

Statistická fyzika – ■-domácí úkol #07

■ Info

1. Ve čtvrtek v 10:00 konzultace přes Skype z učebny F4, kde budu na tabuli počítat příklady. V případě zájmu můžeme takové konzultace pořádat každý týden.

■ Příklady

1. Odvození Maxwellova-Boltzmanova zákona

Ukažte, že v klasickém případě je možné z grandkanonického rozdělení jedné částice odvodit Maxwellův-Boltzmanův zákon rozložení rychlostí.

2. Odvození Planckova zákona

Ukažte, že je možné z grandkanonického rozdělení pro částice s $\mu = 0$ odvodit Planckův zákon.

3. Bosonový a Fermionový integrál

Dokažte rovnost

$$I_f(m) = \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^{m-1}}{\exp(x) + 1} = (1 - 2^{1-m}) \zeta(m) \cdot \Gamma(m), \quad (1)$$

a

$$I_b(m) = \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^{m-1}}{\exp(x) - 1} = \zeta(m) \cdot \Gamma(m), \quad (2)$$

kde $\zeta(m)$ je Riemannova funkce

$$\zeta(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}.$$

4. Vlastnosti funkcí

Definujme funkce

$$B_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{\exp(x-y) - 1}, \quad (3)$$

a

$$F_n(y) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dx \frac{x^{n-1}}{\exp(x-y) + 1}. \quad (4)$$

Pro tyto funkce dokažte

$$\frac{dB_{n+1}(y)}{dy} = B_n(y),$$

a

$$\frac{dF_{n+1}(y)}{dy} = F_n(y).$$

■ Domácí úkol

1. Kdyby byl vesmír obrovská dutina...

Představte si, že vesmír je sférická dutina s poloměrem 10^{28} cm a neprůchodnými stěnami.

- (a) Pokud je teplota uvnitř dutiny 3 K, určete celkový počet fotonů ve vesmíru.
- (b) Pokud by teplota byla 0 K a vesmír obsahoval 10^{80} elektronů ve Fermiho rozdělení, určete Fermiho hybnost těchto elektronů.

2. n-rozměrný vesmír

V našem tří-rozměrném vesmíru známe následující výsledky ze statistické fyziky a termodynamiky:

- (a) Hustota energie záření černého tělesa závisí na teplotě jako T^α , kde $\alpha = 4$.
- (b) Poměr tepelné kapacity za konstantního tlaku a tepelné kapacity za konstantního objemu je v jednoatomovém plynu roven $\gamma = 5/3$.

Odvoďte analogické výsledky (mj. i co jsou α a γ) ve vesmíru o n rozměrech.