

## Příklady z termodynamiky – 2. test

1. Vzduchoplavecký balon naplněný héliem vystoupil z místa, kde byla teplota  $T_1 = 290 \text{ K}$  a tlak  $p_1 = 98,5 \text{ kPa}$  do výšky, kde byla teplota  $T_2 = 260 \text{ K}$  a tlak  $p_2 = 86,5 \text{ kPa}$ . Jak velký byl objem balonu  $V_2$  ve výši, jestliže na počátku byl objem  $V_1 = 950 \text{ m}^3$ ?

ŘEŠENÍ: Ze stavových rovnic ideálního plynu pro obě uvažované situace rovnou získáme hledaný objem

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow V_2 = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot p_2} = 970 \text{ m}^3.$$

Objem balonu je  $V_2 = 970 \text{ m}^3$ .

2. Plyn zaujímá při tlaku  $p_1 = 0,1 \text{ MPa}$  a teplotě  $T_1 = 293 \text{ K}$  objem  $V_1 = 830 \text{ l}$ . Na jeho stlačení vynaložíme práci  $W = 166,8 \text{ kJ}$ . Určete výsledné hodnoty tlaku  $p_2$ , objemu  $V_2$  a teploty  $T_2$ . Poissonova konstanta pro příslušný děj probíhající za tepelné izolace je  $\kappa = 1,25$ .

ŘEŠENÍ: Využijeme vzorec, jenž je pro práci vykonanou při adiabatickém ději s plynem odvozen v úloze 5 této sady příkladů (tam se sice jedná o expanzi, jediný rozdíl při stlačení je však ve znaménku). Proto platí

$$W = -\frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{-\kappa + 1} \cdot (V_2^{-\kappa+1} - V_1^{-\kappa+1}) \rightarrow V_2^{-\kappa+1} = -\frac{W \cdot (-\kappa + 1)}{p_1 \cdot V_1^\kappa} + V_1^{-\kappa+1} \rightarrow$$

$$V_2 = \sqrt[-\kappa+1]{-\frac{W \cdot (1-\kappa)}{p_1 \cdot V_1^\kappa} + V_1^{-\kappa+1}} = 0,163 \text{ m}^3.$$

Pomocí Poissonova zákona pak již snadno spočteme výsledný tlak a užitím stavové rovnice poté i výslednou teplotu

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa \rightarrow p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V_2^\kappa} = 765000 \text{ Pa} = 765 \text{ kPa}.$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2 \cdot T_1}{p_1 \cdot V_1} = 440 \text{ K}.$$

Výsledné hodnoty stavových veličin jsou:  $p_2 = 765 \text{ kPa}$ ,  $V_2 = 0,163 \text{ m}^3$  a  $T_2 = 440 \text{ K}$ .

3. Izobarickým dějem zvýšil  $n = 1 \text{ mol}$  hélia (ideální plyn) svoji teplotu z  $T_1 = 273 \text{ K}$  na  $T_2 = 373 \text{ K}$ . Jakou práci  $W$  přitom vykonal a jaké teplo  $Q$  přitom přijal?

ŘEŠENÍ: Hélium má jakožto jednoatomový ideální plyn molární tepelnou kapacitu při stálém objemu  $C_V = \frac{3}{2} \cdot R$ . Molární tepelnou kapacitu při stálém tlaku, již budeme potřebovat při výpočtu

přijatého tepla při izobarickém ději spočteme pomocí Meyerova vztahu  $C_P = C_V + R = \frac{5}{2} \cdot R$ . Pro přijaté teplo pak bude v souladu s tím, jak je definována molární tepelná kapacita, platit vztah

$$Q = n \cdot C_P \cdot (T_2 - T_1) = n \cdot \frac{5}{2} \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = 2100 \text{ J.}$$

K určení vykonané práce použijeme 1. termodynamický zákon, podle něhož musí být nárůst vnitřní energie  $\Delta U$  roven rozdílu dodaného tepla a vykonané práce. Platí tedy  $\Delta U = Q - W$ . Změnu vnitřní energie však můžeme snadno spočítat podle vzorce  $\Delta U = n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$ . Po dosazení získáváme

$$\Delta U = Q - W \rightarrow W = Q - \Delta U \rightarrow W = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) - \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = 831 \text{ J.}$$

Plyn vykonal práci  $W = 831 \text{ J}$  a přijal teplo  $Q = 2100 \text{ J}$ .

**4.** Kolik tepla  $Q$  musíme dodat heliu o objemu  $V = 3 \text{ l}$ , aby při stálém tlaku  $p = 0,2 \text{ MPa}$  zvětšilo svůj objem na dvojnásobný ( $V_2 = 2 \cdot V_1$ ).

**ŘEŠENÍ:** Stejně jako v předchozí úloze pokládáme helium za ideální plyn mající molární tepelnou kapacitu při stálém objemu  $C_P = \frac{5}{2} \cdot R$ . Díky tomu můžeme spočítat při izobarickém ději dodané teplo podle vztahu

$$Q = n \cdot C_P \cdot (T_2 - T_1) = n \cdot \frac{5}{2} \cdot R \cdot (T_2 - T_1).$$

Problém je v tom, že neznáme ani látkové množství ani to, o kolik se změnila teplota. Víme však, že při izobarickém ději platí Charlesův zákon, podle něhož je  $\frac{V}{T} = \text{konst.}$  Díky tomu se teplota musela zvýšit stejně jako objem na dvojnásobek. Platí tedy vzorec  $T_2 = 2 \cdot T_1$ . Dále můžeme vyjádřit látkové množství ze stavové rovnice ideálního plynu pro situaci na začátku uvažovaného děje, čímž získáme vztah  $n = \frac{p \cdot V_1}{R \cdot T_1}$ . Po dosazení do výše uvedeného vzorečku pak můžeme psát

$$Q = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \cdot \frac{p \cdot V_1}{R \cdot T_1} \cdot R \cdot (2 \cdot T_1 - T_1) = \frac{5}{2} \cdot p \cdot V_1 = 1500 \text{ J.}$$

Musíme dodat  $Q = 1500 \text{ J}$  tepla.

**5.** Vodík je dvouatomový plyn, jehož  $C_V = \frac{5}{2} \cdot R$ . Vyplňuje objem  $V_1 = 100 \text{ cm}^3$  při tlaku  $p_1 = 51 \text{ kPa}$ . Určete práci, kterou tento plyn vykoná, expanduje-li na objem  $V_2 = 5 \cdot V_1$ .

- a) izotermicky
- b) adiabaticky

**ŘEŠENÍ:** a) Při konstantním tlaku platí pro vykonanou práci vzorec  $W = p \cdot (V_2 - V_1)$ . V našem případě však tlak konstantní není, což znamená, že budeme muset využít obecnější vztah

$$W_i = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV. \text{ K tomu, abychom jej mohli prakticky použít, musíme nejprve vyjádřit tlak jako}$$

funkci objemu. K tomu nám pomůže jednoduchý důsledek stavové rovnice pro izotermické děje

zvaný Boyle-Mariottův zákon :  $p \cdot V = konst \rightarrow p_1 \cdot V_1 = p \cdot V \rightarrow p = \frac{p_1 \cdot V_1}{V}$ . Po dosazení získáváme

$$W_i = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1}{V} dV = p_1 \cdot V_1 \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln 5 = 8,21 \text{ J.}$$

b) Opět budeme vzhledem k nekonstantnosti tlaku používat vzorec  $W_a = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$ . K vyjádření  $p$  jako funkce  $V$  nám tentokrát pomůže Poissonův zákon platící pro adiabatické (tepelně izolované) děje:

$$p \cdot V^\kappa = konst \rightarrow p_1 \cdot V_1^\kappa = p \cdot V^\kappa \rightarrow p = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa}.$$

Musíme proto určit Poissonovu konstantu daného plynu. K tomu nám pomůže jednak její definiční vztah  $\kappa = \frac{C_P}{C_V}$  a jednak Meyerův vztah  $C_P = C_V + R$ . Po dosazení získáváme

$$\kappa = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{\frac{5}{2} \cdot R + R}{\frac{5}{2} \cdot R} = \frac{7}{5}. \text{ Nyní již můžeme dosadit do základního vzorce pro práci}$$

$$W_a = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{V^\kappa} dV = p_1 \cdot V_1^\kappa \cdot \frac{1}{-\kappa + 1} \cdot [V^{-\kappa + 1}]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{-\kappa + 1} \cdot (V_2^{-\kappa + 1} - V_1^{-\kappa + 1}) = 6,05 \text{ J.}$$

Při izotermické expanzi se vykoná práce  $W_i = 8,21 \text{ J}$ , při adiabatické pak  $W_a = 6,05 \text{ J}$ .

**6.** Oxid uhličitý je uchováván v ocelové láhvi o objemu  $V = 22 \text{ l}$  při teplotě  $T_1 = 290 \text{ K}$  a tlaku  $p_1 = 2 \text{ MPa}$ . Odhadněte jeho výslednou teplotu  $T_2$ , rozpne-li se uvedený plyn po otevření kohoutku na tlak atmosférický  $p_2 = 101325 \text{ Pa}$ . Polytropický koeficient proběhlého děje je  $\eta = 1,293$ .

