Hvězdné atmosféry - řešení

Řešení úlohy 7.1
Nejčastěji uváděný tvar pro Boltzmannovu rovnici je $\log \frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{T}\chi_{AB} + \log \frac{g_B}{g_A}$ respektive pro Sahovu rovnici $\log \frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2}\log T - \frac{5040}{T}\chi_i - \log P_e + \log \frac{2B_{r+1}(T)}{B_r(T)} - 1,48$, kde χ_{AB} je excitační potenciál v eV, χ_i je ionizační potenciál v eV, teplota v K a elektronový tlak v Pa.

Řešení úlohy 7.2
Dosadíme do Boltzmannovy rovnice $\log \frac{N_B}{N_A} = -\frac{5040}{5780}10,16 + 0,6 = -8,26$. Odtud dostaneme $N_B = 5,5.10^{-9}N_A$, přibližně na jednu miliardu vodíkových atomů ve fotosféře připadá jeden, který má obsazenu druhou energetickou hladinu. Při pouze řádových výpočtech lze výraz $\log \frac{g_B}{g_A}$ zanedbat, zpravidla g_B a g_A jsou nevelká čísla stejného řádu.

Řešení úlohy 7.3
Pro Slunce platí $N_B = 5,5.10^{-9}N_A$, u Vegy $N_B = 1,6.10^{-5}N_A$ a pro Rigel $N_B = 1,5.10^{-3}N_A$. S rostoucí teplotou narůstá počet atomů na druhé energetické hladině, odkud při přechodech vznikají absorpční čáry vodíku. Jestliže záměrně modelově neuvažujeme vliv ionizace, s rostoucí teplotou se zvětšuje intenzita vodíkových čar.

Řešení úlohy 7.4
Dosazením obdržíme $N_B = 3,2.10^{-2}N_A$. Při přechodu $B \rightarrow A$ vznikají ,,zelené" nebulární čáry $\mathrm{N_2}$ a $\mathrm{N_1}$.

Řešení úlohy 7.5

Dosazením do Sahovy rovnice při volbě korekčního členu $\log \frac{2B(\mathrm{HI})}{B(\mathrm{H}^-)} = \log 2\frac{2}{1} = 0,602$, $\log \frac{N(\mathrm{HI})}{N(\mathrm{H}^-)} = 7,88 \Rightarrow N\,(\mathrm{HI}) = 7,6.10^7\,N\,(\mathrm{H}^-)$. Pouze jeden z 10^8 vodíkových atomů je ve formě H^-, tedy převážná část fotosféry je složena z neutrálních vodíkových atomů s hustotou asi $10^{17}\,\mathrm{cm}^{-3}$. Pouze ionty H^- však přispívají podstatně ke spojité absorpci. Volné elektrony poskytují kovy s nízkým ionizačním potenciálem $4,34\,\mathrm{eV}$ draslík, $5,14\,\mathrm{eV}$ sodík a $6,11\,\mathrm{eV}$ vápník.

Řešení úlohy 7.6

Do Sahovy rovnice dosadíme $\log \frac{N_1}{N_0} = \frac{5}{2} \log 5780 - \frac{5040}{5780} 5,14 - 0,2 - 0,08 - 1,48$, obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,24$, tedy $\frac{N_1}{N_0} = 1,7.10^3$. Stupeň ionizace je $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,9994$, tedy 99,94% atomů sodíku ve fotosféře Slunce je v ionizovaném stavu.

Řešení úlohy 7.7

Dosazením obdržíme $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,44 \Rightarrow N_1 = 2,7.10^3 N_0$. Celkově $\frac{N_1}{N_1+N_0} = 0,9996$, tudíž 99,96% atomů je Fe II. Při výpočtu počtu atomů Fe III opět použijeme Sahovu rovnici $\log \frac{N_2}{N_1} = -1,18 \Rightarrow N_2 = 6,6.10^{-2} N_1$. Celkově $\frac{N_2}{N_2+N_1} = 0,062$, takže přibližně 6% atomů železa je ve stavu Fe III.

