $p = \rho_0 g h^{\frac{3}{2}}$, kde ρ_0 je hustota kapaliny na hladině a h je hloubka daného místa v nádobě. Určete přibližně tlakovou sílu, které musí nádoba odolat. Pro vyčíslení uvažujte hodnoty konstant $\rho_0 = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, násobky π spočítejte přibližně. Vliv atmosférického tlaku zanedbejte. (2,5 bodu)

   Výsledek: $F_p \approx 25\,000\,\mathrm{N}$.

[1] Ve výsledcích příkladů s geometrickými nebo fyzikálními veličinami nemusí být uvedeny příslušné jednotky.