**ŘEŠENÍ:** Vyjdeme z Poissonova zákona, z něhož vyjádříme výsledný objem  $V_2$

$$p_1 \cdot V_1^\eta = p_2 \cdot V_2^\eta \rightarrow V_2 = V_1 \sqrt[\eta]{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Získané vyjádření dosadíme do stavové rovnice ideálního plynu a po jednoduché úpravě získáme hledanou výslednou teplotu

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \cdot \sqrt[\eta]{\frac{p_1}{p_2}} \rightarrow T_2 = \frac{p_2 \cdot T_1}{p_1} \cdot \sqrt[\eta]{\frac{p_1}{p_2}} = 147 \text{ K.}$$

Výsledná teplota je  $T_2 = 147 \text{ K}$ .

7. Určete měrné tepelné kapacity  $c_v$  a  $c_p$  neznámého plynu, víte-li, že při teplotě  $T = 293 \text{ K}$  a tlaku  $p = 100 \text{ kPa}$  je jeho hustota  $\rho = 1,27 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a Poissonova konstanta plynu je  $\kappa = 1,4$ . Univerzální plynová konstanta je  $R = 8,31$

ŘEŠENÍ: Vyjdeme klasicky z Meyerova vztahu  $C_p = C_v + R$ , který dává do souvislosti molární tepelné kapacity při stálém objemu  $C_v$  a při stálém tlaku  $C_p$ . V naší úloze však máme určovat měrné a nikoliv molární tepelné kapacity. Z tohoto důvodu Meyerův vztah vydělíme molární hmotností plynu  $M_m$ , čímž dostaneme výraz

$$\frac{C_p}{M_m} = \frac{C_v}{M_m} + \frac{R}{M_m} \rightarrow c_p = c_v + \frac{R}{M_m}.$$

Nyní je potřeba do výpočtu nějakým způsobem zakomponovat zadanou Poissonovu konstantu, pro níž platí vztah  $\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v}$ . To uděláme tak, že výše uvedený vztah vydělíme měrnou tepelnou kapacitou při stálém objemu  $c_v$ . Po úpravě pak dostáváme:

$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v}{c_v} + \frac{R}{c_v \cdot M_m} \rightarrow \kappa = 1 + \frac{R}{c_v \cdot M_m} \rightarrow c_v = \frac{R}{M_m \cdot (\kappa - 1)}.$$

V tuto chvíli již máme vzorec pro hledanou tepelnou kapacitu  $c_v$ . Je však ještě třeba spočítat zatím neznámou molární hmotnost plynu  $M_m$ . K tomu nám velmi dobře poslouží stavová rovnice ideálního plynu. Bude platit:

$$p \cdot V = \frac{m}{M_m} \cdot R \cdot T \rightarrow p \cdot M_m = \frac{m}{V} \cdot R \cdot T \rightarrow M_m = \frac{\rho \cdot R \cdot T}{p}.$$

Dosazením do získaného výrazu pro tepelnou kapacitu pak dostáváme:

$$c_v = \frac{R}{M_m \cdot (\kappa - 1)} = \frac{R}{\frac{\rho \cdot R \cdot T}{p} \cdot (\kappa - 1)} = \frac{p}{\rho \cdot T \cdot (\kappa - 1)} = 671,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Pro měrnou tepelnou kapacitu při stálém tlaku  $c_p$  pak s užitím Meyerova vztahu okamžitě získáváme:

$$c_p = \kappa \cdot c_v = 940,5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Měrná tepelná kapacita neznámého plynu při stálém objemu je  $c_v = 671,8 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , jeho měrná tepelná kapacita při stálém tlaku je pak  $c_p = 940,5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

8. Kolik tepla  $Q$  je nutné odebrat  $m = 56 \text{ g}$  dusíku, abychom ho při teplotě  $T = 300 \text{ K}$  izotermicky stlačili z tlaku  $p_1 = 100 \text{ kPa}$  na tlak  $p_2 = 500 \text{ kPa}$ ? Molární hmotnost dusíku je  $M_m = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**ŘEŠENÍ:** Při izotermickém ději se nemění vnitřní energie plynu, což má v souladu s 1. termodynamickým zákonem za následek, že odebrané teplo bude rovno absolutní hodnotě práce

vykonané při stlačování plynu, jenž je rovna  $W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$ . Tento vztah však není v tomto případě

pro výpočet příliš výhodný, protože obsahuje jako integrační meze objemy, jež nemáme zadány. Proto zdiferencujeme stavovou rovnici a následně vyjádříme meze pomocí tlaku

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \rightarrow p \cdot dV + V \cdot dp = n \cdot R \cdot dT ; dT = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \cdot dV = -V \cdot dp \rightarrow W = - \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp$$

Při výpočtu jsme využili skutečnost, že jde o izotermický děj. Objem vyjádříme z Boyleva – Mariottova zákona:  $p_1 \cdot V_1 = p \cdot V \rightarrow V = \frac{p_1 \cdot V_1}{p}$ . Neznámý počáteční objem  $V_1$  vypočítáme ze stavové rovnice ideálního plynu:

$$p_1 \cdot V_1 = \frac{m}{M_m} \cdot R \cdot T_1 \rightarrow V_1 = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{p_1 \cdot M_m}.$$

Tím získáváme

$$W = - \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp = -p_1 \cdot V_1 \cdot \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{m \cdot R \cdot T_1}{M_m} \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = -8025 \text{ J} \rightarrow Q = 8025 \text{ J}.$$

Je třeba odebrat teplo  $Q = 8025 \text{ J}$ .

**9.** Píst ve válci stroje se posunul o délku  $\Delta l = 10 \text{ cm}$ , čímž se tlak ve válci zvětšil z  $p_1$  na  $p_2 = 5 \cdot p_1$ . Celý děj probíhal adiabaticky. Určete počáteční objem vzduchu  $V_1$  ve válci, je-li plocha pístu  $S = 30 \text{ cm}^2$ . Poissonova konstanta daného plynu je  $\kappa = 1,4$ .

**ŘEŠENÍ:** Zvětšení tlak bude mít za následek zmenšení objemu, a to o  $\Delta V = S \cdot \Delta l$ . Pro adiabatický děj dále platí Poissonův zákon, jenž můžeme zapsat ve tvaru

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa \rightarrow \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa = \frac{p_2}{p_1} \rightarrow V_2 = \sqrt[\kappa]{\frac{p_1 \cdot V_1^\kappa}{p_2}} = V_1 \cdot \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}}.$$

Díky tomu můžeme psát

$$V_1 - V_2 = S \cdot \Delta l \rightarrow V_1 - V_1 \cdot \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}} = S \cdot \Delta l \rightarrow V_1 = \frac{S \cdot \Delta l}{\left( 1 - \sqrt[\kappa]{\frac{p_1}{p_2}} \right)} = 0,44 \text{ l}.$$

Počáteční objem plynu byl  $V_1 = 0,44 \text{ l}$ .

**10.** Kolik tepla  $Q$  musíme odebrat, chceme-li stlačit  $V_1 = 5 \text{ l}$  vzduchu normálního tlaku  $p_1 = 101325 \text{ Pa}$  na objem  $V_2 = 1 \text{ l}$  a udržovat přitom konstantní teplotu.

ŘEŠENÍ: Při konstantní teplotě se nemění vnitřní energie, což v souladu s 1. termodynamickým zákonem znamená, že odebrané teplo bude číselně rovno práci vykonané při stlačování plynu. K jejímu výpočtu budeme vzhledem k nekonstantnosti tlaku nuceni použít vztah

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV. \text{ Za tlak dosadíme klasicky z Boyle – Mariottova zákona platného pro izotermický}$$

$$\text{děj } p_1 \cdot V_1 = p \cdot V \rightarrow p = \frac{p_1 \cdot V_1}{V}.$$

Tím získáváme

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1}{V} \cdot dV = p_1 \cdot V_1 \cdot [\ln V]_{V_1}^{V_2} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -815 \text{ J} \rightarrow Q = 815 \text{ J}.$$

Je třeba odebrat teplo  $Q = 815 \text{ J}$ .

**11.** Vzduch o objemu  $V_1 = 10 \text{ l}$ , teplotě  $T_1 = 273 \text{ K}$  a tlaku  $p_1 = 100 \text{ kPa}$  nejprve izotermicky stlačíme na objem  $V_2 = \frac{1}{5} \cdot V_1$  a pak adiabaticky rozpne na dvojnásobek původního objemu  $V_3 = 2 \cdot V_1$ . Jaká bude výsledná teplota  $T_3$  po adiabatické expanzi a jakou práci  $W$  plyn vykonal při celém ději? Poissonova konstanta pro vzduch je  $\kappa = 1,4$ .