Řešení úlohy 7.8

Dosazením do Sahovy rovnice vypočteme stupeň ionizace u bílého trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 5,05$ při ionizačním potenciálu $\chi_i = 4\,\mathrm{eV}$. Dále řešíme Sahovu rovnici pro obra se zadaným stupněm ionizace, hledaná teplota obra je $T = 7600\,\mathrm{K}$. Obdobně pro ionizační potenciál $\chi_i = 8\,\mathrm{eV}$ dostaneme stupeň ionizace $\log \frac{N_1}{N_0} = 2,65$, hledaná teplota je $T = 7900\,\mathrm{K}$.

Řešení úlohy 7.9

Na základě propočtu stupně ionizace ze Sahovy rovnice pro Na dostaneme u obra $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,69$, u trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 3,32$, dospějeme k závěru, že při ionizačním potenciálu $5,14\,\mathrm{eV}$ je ionizace větší ve fotosféře obra. Obdobně obdržíme u obra $\log \frac{N_1}{N_0} = 1,14$, ve fotosféře trpaslíka $\log \frac{N_1}{N_0} = 1,18$, při ionizačním potenciálu $7,87\,\mathrm{eV}$ železa. Ve fotosféře trpaslíka je ionizace mírně vyšší.

Řešení úlohy 7.10

Dosazením do Sahovy rovnice pro obra obdržíme $\log\frac{N_1}{N_0}=0,78\Rightarrow N_1=6,03\,N_0$, takže počet neutrálních atomů je $\frac{N_0}{N_0+N_1}=0,143$, tudíž pouze 14% atomů je neutrálních. U trpaslíka $\log\frac{N_1}{N_0}=-0,72\Rightarrow N_1=0,19\,N_0$, počet neutrálních atomů je $\frac{N_0}{N_0+N_1}=0,840$, takže 84% atomů vápníku je u trpaslíka neutrálních.

Řešení úlohy 7.11

Zavedeme označení celkového počtu atomů vodíku N_C, počet atomů v základním stavu N_A, v prvním excitovaném stavu N_B, N_0 počet neutrálních atomů a N_1 počet ionizovaných atomů. K určení počtu ionizovaných atomů použijeme Sahovu rovnici a k stanovení rozložení atomů mezi základní první energetickou hladinou a druhou excitovanou hladinou použijeme Boltzmannovu rovnici. Předpokládáme elektronový tlak v atmosféře Slunce $1,6\,\mathrm{Pa}$. Pro vodík ze Sahovy rovnice obdržíme $N_1=7,5.10^{-5}N_0$. Jeden vodíkový iont H II připadá na každých 13 000 neutrálních vodíkových atomů H I v atmosféře Slunce. Dosazením do Boltzmannovy rovnice dostaneme $N_B=5,0.10^{-9}N_A$. Pouze jeden z 200 miliónů vodíkových atomů se nachází na druhé energetické hladině a může vyvolat vznik absorpčních čar Balmerovy série. Celkově $\frac{N_B}{N_C}=\frac{N_B}{N_B+N_A}\frac{N_0}{N_C}=5.10^{-9}$. Vápník Ca I má ionizační potenciál pouze $6,1\,\mathrm{eV}$, tedy poloviční vzhledem k ionizačnímu potenciálu vodíku $13,6\,\mathrm{eV}$. To má podstatný vliv na počet ionizovaných atomů, neboť Sahova rovnice je velmi citlivá k hodnotě ionizačního potenciálu, protože $\frac{\chi_i}{kT}$ je v exponentu a $kT\cong 0,5\,\mathrm{eV}\ll\chi_i$. Ze Sahovy rovnice dostáváme $\frac{N_1}{N_0}=9.10^2$. Pouze jeden z 900 atomů vápníku je Ca I, prakticky téměř všechny atomy vápníku jsou ve stavu Ca II. Z Boltzmannovy rovnice pro obsazení excitovaných hladin obdržíme $N_A=2,6.10^2N_B$. Většina atomů se nachází na základní energetické hladině. Shrnuto převážná většina atomů vápníku je ve stavu Ca II a je na základní energetické hladině, tudíž existují vhodné podmínky pro vznik čar K a H Ca II.