ŘEŠENÍ: Je jasné, že při stlačení se teplota nezmění (jde o izotermický děj!) a bude tedy platit relace  $T_1 = T_2$ . Při následném adiabatickém ději je splněn Poissonův zákon, jenž lze v našem případě psát ve tvaru  $V^{\kappa-1} \cdot T = \text{konst}$  (tento tvar lze získat jednoduchou úpravou ze základního vyjádření Poissonova zákona  $p \cdot V^{\kappa} = \text{konst}$ ). Po úpravě a dosazení za  $V_2$  a  $V_3$  získáváme

$$V^{\kappa-1} \cdot T = \text{konst} \rightarrow V_2^{\kappa-1} \cdot T_2 = V_3^{\kappa-1} \cdot T_3 \rightarrow T_3 = \left( \frac{\frac{1}{5} \cdot V_1}{2 \cdot V_1} \right)^{\kappa-1} \cdot T_2 = 0,1^{\kappa-1} \cdot T_2 = 108,7 \text{ K}.$$

Celková práce  $W$  vykonaná plynem je tedy dána součtem  $W_1 + W_2$ , kde  $W_1$  je velikost práce při izotermickém stlačení a  $W_2$  velikost práce při adiabatické expanzi. S využitím vztahů odvozených pro práci u izotermického a adiabatického děje v příkladu 5 lze rovnou psát

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{p_2 \cdot V_2^{\kappa}}{-\kappa + 1} \cdot (V_3^{-\kappa+1} - V_2^{-\kappa+1}) = \\ &= p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{1}{5} + \frac{5 \cdot p_1 \cdot \left( \frac{1}{5} \cdot V_1 \right)^{\kappa}}{-\kappa + 1} \cdot \left[ (2 \cdot V_1)^{-\kappa+1} - \left( \frac{1}{5} \cdot V_1 \right)^{-\kappa+1} \right] = -104 \text{ J}. \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme provedli dosazení za objemy  $V_2$  a  $V_3$  a využili faktu, že při izotermickém ději platí, že součin objemu a tlaku je konstantní (tzv. Guy – Lussacův zákon). Díky tomu jsme získali vztah  $p_2 = 5 \cdot p_1$ . (objem se pětkrát zmenšil, tlak díky tomu musel pětkrát vzrůst...).

Výsledná teplota je  $T_3 = 108,7 \text{ K}$ . Plyn vykonal práci  $W = -104 \text{ J}$ .

**12.** Původní tlak plynu byl  $p_1 = 100 \text{ kPa}$  a po polytropické kompresi vzrostl na  $p_2 = 8 \cdot p_1$ . Jeho původní objem  $V_1 = 20 \text{ m}^3$  se při tom zmenšil na  $V_2 = \frac{1}{4} \cdot V_1$ . Určete polytropický exponent  $\eta$  práci  $W$ , kterou bylo třeba při stlačení vykonat.

**ŘEŠENÍ:** Pro polytropický děj platí vztah  $V^{\eta-1} \cdot T = \text{konst}$  (jde v podstatě o Poissonův zákon, pouze s tím rozdílem, že exponent  $\eta$  není na rozdíl od klasického adiabatického případu dán podílem tepelných kapacit při stálém tlaku a objemu). Díky tomu můžeme psát

$$p_1 \cdot V_1^\eta = p_2 \cdot V_2^\eta = 8 \cdot p_1 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot V_1\right)^\eta \rightarrow 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^\eta \cdot 8 \rightarrow$$

$$\log \frac{1}{8} = (\eta) \cdot \log \frac{1}{4} \rightarrow \eta = \frac{\log \frac{1}{8}}{\log \frac{1}{4}} = 1,5.$$

Při výpočtu jsme použili známé pravidlo pro počítání s logaritmy ve tvaru  $\log a^b = b \cdot \log a$ . Při výpočtu vykonané práce opět vyjdeme z toho, že pro polytropický děj platí analogie Poissonova zákona. Díky tomu bude postup stejný jako u adiabatického děje. V souladu s částí b) příkladu 5 získáváme

$$W_p = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 \cdot V_1^\eta}{V^\eta} dV = p_1 \cdot V_1^\eta \cdot \frac{1}{-\eta+1} \cdot \left[V^{-\eta+1}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 \cdot V_1^\eta}{-\eta+1} \cdot (V_2^{-\eta+1} - V_1^{-\eta+1}) = 4 \text{ MJ}.$$

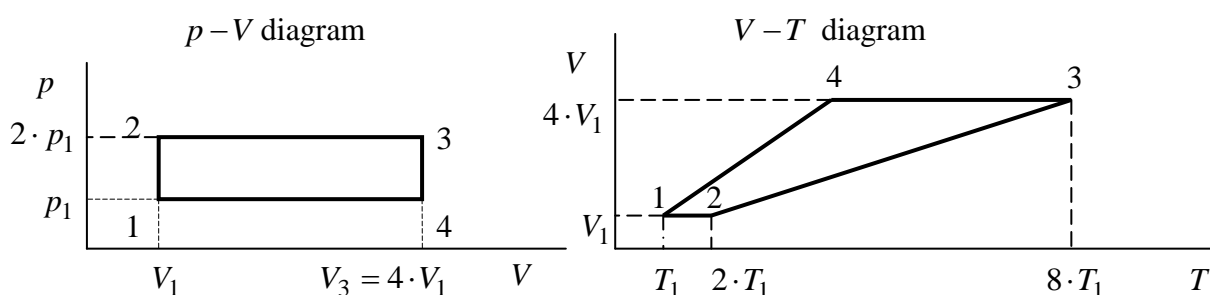
Exponent příslušného polytropického děje je  $\eta = 1,5$ , vykonaná práce poté  $W_p = 4 \text{ MJ}$ .

**13.** V  $p-V$  diagramu nakreslete cyklus 1234 skládající se ze dvou izochor (12,34) a dvou izobar (23,41). Předpokládejte, že počáteční stav je definován veličinami  $p_1, V_1$  a dále, že platí  $p_2 = 2 \cdot p_1, V_3 = 4 \cdot V_1$ . Uvedený cyklus poté překreslete ještě do diagramu  $V-T$ .

**ŘEŠENÍ:** Nejprve nakreslíme do diagramu počáteční bod 1 daný souřadnicemi  $V_1, p_1$  (tlak vynášíme na osu y, objem pak na osu x!). Děj 12 je izochorický, což znamená, že se objem nemění a grafem je tedy úsečka rovnoběžná s osou y. Tím se dostaneme do bodu 2 mající souřadnice  $V_2 = V_1, p_2 = 2 \cdot p_1$ . Následuje izobarický děj 23, kde se nemění tlak, a proto je grafem úsečka rovnoběžná s osou x. Vzniklý bod 3 má souřadnice  $V_3 = 4 \cdot V_1, p_3 = 2 \cdot p_1$ . Děj 34 je izochorický, a tak se po úsečce rovnoběžné s osou y dostaneme do bodu 4:  $V_4 = 4 \cdot V_1, p_4 = p_1$ . To, že tlak v bodě 4 musí být stejný jako v bodě 1 vyplývá z faktu, že poslední děj 41 je podle zadání opět izobarický! Výsledným obrazcem je, jak můžeme vidět z obrázku, obdélník.

Nyní přistoupíme k překreslení grafu do diagramu  $V-T$ . Opět vyjdeme z počátečního bodu 1 o souřadnicích  $T_1, V_1$  (tentokrát vynášíme objem na osu y a teplotu na osu x!). Pro izochorický děj 12 platí Charlesův zákon (jednoduchý důsledek stavové rovnice IP) ve tvaru  $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ . Protože tlak se zvětšil dvakrát, získáváme snadno vztah  $T_2 = 2 \cdot T_1$ . Grafem děje 12 je

tedy úsečka rovnoběžná s osou  $x$  a bod 2 má souřadnice  $T_2 = 2 \cdot T_1, V_2 = V_1$ . Následuje izobarický děj 23 splňující Gay – Lussacův zákon ve tvaru  $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$ . Protože platí  $V_3 = 4 \cdot V_2$ , získáváme okamžitě vyjádření  $T_3 = 4 \cdot T_2 = 8 \cdot T_1$ . Díky tomu se po úsečce, jež tentokrát není rovnoběžná s žádnou ze souřadnicových os, ale zato leží na přímce procházející počátkem, do bodu 3 se souřadnicemi  $T_3 = 8 \cdot T_1, V_3 = 4 \cdot V_1$ . Pro následující izobarický děj 34 platí opět Gay- Lussacův zákon ve tvaru  $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4}$ . Z předchozí části úlohy však víme, že platí  $p_4 = \frac{1}{2} \cdot p_3$ . Díky tomu okamžitě získáváme, že  $T_4 = \frac{1}{2} \cdot T_3 = 4 \cdot T_1$ . Tím se po úsečce rovnoběžné s osou  $x$  dostáváme do bodu 4 se souřadnicemi  $T_4 = 4 \cdot T_1, V_4 = 4 \cdot V_1$ . Průběh celého cyklu je patrný z obrázku.



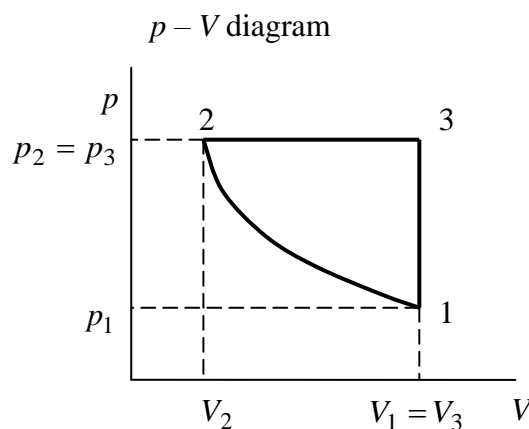
K příkladu 13

**14.** Ideální plyn přejde ze stavu  $p_1, V_1, T_1$  izotermickou kompresí do stavu  $p_2, V_2, T_2$ , a z něho pak izobarickou expanzí do  $p_3, V_3, T_3$ , z něhož se následně izochorickým dějem vrací do původního stavu. Načrtněte cyklus a určete

- při kterém z uvedených dějů soustava koná práci
- kdy nastane tepelná výměna s okolím

**ŘEŠENÍ:** a) Pro elementární práci způsobenou změnou objemu platí klasický vztah  $dW = p \cdot dV$ . To znamená, že se práce koná vždy, když se mění objem. V našem případě tedy při izotermické kompresi a při izobarické expanzi. S uvažováním vzorců pro práci odvozených v části 4 této sbírky snadno zjistíme, že při izotermické kompresi platí  $W_1 = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$  ( $V_2 < V_1 \Rightarrow$  práci koná okolí!),

při izobarické expanzi pak  $W_2 = p_2 \cdot (V_3 - V_2)$  ( $V_3 > V_2 \Rightarrow$  práci koná soustava!). Průběh cyklu je patrný z obrázku. Všimněte si, že práce vykonaná při izotermickém a izobaroickém ději odpovídá obsahu plochy pod příslušnými křivkami v  $p - V$  diagramu!



K příkladu 14

b) Jediným dějem, kdy nenastává tepelná výměna s okolím, je děj adiabatický. Ten se však v našem případě neobjevuje, což znamená, že k výměně tepla dojde ve všech třech případech.



Obtížnější je určit, kdy bude soustava teplo přijímat a kdy odevzdávat. K tomuto rozhodnutí budeme využívat 1. termodynamický zákon. Při izotermické kompresi se nemění vnitřní energie, což znamená, že soustava musí odevzdat teplo, jehož velikost je číselně rovna práci vykonané okolím. Pro její velikost tedy platí  $Q_1 = W_1 = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$ .

V následujícím izobarickém ději koná soustava práci a zároveň dochází ke zvýšení její vnitřní energie. To v souladu s 1. TZ znamená, že soustava teplo přijímá. Velikost přijatého tepla je dána vztahem  $Q_2 = n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2)$ , kde  $n$  je látkové množství plynu a  $C_p$  jeho molární tepelná kapacita při stálém tlaku.

Konečně v závěrečném izochorickém ději se nekoná práce a dochází ke snižování teploty. To má za následek, že soustava musí teplo odevzdávat. Jeho velikost je číselně dána vztahem  $Q_3 = n \cdot C_v \cdot (T_1 - T_3)$ , kde  $C_v$  je molární tepelná kapacita při stálém objemu (uvědomte si, že pro ideální plyny platí Mayerův vztah ve tvaru  $C_p = C_v + R \Rightarrow C_p > C_v$ . Dá se dokázat, že uvedená nerovnost je splněna zcela obecně i pro neideální plyny).

**15.** Počáteční objem kyslíku je  $V_1 = 51$  a jeho tlak  $p_1 = 100$  kPa. Nejdříve jej izobaricky zahřejeme na objem  $V_2 = 2 \cdot V_1$  a následně izochoricky zvýšíme jeho tlak na  $p_3 = 4 \cdot p_1$ . Určete, jakou práci  $W$  plyn vykonal, jaké teplo  $Q$  jsme mu dodali a jak se změnila jeho vnitřní energie  $\Delta U$ .

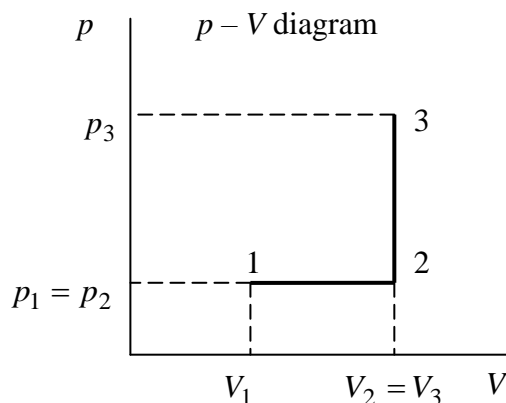
**ŘEŠENÍ:** Jednoznačně nejjednodušší je výpočet práce vykonané plynem. Ta je totiž nenulová pouze při izobarickém zahřátí, kdy navíc platí jednoduchý vzorec

$$W = p_1 \cdot (V_2 - V_1) = p_1 \cdot (2 \cdot V_1 - V_1) = p_1 \cdot V_1 = 500 \text{ J.}$$

O něco obtížnější je výpočet dodaného tepla. Především si musíme uvědomit, že teplo dodáváme plynem při obou procesech a platí tedy vztah  $Q = Q_1 + Q_2$ , kde  $Q_1$  a  $Q_2$  jsou po řadě dodaná tepla při izobarickém a izochorickém ději. K výpočtu prvního z nich použijeme vztah  $Q_1 = n \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$ , skutečnost, že při izobarickém zvýšení objemu na dvojnásobek se na dvojnásobek zvýší i teplota (Boyle – Marriotův zákon) a platí tedy vzorec  $T_2 = 2 \cdot T_1$ , a to, že podle stavové rovnice IP můžeme psát  $n \cdot T_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R}$ . S uvážením faktu, že kyslík je dvouatomový plyn a má tedy molární tepelnou kapacitu při stálém tlaku  $C_p = \frac{7}{2} \cdot R$ , můžeme psát:

$$Q_1 = n \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1) = n \cdot \frac{7}{2} \cdot R \cdot (2 \cdot T_1 - T_1) = \frac{7}{2} \cdot R \cdot \frac{p_1 \cdot V_1}{R} = \frac{7}{2} \cdot p_1 \cdot V_1 = 1,75 \text{ kJ.}$$

Pro teplo  $Q_2$  dodané při izochorickém ději platí vztah  $Q_2 = n \cdot C_v \cdot (T_3 - T_2)$ . Molární tepelná kapacita při stálém objemu je pro kyslík  $C_v = \frac{5}{2} \cdot R$ . Při izochorickém zvýšení tlaku na čtyřnásobek



K příkladu 15

se čtyřnásobně zvýší i teplota (Charlesův zákon) a platí tedy  $T_3 = 4 \cdot T_2 = 8 \cdot T_1$ . Po úpravě získáváme

$$Q_2 = n \cdot C_v \cdot (T_3 - T_2) = n \cdot \frac{5}{2} \cdot R \cdot (8 \cdot T_1 - 2 \cdot T_1) = \frac{5}{2} \cdot R \cdot 6 \cdot \frac{p_1 \cdot V_1}{R} = 15 \cdot p_1 \cdot V_1 = 7,5 \text{ kJ}.$$

Celkové dodané teplo je tedy  $Q = Q_1 + Q_2 = 9,25 \text{ kJ}$ . Změnu vnitřní energie spočteme podle 1.TZ jednoduše jako rozdíl dodaného tepla a vykonané práce. Platí tedy

$$\Delta U = Q - W = 8,75 \text{ kJ}.$$

Vykonaná práce je  $W = 500 \text{ J}$ , dodané teplo  $Q = 9,25 \text{ kJ}$  a přírůstek vnitřní energie  $\Delta U = 8,75 \text{ kJ}$ .

**16.** Jak se změní v přiblížení ideálního plynu vnitřní energie  $U$  kyslíku o hmotnosti  $m = 100 \text{ g}$ , který je zahřán z teploty  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  na teplotu  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ , jestliže proces zahřátí probíhá

- a) při stálém objemu
- b) při stálém tlaku
- c) adiabatickou kompresí

Molární hmotnost kyslíku je  $M_m = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**ŘEŠENÍ:** Především je třeba si uvědomit, že vnitřní energie ideálního plynu je stavovou veličinou závisající pouze na teplotě! To znamená, že ve všech třech uvažovaných případech bude výsledek stejný, protože záleží pouze na počáteční a koncové teplotě plynu, a ne na tom, jakým dějem zahřátí probíhá. S uvážením faktu, že molární tepelná kapacita při stálém objemu je pro kyslík

$C_v = \frac{5}{2} \cdot R$  a toho, že pro látkové množství platí vzorec  $n = \frac{m}{M_m}$  můžeme psát

$$\Delta U = n \cdot C_v \cdot (T_2 - T_1) = \frac{m}{M_m} \cdot \frac{5}{2} \cdot R \cdot (t_2 - t_1) = 3280 \text{ J}.$$

Vnitřní energie se ve všech uvažovaných případech změnila o  $\Delta U = 3280 \text{ J}$ .

**17.** V tropických mořích je voda u povrchu mnohem teplejší než v hloubce. Je myslitelný stroj pracující mezi těmito lázněmi? Pokud ano, jakou odhadujete účinnost, pokud ne – proč?