$$\frac{N_A}{N_C} \cong \frac{N_A}{N_A + N_B}\frac{N_1}{N_C} \cong \frac{1}{1+\frac{N_B}{N_A}}\frac{\frac{N_1}{N_0}}{1+\frac{N_1}{N_0}} \cong 0,995.$$

V atmosféře na 5.10^5 vodíkových atomů připadá pouze 1 atom vápníku, ale pouze 5.10^{-9} z vodíkových atomů je neionizováno a nachází se na druhé energetické hladině. Celkově $5.10^5 \times 5.10^{-9} = 2,5.10^{-3}$. Shrnuto ve fotosféře Slunce existuje $400\times$ více vápníkových iontů Ca II na základní energetické hladině umožňujícím vznik spektrálních čar K a H čar než neutrálních vodíkových atomů na druhé energetické hladině, odkud při přechodech mohou vznikat čáry Balmerovy série. Intenzita čar K a H Ca II je způsobena citlivější teplotní závislostí jeho stavů excitace a ionizace, nikoliv celkově větším množstvím vápníku ve fotosféře Slunce. Modelově zjednodušeně neuvažujeme faktor pravděpodobnosti přechodu.

Řešení úlohy 7.12
Dosazením do Inglisova - Tellerova vztahu určíme $n_{\mathrm{B\check{c}}}$.

hvězda	spektrální třída	$\log N_e$	$\log n_{\mathrm{B\check{c}}}$
α Cyg	A2 I	$12,2$	29
Sirius A	A2 V	$13,8$	18
τ Sco	B0 V	$14,6$	14
bílý trpaslík	DA	$16,4$	8

Řešení úlohy 7.13
V atmosférách bílých trpaslíků je mnohem vyšší hustota než v chromosféře Slunce, proto je střední vzdálenost atomů v chromosféře mnohem větší. Vzdálenosti elektronů od jader atomů nemohou být větší než střední vzdálenost mezi atomy. Proto čím je vyšší hustota, tím menší počet energetických hladin je a tudíž tím menší počet balmerovských čar může vzniknout.

Řešení úlohy 7.14
Rozhodující pro pozorovatelnost spektrálních čar je hustota atmosfér.

Řešení úlohy 7.15

Dosadíme do kombinované Boltzmannovy - Sahovy rovnice, která má tvar:

$$\frac{N_1}{N_{0,r}}P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2}}{h^3}(kT)^{5/2}\frac{2B_1(T)}{g_{0,r}}\mathrm{e}^{\frac{\chi_i-\chi_r}{kT}},$$

udávající poměr počtu N_1 jedenkrát ionizovaných atomů k počtu $N_{0,r}$ neutrálních atomů nacházejících se na r-té energetické hladině, χ_i je ionizační potenciál, χ_r je excitační potenciál. Kombinovaná Boltzmannova-Sahova rovnice má logaritmický tvar

$$\log\frac{N_1}{N_{0,r}} = -\frac{5040}{T}(\chi_i-\chi_r) + 2{,}5\log T - 1{,}48 + \log\frac{2B_1(T)}{g_{0,r}} - \log P_e.$$

Dosazením dostaneme $\log\frac{N_1}{N_{0,2}} = 6{,}72$ a při $\log N_{0,2} = 15{,}18$ obdržíme $\log N_1 = 22{,}52 \Rightarrow N_1 = 3{,}3.10^{28}\mathrm{m}^{-3}$. Tedy pouze velmi malá část atomů vodíku zůstane neutrální.

Řešení úlohy 7.16

Platí: $\frac{(\frac{c}{\pi})T_{ef}'^{\,4}}{(\frac{c}{\pi})T_{ef}^{\,4}} = 1-f$, kde f je zlomek celkového toku záření, které je blokováno, v případě Slunce $f = 0{,}14$. Úpravou vztahu dostaneme $T_{\mathrm{ef}} = (1-f)^{-1/4}\,T'_{\mathrm{ef}} \approx \left(1+\frac{f}{4}\right)T'_{\mathrm{ef}}$. Po dosazení $T'_{\mathrm{ef}} = 5780\,\mathrm{K}$ dostaneme $T_{\mathrm{ef}} = 5997\,\mathrm{K}$, efektivní teplota by byla vyšší o $3{,}5\,\%$ tedy asi o $200\,\mathrm{K}$.