**ŘEŠENÍ** (nezaručené...): Teoreticky by takovýto stroj myslitelný byl. Jeho účinnost by však byla velmi malá. I v případě, že by totiž tento stroj pracoval podle ideálního Carnotova cyklu (což je v tomto případě zcela nemyslitelné) by jeho účinnost byla dána vztahem  $\eta_{id} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , kde  $T_1$  by

byla teplota vody u povrchu a  $T_2$  teplota v hloubce. Pokud bychom tyto teploty odhadli na  $t_1 = 30^\circ\text{C}$  ( $T_1 = 303,15 \text{ K}$ ) a  $t_2 = 10^\circ\text{C}$  ( $T_2 = 283,15 \text{ K}$ ), byla by podle výše uvedeného vzorce spočtená účinnost pouhých  $\eta_{id} = 6,6 \%$ , což je velmi málo. Ve skutečnosti by tato hodnota byla ještě mnohem menší. Navíc by bylo extrémně složité takovýto stroj v praxi realizovat. Proto by snaha o realizaci podobného tepelného stroje byla nesmyslná.

**18.** Carnotův stroj pracuje s účinností  $\eta_1 = 40\%$ . Jak se má změnit teplota ohříváče  $T_1$ , aby účinnost vzrostla na  $\eta_2 = 50\%$ ? Teplota chladiče je konstantně  $t_2 = 9^\circ\text{C}$ .

ŘEŠENÍ: Účinnost Carnotova cyklu je obecně dána vztahem  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ , kde  $T_1$  je teplota ohříváče a  $T_2$  teplota chladiče. Sestavíme si tedy dvě rovnice o dvou neznámých, jimiž budou počáteční a koncová teplota chladiče  $T_1$  resp.  $T_1^*$ . Můžeme psát

$$\eta_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \eta_2 = \frac{T_1^* - T_2}{T_1^*}.$$

Po dosazení konkrétních hodnot ( $\eta_1 = 0,4$ ;  $\eta_2 = 0,5$ ;  $T_2 = t_2 + 273,15 = 282,15 \text{ K}$ !) a vyřešení uvedené soustavy zjistíme, že platí:  $T_1 = 470,25 \text{ K}$ ,  $T_1^* = 564,3 \text{ K}$ . Hledaná změna pak bude dána vztahem  $\Delta T = T_1^* - T_1 = 94,05 \text{ K}$ .

Teplotu ohříváče musíme zvýšit o  $\Delta T = 94,05 \text{ K}$ .

**19.** Teplota páry přicházející z parního kotle do válce parního stroje je  $t_1 = 120^\circ\text{C}$ , teplota chladiče, v němž pára kondenzuje, je  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ . Jak velkou maximální práci  $W$  by stroj vykonal za ideálních podmínek při spotřebě  $Q = 4,2 \text{ kJ}$  tepla?

ŘEŠENÍ: Účinnost tepelného cyklu je definována jako podíl vykonané práce a dodaného tepla, platí tedy vztah  $\eta = \frac{W}{Q}$ . Pro ideální podmínky (Carnotův cyklus) účinnost závisí pouze na teplotě

ohříváče a chladiče, a to vztahem  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ . (teplota válce parního stroje odpovídá teplotě ohříváče). Srovnáním obou uvedených vzorců pro účinnost získáme rovnici, z níž již snadno spočteme vykonanou práci

$$\frac{W}{Q} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \rightarrow W = \frac{Q \cdot (T_1 - T_2)}{T_1} = 854,6 \text{ J}.$$

Maximální vykonaná práce je tedy  $W = 854,6 \text{ J}$ .

**20.** Určete práci  $W$ , kterou musíme dodat chladicímu stroji pracujícímu na principu obráceného Carnotova cyklu, jestliže v prostředí o teplotě  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  ( $T_2 = 293,15 \text{ K}$ ) chceme zmrazit  $m = 1 \text{ kg}$  vody téže teploty na led o teplotě  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  ( $T_1 = 273,15 \text{ K}$ ). Měrná tepelná kapacita vody je  $c_v = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}^{-1}$ , měrné skupenské teplo tání pak  $l_t = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

ŘEŠENÍ: Práce, již je nutno dodat k ochlazení látky, souvisí s odebíraným teplem  $Q$  vztahem  $W = \eta \cdot Q$ , kde  $\eta = \frac{T_p - T}{T}$ . Zde  $T$  je teplota látky a  $T_p$  teplota okolního prostředí. Okamžitě vidíme, že energetická náročnost chlazení roste s rozdílem uvedených teplot. Situace je poněkud komplikována tím, že  $\eta$  je funkcí okamžité teploty látky  $T$ , jež se v průběhu chladicího procesu pochopitelně mění. Uvažujme tedy nejprve, jakou práci  $dW$  budeme muset dodat stroji k ochlazení vody o teplotě  $T$  o hodnotu  $dT$ . Bude platit:

$$dW = \eta \cdot dQ = \frac{T_2 - T}{T} \cdot m \cdot c_v \cdot dT.$$

(elementární odebrané teplo je dáno vztahem  $dQ = m \cdot c_v \cdot dT$ ) Celkovou dodanou práci při ochlazení na teplotu tání  $T_1$  pak určíme integrací uvedeného vztahu v příslušných mezích, jimiž je koncová teplota vody  $T_1$  a počáteční teplota  $T_2$ :

$$\begin{aligned} W = \int dW &= \int_{T_1}^{T_2} \frac{T_2 - T}{T} \cdot m \cdot c_v \cdot dT = m \cdot c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{T_2 - T}{T} \cdot dT = -m \cdot c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT + m \cdot c_v \cdot T_2 \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \\ &= -m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) + m \cdot c_v \cdot T_2 \cdot [\ln T]_{T_1}^{T_2} = m \cdot c_v \cdot T_1 - m \cdot c_v \cdot T_2 + m \cdot c_v \cdot T_2 \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = \\ &= m \cdot c_v \cdot \left[ T_1 + T_2 \cdot \left( \ln \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \right] = 2990 \text{ J.} \end{aligned}$$

Zatím jsme však určili teprve práci nutnou k ochlazení vody na teplotu tání, nyní musíme ještě vypočítat, kolik energie zvnějšku je třeba dodat k tomu, aby se voda přeměnila na led. Tento výpočet je již podstatně jednodušší, neboť tuhnutí probíhá při konstantní teplotě  $T_1 = 273,15 \text{ K}$ , čímž se vyhneme nepříjemné integraci. Bude platit:

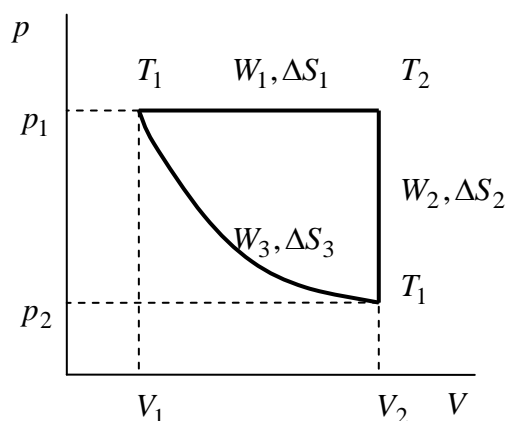
$$W_t = \eta \cdot Q = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \cdot m \cdot l_t = 24460 \text{ J.}$$

Celková práce, kterou musíme dodat, je pak dána součtem  $W_c = W + W_t = 27450 \text{ J} = 27,45 \text{ kJ}$ .

Musíme dodat práci  $W_c = 27,45 \text{ kJ}$ .

**21.** Určete celkovou práci  $W$ , změnu entropie  $\Delta S$  a účinnost  $\eta$  u vratného kruhového děje skládajícího se z izobarické expanze, izochorického ochlazení a izotermické komprese. Srovnajte účinnost tohoto cyklu s účinností ideálního Carnotova cyklu, pracující-li oba mezi teplotami  $T_1 = 300 \text{ K}$  a  $T_2 = 1000 \text{ K}$ . Předpokládejte, že plyn je dvouatomový, a že jeho látkové množství je  $n = 1 \text{ mol}$ .

**ŘEŠENÍ:** Ještě předtím, než přistoupíme k samotnému výpočtu, je vhodné si uvědomit, jak vypadá grafické znázornění cyklu v  $p - V$  diagramu. S využitím faktu, že izobarickému ději odpovídá úsečka rovnoběžná s osou  $x$  a izochorickému ději úsečka rovnoběžná s osou  $y$ , dostaneme průběh znázorněný na obrázku.



$$\begin{aligned} W &= W_1 - W_3 \quad (W_2 = 0 !!) \\ \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 \end{aligned}$$

K příkladu 21

Je jasné, že při izobarické expanzi se teplota plynu zvyšuje z počáteční hodnoty  $T_1 = 300 \text{ K}$  na koncovou  $T_2 = 1000 \text{ K}$ . (plyne to z faktu, že pro izobarický děj platí, že  $\frac{V}{T} = \text{konst}$ ). Při následném izochorickém ochlazení se teplota vrací zpět na  $T_1 = 300 \text{ K}$ , kde zůstává pochopitelně po celou izotermickou kompresi. Při výpočtu celkové práce musíme uvážit, kdy koná práci samotný plyn, a kdy okolí. Při izobarické expanzi plyn zvětšuje svůj objem, a přitom vykoná práci  $W_1$ . Během následného izochorického děje se pochopitelně žádná práce nekoná ( $W_2 = 0$ )! Při izotermické kompresi je plyn stlačován, a proto okolí vykoná práci  $W_3$ . Z této úvahy okamžitě plyne, že pro celkovou práci cyklu bude platit vztah  $W = W_1 - W_3$ . Pro práci při izobarické expanzi pak můžeme psát  $W_1 = p_1 \cdot (V_2 - V_1)$ . Hodnoty tlaku ani objemu však neznáme, a proto si musíme pomoci jinak. S užitím stavové rovnice ideálního plynu  $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$  dostáváme:

$$W_1 = p_1 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_2 - n \cdot R \cdot T_1 = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1).$$

Nyní již máme vyjádřenou práci  $W_1$  pomocí veličin, které známe. Dále přistoupíme k výpočtu práce  $W_3$ . Jde o izotermickou kompresi, a proto bude pro velikost práce vykonané okolím platit známý vzorec  $W_3 = p_2 \cdot V_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$  (tento vztah jsme odvodili již v příkladu 5, je nutné dávat pozor na znaménka (jde nám o velikost práce, proto se staráme o to, aby vyšla kladně) a na označení jednotlivých stavových proměnných (to je provedeno podle obrázku). Opět bohužel neznáme příslušné objemy ani tlaky. S tímto problémem si poradíme užitím stavové rovnice a vztahu  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$  plynoucího z faktu, že pro izobarický děj je podíl objemu a teploty konstantní. Díky tomu můžeme psát:

$$W_3 = p_2 \cdot V_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Výsledný vztah pro celkovou práci cyklu pak zní:

$$W = W_1 - W_3 = n \cdot R \cdot (T_2 - T_1) - n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = n \cdot R \cdot \left( T_2 - T_1 \cdot \left( 1 + \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \right) = 2815 \text{ J}.$$

Celková práce cyklu je  $W = 2815 \text{ J}$ . Nyní budeme počítat teplo a změny entropie v jednotlivých částech cyklu. Především si musíme uvědomit, kdy plyn teplo přijímá, a kdy jej odevzdává. Při izobarické expanzi se zvyšuje teplota a plyn navíc koná práci, což znamená, že teplo musí být podle 1. termodynamického zákona přijímáno. Pro celkové množství tepla  $Q_1$  přijatého v průběhu tohoto děje platí známý vztah  $Q_1 = C_p \cdot n \cdot (T_2 - T_1)$ .  $C_p$  přitom značí molární tepelnou kapacitu při stálém tlaku. Víme, že pro molární tepelnou kapacitu při stálém objemu  $C_v$  u dvouatomového plynu platí  $C_v = \frac{5}{2} \cdot R$ . Užitím Meyerova vztahu pak okamžitě dostáváme:  $C_p = C_v + R = \frac{5}{2} \cdot R + R = \frac{7}{2} \cdot R$ . Pro teplo  $Q_1$  dodané plynu během izotermického děje tak bude platit:

$$Q_1 = C_p \cdot n \cdot (T_2 - T_1) = \frac{7}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1).$$

Nyní určíme změnu entropie při tomto ději. Musíme si uvědomit, že teplota v jeho průběhu není konstantní, a proto nelze počítat změnu entropie jako podíl celkového tepla  $Q_1$  a teploty! Je proto třeba si děj pomyslně rozdělit na nekonečně mnoho nekonečně malých částí, spočítat elementární změny entropie  $dS_1$  a integrovat v mezích od  $T_1$  do  $T_2$ . Bude platit:

$$dQ_1 = \frac{7}{2} \cdot n \cdot R \cdot dT \quad dS_1 = \frac{dQ_1}{T} = \frac{7 \cdot n \cdot R \cdot dT}{2 \cdot T} \Rightarrow \Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{7}{2} \cdot \frac{n \cdot R}{T} \cdot dT = \frac{7}{2} \cdot n \cdot R \cdot [\ln T]_{T_1}^{T_2} = \frac{7}{2} \cdot n \cdot R \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Při izochorickém ochlazení se nekoná práce, a plyn snižuje svojí vnitřní energii. To znamená, že při tomto ději odevzdá svému okolí teplo  $Q_2$ . Pro nás však není důležitá ani tak velikost tohoto odevzdaného tepla, jako spíš to, o jakou hodnotu  $\Delta S_2$  poklesla v průběhu děje entropie plynu. Bohužel teplota opět není konstantní, a proto nám nezbyde opět nic jiného, než si spočítat elementární změnu entropie  $dS_2$  a integrovat v mezích od  $T_1$  do  $T_2$ . (pořadí mezí volíme tak, aby výsledek vyšel kladně, jde nám o velikost změny entropie!) Nesmíme přitom zapomenout, že tentokrát se jedná o izochorický děj.

$$dQ_2 = C_v \cdot n \cdot dT = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot dT \quad dS_2 = \frac{dQ_2}{T} = \frac{5 \cdot n \cdot R \cdot dT}{2 \cdot T} \Rightarrow \Rightarrow \Delta S_2 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{5}{2} \cdot \frac{n \cdot R}{T} \cdot dT = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot [\ln T]_{T_1}^{T_2} = \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Nyní spočítáme změnu entropie  $\Delta S_3$  při izotermické kompresi. Při tomto ději je okolím vykonávána práce, vnitřní energie plynu však neroste ( $T = konst$ )! Podle 1. termodynamického zákona proto musí docházet k tomu, že plyn teplo odevzdává. V důsledku toho bude entropie klesat. Na rozdíl od předchozích případů máme tentokrát výhodu, že teplota v průběhu děje je konstantně rovna  $T_1$ . Díky tomu můžeme stanovit velikost změny entropie  $\Delta S_3$  užitím vztahu

$$\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_1},$$

kde  $Q_3$  je teplo odevzdané plynem při tomto ději. Pro izotermické procesy však podle 1. zákona termodynamiky platí, že odevzdané teplo je stejné jako dodaná práce. Tu však již máme spočítanu výše! Bude platit:

$$\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_1} = \frac{W_3}{T_1} = \frac{n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_1} = n \cdot R \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

V tuto chvíli je již vše připraveno k tomu, abychom spočetli celkovou změnu entropie za celý cyklus. Zjistili jsme, že při izobarické expanzi entropie roste, zatímco při dalších dvou dějích klesá. Proto bude platit:

$$\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_2 - \Delta S_3 = \frac{7}{2} \cdot n \cdot R \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{5}{2} \cdot n \cdot R \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - n \cdot R \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} = 0.$$

Zjistili jsme, že celková změna entropie za celý cyklus je rovna nule. Tento výsledek je zcela v souladu s očekáváním, neboť nulovost celkové změny entropie je typickou vlastností všech

vratných cyklů!! Jakýkoliv jiný výsledek než nula by znamenal, že jsme někde udělali chybu ve výpočtech.

V závěrečné fázi určíme účinnost cyklu. Víme, že účinnost je definována jako podíl celkové práce vykonané během cyklu ku celkovému teplu dodanému plynu. Práci  $W$  již máme spočítanu, pro dodané teplo  $Q_{dod}$  platí vzhledem k tomu, že plyn teplo přijímá jen během izochorické expanze vztah  $Q_{dod} = Q_1$ . Po dosazení získáváme:

$$\eta = \frac{W}{Q_{dod}} = \frac{W}{Q_1} = \frac{n \cdot R \cdot \left( T_2 - T_1 \cdot \left( 1 + \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \right)}{\frac{7}{2} \cdot n \cdot R \cdot (T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1 \cdot \left( 1 + \ln \frac{T_2}{T_1} \right)}{\frac{7}{2} \cdot (T_2 - T_1)} = 0,138.$$

Účinnost cyklu je tedy  $\eta = 0,138$ . Spočtěme ještě, jakou účinnost by měl ideální Carnotův cyklus pracující mezi stejnými teplotami. Pro jeho účinnost  $\eta_{id}$  platí známý vzorec:

$$\eta_{id} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 0,7.$$

Vidíme, že Carnotův cyklus pracující mezi stejnými teplotami by měl mnohem větší účinnost než námi uvažovaný cyklus. To je v souladu s tím, že Carnotův ideální kruhový děj má pro dané teploty ohříváče a chladiče maximální možnou účinnost.

**22.** Určete změnu entropie ideálního plynu  $\Delta S$  o teplotě  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , tlaku  $p_1 = 100 \text{ kPa}$  a objemu  $V_1 = 2 \text{ l}$ , rozpíná-li se do vakua na dvojnásobný objem  $V_2 = 4 \text{ l}$ . Uvažujte, že děj probíhá izotermicky.

**ŘEŠENÍ:** Díky izotermičnosti uvažovaného děje můžeme velikost změny entropie  $\Delta S$  počítat pomocí vzorce  $\Delta S = \frac{Q}{T_1}$ , kde  $Q$  je celkové teplo a  $T_1$  termodynamická teplota, za níž děj probíhá (v našem případě  $T_1 = 293,15 \text{ K}$ ). Protože jde o izotermickou expanzi, bude plyn konat práci, a podle 1. termodynamického zákona bude přijímat teplo. Díky tomu bude entropie v průběhu děje růst. Díky nulové změně teploty a tedy i vnitřní energie pak bude platit vztah  $W = Q$  udávající, že veškeré dodané teplo se spotřebuje na práci vykonanou při expanzi. Pro práci vykonanou při izotermickém ději platí klasický výpočet detailně provedený například v příkladě 8:

$$dW = p \cdot dV \Rightarrow W = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \int_{V_1}^{V_2} p_1 \cdot V_1 \cdot \frac{1}{V} dV = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Hledaná změna entropie pak je:

$$\Delta S = \frac{Q}{T_1} = \frac{W}{T_1} = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}}{T_1} = 0,473 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Entropie se tedy v průběhu rozpínání zvýšila o  $\Delta S = 0,473 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**23.** Ideální plyn necháme při tlaku  $p_1 = 40 \text{ kPa}$  expandovat z objemu  $V_1 = 15 \text{ l}$  na objem  $V_2 = 29,2 \text{ l}$ . Expanze probíhá za konstantní teploty  $T_1$ . Stanovte změnu volné energie  $\Delta F$  při tomto ději.