Řešení úlohy 7.17

Pro rychlost tepelného pohybu platí $v_{\mathrm{nejpr}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} = 1{,}13\,\mathrm{km.s^{-1}}$. Šířku čáry určíme ze vztahu $\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c}\left(v_{\mathrm{mt}}^2 + v_{\mathrm{nejpr}}^2\right)^{1/2} \cong 10^{-2}\,\mathrm{nm}$.

Řešení úlohy 7.18

Vyjdeme ze vztahů $g = G\frac{M}{r^2}$ a $\mathrm{d}\tau = -\kappa\rho\mathrm{d}r$ a dosadíme do rovnice $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\rho g$.

Řešení úlohy 7.19
Zjednodušeně dosadíme do vztahu pro optickou hloubku $\tau_\lambda = \int_0^s \kappa_{\lambda_1} \rho \mathrm{d}s$.

Řešením dostaneme $s_1 = \frac{\tau_{\lambda_1}}{\kappa_{\lambda_1}\rho} = 103\,\mathrm{km}$, obdobně pro $s_2 = \frac{\tau_{\lambda_2}}{\kappa_{\lambda_2}\rho} = 89\,\mathrm{km}$.

Řešení úlohy 7.20
Teplotní škálová výška je rovna $H_T = \frac{T}{|\mathrm{d}T/\mathrm{d}r|} = 674\,\mathrm{km}$. Střední volná dráha fotonů je $l = \frac{1}{\kappa\rho}$. Při volbě $\kappa = 0,026\,\mathrm{m}^2.\mathrm{kg}^{-1}$ a $\rho = 2,5.10^{-4}\,\mathrm{kg.m}^{-3}$ dostaneme $l = 150\,\mathrm{km}$, což je řádově srovnatelné s H_T. Vzhledem k velikosti střední volné dráhy fotony vycházejí bez interakce z fotosféry. Předpoklad LTE není splňován.

Řešení úlohy 7.21
Z blízkosti okraje disku přichází záření z chladnějších vrstev o teplotě T_0, ve středu disku z vrstev o teplotě T_1, platí $T_1 > T_0$, tedy $B_\nu(T_1) > B_\nu(T_0)$. Proto je střed disku jasnější než okraj. V šedé atmosféře záření všech vlnových délek je zeslabováno stejně, avšak poměr $B_\nu(T_0)/B_\nu(T_1)$ udávající velikost okrajového ztemnění závisí na ν. Protože T_1 se příliš neodlišuje od T_0 užijeme vztahu $\frac{B_\nu(T_1)}{B_\nu(T_0)} \approx \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^\alpha$, kde $\alpha = \alpha(\nu) = \frac{h\nu}{kT_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_0}\right)\right]^{-1}$. Odtud vyplývá, že velikost okrajového ztemnění je určována gradientem teploty v atmosféře. Čím rychleji roste teplota s hloubkou, tím větší je rozdíl T_1 a T_0 a důsledkem je větší okrajové ztemnění. Při konstantním gradientu teploty, t.j. při konstantním poměru T_1/T_0 je ztemnění odlišné na různých vlnových délkách v důsledku rozdílnosti hodnot členu $\frac{h\nu}{kT_0}$. Z analýzy výše uvedených vztahů vyplývá, že v dlouhovlnné oblasti spektra $\frac{h\nu}{kT_0} \ll 1$ je poměr Planckových funkcí roven T_1/T_0, v krátkovlnné oblasti spektra $\alpha \cong \frac{h\nu}{kT_0} \gg 1$ tedy okrajové ztemnění je podstatně větší a narůstá při přechodu ke kratším vlnovým délkám.

Řešení úlohy 7.22
Výšku stejnorodé fotosféry určíme ze vztahu $H = \frac{kT}{g\mu_r m_p}$. Fotosféra Slunce je

složena především z neionizovaného vodíku. Při volbě $T = 6000\,\mathrm{K}$, $\mu_\mathrm{r} \cong 1$ dostaneme $H \cong 200\,\mathrm{km}$. U bílého trpaslíka předpokládáme fotosféru složenou z ionizovaného vodíku, $\mu_\mathrm{r} = 0,5$, pro její výšku obdržíme $H \cong 200\,\mathrm{m}$.