ŘEŠENÍ: Předně si musíme uvědomit, co je to vlastně volná energie plynu  $F$ . Jedná se o termodynamický potenciál definovaný vztahem  $F = U - T \cdot S$ , kde  $U$  je vnitřní energie,  $T$  termodynamická teplota a  $S$  entropie. Jednotkou volné energie je joule. Najdeme vztah pro elementární změnu volné energie  $dF$ . Diferenciací definičního vztahu dostáváme:  $dF = dU - T \cdot dS - S \cdot dT$ . Užijeme-li matematické vyjádření 1. a 2. věty termodynamické ve tvaru  $dU = T \cdot dS - p \cdot dV$  můžeme psát:

$$dF = dU - T \cdot dS - S \cdot dT = -p \cdot dV - S \cdot dT.$$

V našem případě se však jedná o izotermický děj, a proto platí  $dT = 0$ . Zjišťujeme tak, že elementární přírůstek volné energie  $dF$  je při izotermickém ději vlastně roven záporně vzaté elementární práci plynu  $dW$ ! Nyní je již snadné tuto změnu spočítat. Bude platit:

$$dF = -dW = -p \cdot dV \Rightarrow \Delta F = -\int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = -p_1 \cdot V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -399,7 \text{ J}.$$

Volná energie v průběhu děje poklesla o 399,7 J.

**24.** Původní objem  $V_1$  dusíku o hmotnosti  $m = 2 \text{ g}$  a počáteční teplotě  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  byl při stálém tlaku  $p = \text{konst}$  zmenšen na objem  $V_2 = \frac{3}{4} \cdot V_1$ . Určete změnu  $\Delta H$  entalpie plynu. Uvažujte, že měrná tepelná kapacita dusíku je  $c_p = 1042 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

ŘEŠENÍ: Opět si musíme především zjistit, co je to vlastně entalpie plynu  $H$  a jaké je vyjádření pro její elementární změnu  $dH$ . Tento termodynamický potenciál, jehož jednotkou je joule, je definován vztahem  $H = U + p \cdot V$ , kde  $U$  je vnitřní energie,  $p$  tlak a  $V$  objem. Diferencováním definičního vztahu získáváme:  $dH = dU + p \cdot dV + V \cdot dp$ . Užijeme matematickou formulaci 2. termodynamické věty  $dU = T \cdot dS - p \cdot dV$  a získáme:

$$dH = dU + p \cdot dV + V \cdot dp = T \cdot dS + V \cdot dp.$$

Vzhledem k tomu, že tlak se během děje podle zadání úlohy nemění, bude platit  $dp = 0$ . S využitím definičního vztahu pro elementární změnu entropie  $dS = \frac{dQ}{T}$  můžeme psát:

$$dH = T \cdot dS = T \cdot \frac{dQ}{T} = dQ \Rightarrow \Delta H = Q.$$

Změna entalpie tedy při izobarickém ději udává množství tepla dodaného plynu. Pro teplo odebrané při izotermické expanzi pak můžeme psát:

$$Q = c_p \cdot m \cdot (T_2 - T_1) = c_p \cdot m \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot T_1 - T_1 \right) = -\frac{1}{4} \cdot c_p \cdot m \cdot T_1 = -156,3 \text{ J}.$$

Entalpie plynu tedy při izobarické kompresi poklesla o 156,3 J.

**25.** Hélium o hmotnosti  $m = 120 \text{ g}$  bylo při teplotě  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  izotermicky stlačeno. Jeho tlak se přitom zvětšil z počáteční hodnoty  $p_1$  na koncovou  $p_2 = 3 \cdot p_1$ . Určete, jak se při tomto procesu změnila volná entalpie  $\Delta G$  hélia. Molární hmotnost hélia je  $M_m = 4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .



**ŘEŠENÍ:** Gibbsova energie čili volná entalpie je termodynamický potenciál definovaný vztahem  $G = H - T \cdot S$ , kde  $H$  je entalpie,  $T$  termodynamická teplota a  $S$  entropie. Jednotkou volné entalpie je joule. Nezaměňujte volnou entalpii  $G$  a entalpii  $H$ , jedná se o dva různé potenciály! Diferenciací definičního vzorce a využitím vztahu pro elementární změnu entalpie  $dH$  odvozeného v minulé úloze dostáváme

$$dG = dH - T \cdot dS - S \cdot dT = dU + p \cdot dV + V \cdot dp - T \cdot dS - S \cdot dT.$$

Výraz  $dU + p \cdot dV - T \cdot dS$  je však podle matematické formulace 2. věty termodynamické roven 0. V našem případě jde navíc o izotermický děj, takže je  $dT = 0$ , a můžeme psát  $dG = V \cdot dp$ . Celkovou změnu volné entalpie  $\Delta G$  pak stanovíme integrací v mezích od  $p_1$  do  $p_2$ . Přitom nezapomeneme, že pro izotermický děj platí vztah  $p_1 \cdot V_1 = p \cdot V$ , a že dle stavové rovnice ideálního plynu můžeme psát  $p_1 \cdot V_1 = \frac{m}{M_m} \cdot R \cdot T_1$ . s uvážením těchto faktů můžeme psát:

$$dG = V \cdot dp \Rightarrow \Delta G = \int_{p_1}^{p_2} V \cdot dp = p_1 \cdot V_1 \cdot \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{m}{M_m} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{3 \cdot p_1}{p_1} = 82,2 \text{ kJ}.$$

Volná entalpie se tedy zvýšila o hodnotu 82,2 kJ.

**26.** Vzduch o objemu  $V_1 = 1 \text{ m}^3$  a počátečním tlaku  $p_1 = 200 \text{ kPa}$  izotermicky expanduje na dvojnásobný objem  $V_2 = 2 \cdot V_1$ . Určete práci  $W$ , kterou plyn při expanzi vykoná, výsledný tlak plynu  $p_2$  a množství přivedeného tepla  $Q$ .

**ŘEŠENÍ:** Pro velikost práce vykonané plynem  $W$  při izotermické expanzi platí klasický výpočet detailně rozebraný např. v úloze 5. Píšeme:

$$dW = p \cdot dV \Rightarrow W = \int_{V_1}^{V_2} p_1 \cdot V_1 \cdot \frac{dV}{V} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{2 \cdot V_1}{V_1} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln 2 = 138,6 \text{ kJ}.$$

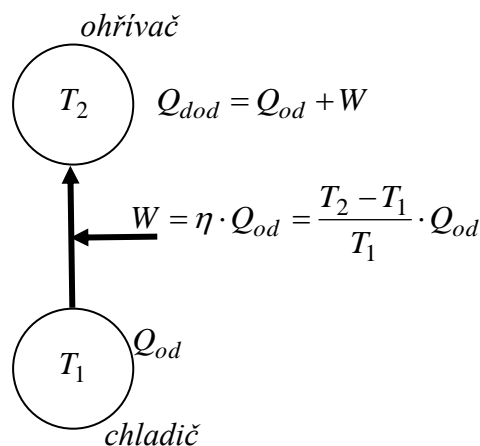
Výsledný tlak plynu určíme díky tomu, že pro izotermický děj platí, že  $p \cdot V = \text{konst.}$  Proto můžeme psát:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = 100 \text{ kPa}.$$

Konečně, množství dodaného tepla  $Q$  určíme díky tomu, že při izotermickém ději je dodané teplo rovno práci vykonané plynem (plyne to z 1. termodynamického zákona, vnitřní energie se nemění!). Platí tedy  $Q = W = 138,6 \text{ kJ}$ .

Při izotermické expanzi tedy plyn vykonal práci  $W = 138,6 \text{ kJ}$ , bylo mu dodáno teplo  $Q = 138,6 \text{ kJ}$  a jeho výsledný tlak byl  $p_2 = 100 \text{ kPa}$ .

**27.** Ideální chladicí stroj pracující podle Carnotova cyklu předává teplo z chladíče s vodou o teplotě  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  ohřívači obsahujícímu vodu o teplotě



K příkladu 27 – schéma chladicího stroje

$t_2 = 100^\circ\text{C}$  teplou. Jak velké množství vody  $m_1$  je nutné zmrazit v chladiči, aby se v ohříváči změnila voda o hmotnosti  $m_2 = 1\text{ kg}$  v páru o teplotě stále  $t_2 = 100^\circ\text{C}$ ? Měrné skupenské teplo tání vody je  $l_t = 334\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , měrné skupenské teplo vypařování poté  $l_v = 2256\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

ŘEŠENÍ: Teplo dodané v ohříváči vodě je rovno součtu tepla odebraného vodě v chladiči a práce vykonané při přenosu tepla z chladiče do ohříváče. Platí tedy vztah  $Q_{dod} = Q_{od} + W$ . Mezi prací vykonanou při přenosu a množstvím odebraného tepla  $Q_{od}$  pak platí vztah  $W = \eta \cdot Q_{od}$ . Pro ideální Carnotův chladicí stroj se pak účinnost  $\eta$  počítá podle vzorce  $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$ . Spojením uvedených vzorců dostáváme:

$$Q_{dod} = Q_{od} + W \Rightarrow Q_{dod} = Q_{od} + \eta \cdot Q_{od} \Rightarrow Q_{dod} = \left(1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \cdot Q_{od}.$$

Pro teplo dodané vypařující se vodě pak platí v souladu s definicí měrného skupenského tepla vypařování vztah  $Q_{dod} = m_2 \cdot l_v$ , pro odebrané teplo pak analogicky  $Q_{od} = m_1 \cdot l_t$ . Po dosazení a úpravě pak dostáváme:

$$m_2 \cdot l_v = \left(1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \cdot m_1 \cdot l_t \Rightarrow m_1 = \frac{m_2 \cdot l_v}{\left(1 + \frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) \cdot l_t} = 4,95\text{ kg}.$$

V chladiči je tedy třeba zmrazit  $m_1 = 4,95\text{ kg}$  vody.

**28.** Z nádoby, v níž je uskladněno hélium pod tlakem  $p_1 = 10\text{ MPa}$ , začne poškozeným ventilem plyn pomalu utíkat, až tlak klesne na hodnotu tlaku atmosférického  $p_2 = 101325\text{ Pa}$ . Celý děj probíhá izotermicky za pokojové teploty  $t = 20^\circ\text{C}$ . Určete změnu entropie  $\Delta S$  u tohoto ideálního plynu o hmotnosti  $m = 1\text{ kg}$ . Molární hmotnost hélia je  $M_m = 4\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

ŘEŠENÍ: Víme, že při izotermickém ději je možné spočítat změnu entropie jako podíl celkového dodaného tepla  $Q$  (plyn zvětšuje svůj objem, koná tedy práci, podle 1. zákona termodynamiky se teplo dodává!) a teploty  $T_1$  (v našem případě je  $T_1 = 293,15\text{ K}$ ), za níž děj probíhá. Platí tedy  $\Delta S = \frac{Q}{T_1}$ . Protože se jedná o izotermický děj, bude dodané teplo stejné jako

práce vykonaná plynem při rozpínání. Přitom platí, že elementární práci můžeme vyjádřit vztahem  $dW = -V \cdot dp$  (to plyne z diferencované stavové rovnice ideálního plynu  $p \cdot V = n \cdot R \cdot T \Rightarrow p \cdot dV + V \cdot dp = n \cdot R \cdot dT$ , pro izotermický děj je  $dT = 0$ , a proto tedy  $dW = p \cdot dV = -V \cdot dp$ ). Integrací v mezích  $p_1$  a  $p_2$  dostaneme poté celkovou vykonanou práci a tudíž i celkové dodané teplo. Po vydělení teplotou získáme hledanou změnu entropie. Při výpočtu musíme uvážit skutečnost, že pro izotermický děj platí vztah  $p_1 \cdot V_1 = p \cdot V \Rightarrow V = \frac{p_1 \cdot V_1}{p}$ . Dále

budeme potřebovat stavovou rovnici ideálního plynu ve tvaru  $p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$  a vyjádření pro látkové množství  $n = \frac{m}{M_m}$ . Bude platit:

$$Q = W = \int dW = \int_{p_1}^{p_2} -V \cdot dp = -p_1 \cdot V_1 \cdot \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_2}{p_1} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2},$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T_1} = \frac{p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}}{T_1} = \frac{n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}}{T_1} = \frac{m}{M_m} \cdot R \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = 9540 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Entropie plynu se při uvedeném ději zvýší o  $\Delta S = 9540 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**29.** Kyslík o hmotnosti  $m = 20 \text{ g}$  zvětšil při teplotě  $T = 288,15 \text{ K}$  izotermicky svůj objem z hodnoty  $V_1$  na hodnotu  $V_2 = 2 \cdot V_1$ . Určete, jaká je změna volné energie  $\Delta F$  kyslíku při tomto ději. Předpokládejte, že kyslík se chová jako ideální plyn, a že uvažovaný děj je kvazistatický (je možné pro něj použít zákony rovnovážné termodynamiky). Molární hmotnost kyslíku je  $M_m = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**ŘEŠENÍ:** Budeme postupovat naprosto stejně jako v příkladu 23. Předně je třeba najít vztah pro elementární změnu volné energie  $dF$ . Pro ten platí právě podle úlohy 23 vzorec  $dF = -p \cdot dV - S \cdot dT$ . Vzhledem k izotermičnosti děje je však  $dT = 0$ , a proto se uvedený výraz redukuje na  $dF = -p \cdot dV$ . Integrací v mezích od  $V_1$  do  $V_2$  a využitím známých vztahů pro výpočet práce při izotermickém ději postupně dostáváme:

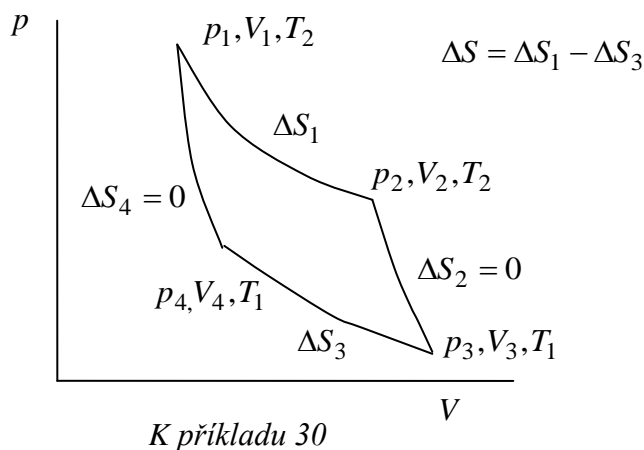
$$\Delta F = \int_{V_1}^{V_2} -p \cdot dV = -p_1 \cdot V_1 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{2 \cdot V_1}{V_1} =$$

$$= -\frac{m}{M_m} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln 2 = -1037 \text{ J}.$$

Závěrečné úpravy jsou stejné jako v minulém příkladě. Volná energie kyslíku poklesla o  $-1037 \text{ J}$ .

**30.** Dokažte, že celková změna entropie v Carnotově cyklu je rovna 0.

**ŘEŠENÍ:** Předně si musíme uvědomit, co je to vlastně Carnotův cyklus. Jedná se o kruhový děj skládající ze postupně z izotermické expanze, adiabatické expanze, izotermické komprese a adiabatické komprese. Cyklus pracuje mezi teplotami  $T_1$  a  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Dá se dokázat, že mezi všemi cykly pracujícími mezi těmito teplotami má Carnotův cyklus nejvyšší možnou účinnost. Na obrázku je naznačen průběh Carnotova cyklu v  $p - V$  diagramu.



Nás budou zajímat primárně změny entropie v jednotlivých fázích cyklu. Okamžitě můžeme říct, že v průběhu obou

adiabatických dějů se entropie nemění! Je to dáno tím, že u adiabatického děje je  $dQ = 0$ , a proto i  $dS = \frac{dQ}{T} = 0$ . Platí tedy:  $\Delta S_2 = \Delta S_4 = 0$ . Při izotermické expanzi koná plyn práci, je mu dodáno teplo  $Q_1$ , a proto se jeho entropie zvýší o hodnotu  $\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_2}$  (jedná se o děj probíhající při konstantní teplotě  $T_2$ ). Dodané teplo  $Q_1$  je však rovno práci  $W_1$ , kterou při tomto ději plyn vykoná. Práci při izotermické expanzi plynu jsme však počítali již mnohokrát:

$$Q_1 = W_1 = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p_1 \cdot V_1 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow$$

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_2} = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Dále budeme počítat změnu entropie  $\Delta S_3$  při izotermické kompresi. V tomto případě koná práci okolí, teplo plyn odevzdává, a proto jeho entropie klesá. Konkrétně dojde ke snížení o hodnotu  $\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_1}$ . Vzhledem k tomu, že se jedná o izotermický děj, je však teplo opět rovno práci vykonané okolním plynem. Můžeme psát:

$$Q_3 = W_3 = - \int_{V_3}^{V_4} p \cdot dV = p_3 \cdot V_3 \cdot \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = p_3 \cdot V_3 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow$$

$$\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_1} = n \cdot R \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}.$$

Celková změna entropie je na základě výše provedených úvah dána vztahem

$$\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_3 = n \cdot R \cdot \left( \ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_3}{V_4} \right).$$

Pro Carnotův cyklus se však dá dokázat platnost vztahu  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$ . Důkaz tohoto vzorce je založen na opakovaném použití stavové rovnice ideálního plynu a mohli jste se s ním seznámit v rámci odvození vztahu pro účinnost Carnotova cyklu na přednášce. Díky uvedenému vzorci okamžitě dostáváme:

$$\Delta S = \Delta S_1 - \Delta S_3 = n \cdot R \cdot \left( \ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_3}{V_4} \right) = n \cdot R \cdot \left( \ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = 0,$$

čímž je požadovaný důkaz dokončen.