Řešení úlohy 7.23

V hlubších fotosférických vrstvách je při hustotě asi $10^{-4}\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ je počet částic přibližně $10^{22}\,\mathrm{m^{-3}}$. Při normálních podmínkách se v atmosféře Země nachází v $1\,\mathrm{m^3}$ asi 10^{25} částic. Tedy koncentrace v uvažované vrstvě fotosféry je zhruba 10^3 krát menší než v zemské atmosféře. Zatímco ve fotosféře Slunce jde především o atomy neionizovaného vodíku, v atmosféře Země jde o molekuly N_2 a O_2.

Řešení úlohy 7.24

Počet částic v sloupci o výšce $300\,\mathrm{km}$ a průřezu $1\,\mathrm{m^2}$ je $3.10^5 10^{23} = 3.10^{28}$ částic. Při průměrné teplotě fotosféry $6\,000\,\mathrm{K}$ je energie jedné částice $\frac{3}{2}kT \cong 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Celková energie ve vytčeném sloupci je $E \cong 10^{-19} 3.10^{28} \cong 3.10^9\,\mathrm{J}$. Tedy za čas $t \cong \frac{E}{F} \cong 50\,\mathrm{s}$ by došlo k vyčerpání zásob energie a nutně bychom pozorovali změny ve vyzařování a teplotě povrchu Slunce.

Řešení úlohy 7.25

Konvekce ve fotosféře nastane za podmínky $\left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_\mathrm{ad} < \left|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right|_\mathrm{z}$. Po dosazení $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{g\mu p}{\mathscr{R}T}$ a úpravě obdržíme $\left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln \mathrm{d}}\right)_\mathrm{ad} < \left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p}\right)_\mathrm{z}$. Za předpokladu adiabatických změn $p^{1-\gamma}T^\gamma = \mathrm{konst.}$ při $\gamma = \frac{5}{3}$ dostaneme $\left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p}\right)_\mathrm{ad} = \frac{2}{5}$.

Z rovnice zářivé rovnováhy při $\kappa = \mathrm{konst.}$ nalezneme $\left(\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}\ln p}\right)_\mathrm{z} = \frac{1}{4}$. Tedy úvodní nerovnice není splněna a konvekce nenastává.

Řešení úlohy 7.26

Konvektivní tok energie je roven $F_k \cong c_p \rho v \Delta T \cong 10^5\,\mathrm{J.s^{-1}.m^{-2}}$. Tok energie přenášené zářením je $F_\mathrm{r} \cong \frac{16\sigma T^3}{3\kappa\rho}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} \cong 2,3.10^7\,\mathrm{J.s^{-1}.m^{-2}}$. Výrazně převládá přenos energie zářením. Konvektivní přenos může narůstat při změně κ či při nárůstu stupně ionizace s hloubkou.

Řešení úlohy 7.27

Balmerovský skok při $\lambda = 364{,}6\,\mathrm{nm}$ ve spojitém spektru je způsoben tím, že v krátkovlnné části spektra od této vlnové délky je záření schopné ionizovat atomy vodíku počínaje z druhé energetické hladiny. V dlouhovlnné části spektra od tohoto skoku je možná ionizace pouze z třetí a vyšších energetických hladin. Fotosféra je v důsledku toho na vlnové délce $\lambda_2 = 368{,}6\,\mathrm{nm}$ více průzračná a lze ji pozorovat do větší hloubky, tedy vrstvy s vyšší teplotou, záření má vyšší intenzitu. Neprůzračnost fotosféry je velká v krátkovlnné části od skoku, např. na vlnové délce $\lambda_1 = 360{,}6\,\mathrm{nm}$, záření přichází téměř ze stejných vrstev položených v blízkosti povrchu. Proto je okrajové ztemnění malé. V dlouhovlnné části spektra od skoku přichází záření ve středu disku z relativně větších hloubek, z fotosférických vrstev o vyšší teplotě. Na okraji disku přichází záření z vrstev blízko povrchu. Shrnuto je okrajové ztemnění na delších vlnových délkách výraznější, což platí pouze v optickém oboru.