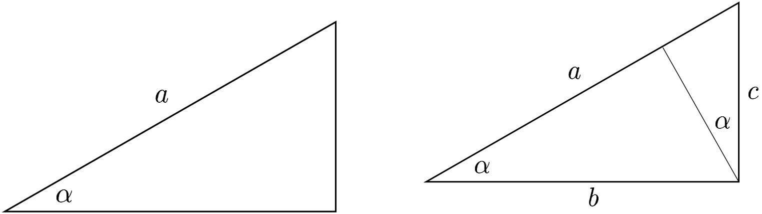
Teorie podobnosti

Tomáš Tyc

Zajímavá fyzika

Co je teorie podobnosti?

- Velice zajímavá oblast fyziky
- Mnoho výsledků dostaneme jen na základě rozměrové analýzy; rozměr je ve fyzice důležitý!
- Pěkný příklad:



$$S = a^2 f(\alpha)$$

$$a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$$

– Pythagorova věta!

Jak vnímají svět mravenci?

- Představme si, že bychom se zmenšili n krát. Jak by z našeho pohledu vypadal svět kolem nás?
- Nebo jiná otázka: Zmenšili bychom se n krát ; co by se ještě muselo změnit, aby svět kolem nás vypadal stejně, jak jej vnímáme nyní?
- Abychom mohli na tyto otázky odpovědět, je třeba definovat nějaké veličiny, které by se nezměnily, a z nich odvodit ostatní.
- Chceme například, aby např. atomy a struktura hmoty byla stále stejná.

Zrychlení

- Představme si toto: zmenším se 10×, jsem stále ze stejného materiálu. Chci pohnout rukou. Jaké vyvinu zrychlení? Síla svalu $\propto$ průřez $\propto l^2$, hmotnost ruky $\propto l^3$:

$$a = \frac{F}{m}, \quad F \propto l^2, \quad m \propto l^3 \quad \Rightarrow \quad a \propto l^{-1}$$

  – tedy ruka bude mít 10× větší zrychlení!
- Jak budeme vnímat tíhové zrychlení Země? – projeví se například jako mechanické napětí v našich kostech při stání na zemi:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S}, \quad m \propto l^3, \quad S \propto l^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma \propto l^1,$$

  – budu tedy vnímat 10× slabší napětí v nohou – podobně jako kdybych zůstal v původní velikosti a tíhové zrychlení se 10× zmenšilo!
- To je v souladu s předchozí úvahou

Zrychlení

- Mravenec je asi 100× menší než člověk – zemské zrychlení mu tedy připadá 100× slabší než nám; unese tedy mnohonásobně více než my
- Když upadne dítě na zem, zraní se méně než dospělý
- Pro velká zvířata je naopak zemské tíhové zrychlení efektivně větší
- Velcí savci mají mohutnější kostru než malí
- Stébla trávy jsou relativně mnohem tenčí než kmeny stromů

Rychlost

- Jakou dosáhu rychlost? Bude snad také 10× větší? Ne! Zkusme energiovou úvahu:

$$E = \frac{1}{2} m v^2, \quad E \propto l^3, \quad m \propto l^3 \quad \Rightarrow \quad v \propto l^0$$

  Rychlost bude stejná. I z druhé strany, při rovnoměrně zrychleném pohybu platí

$$v = \sqrt{2al}, \quad a \propto l^{-1}, \quad \Rightarrow \quad v \propto l^0$$

- Délka skoku:

$$d = \frac{v^2 \sin\alpha}{g}$$

  – bude nezávislá na velikosti zvířete, ale pro malá zvířata bude relativně větší (ovšem jen bez odporu vzduchu) – blecha!

Čas

- Malá zvířata vyvinou podobnou rychlost jako velká
- Mají ale menší krok – musejí kmitat nožičkama s větší frekvencí
- Odpovídá zkušenosti – frekvence kroků mravence je výrazně vyšší než naše
- Kmitání křídly – nejrychleji kmitá moucha, pak kolibřík, vrabec, holub a nejpomaleji albatros.
- I srdeční frekvence je tím větší, čím je tvor menší (např. u myši, ale i u novorozence je větší než u dospělého člověka.
- Čas odvozený z rychlosti

$$t = \frac{l}{v}, \quad v \propto l^0 \qquad \Rightarrow \quad t \propto l$$

- Čas odvozený ze zrychlení

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}, \quad a \propto l^{-1} \qquad \Rightarrow \quad t \propto l$$

Čas – chod hodin

- Jak rychle by šly zmenšené mechanické hodinky?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{moment setrvačnosti}}{\text{tuhost torzní pružiny}}}, \quad k \propto l^3,\ J \propto l^5 \quad \Rightarrow \quad T \propto l$$

  – hodinky by šly rychleji!
- A jak rychle by šly zmenšené křemenné hodinky (quartz)? Odvozují čas od periody kmitů křemenného piezzokrystalu:

$$T = 2\,\frac{\text{délka krystalu}}{\text{rychlost zvuku}} \quad \Rightarrow \quad T \propto \frac{l}{l^0} = l$$

  – i zde platí, že hodinky půjdou tím rychleji, čím jsou menší!
- Aby $T \propto l$ platilo i pro kyvadlové hodiny, musíme při jejich zmenšení zvětšit tíhové zrychlení:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g \propto l^{-1}, \quad \Rightarrow \quad T \propto l$$

Nové jednotky

- Představme si, že se $n\times$ zmenšíme
- Zavedeme nové jednotky, které jsou pro nás přirozené:
  - délka: coul [c], 1 m $= n$ c
  - hmotnost: unce [u], 1 kg $= n^3$u
  - čas: mžik [z], 1 s $= n$ z

veličina	označení	SI	mravenec	přev. koef.	pro $n = 10$
délka	l	m	coul (c)	n^1	10
hmotnost	m	kg	unce (u)	n^3	1000
čas	t	s	mžik (z)	n^1	10

Jednotky ostatních mechanických veličin už z těchto odvodíme!

Tabulka jednotek

veličina	označ.	SI	mravenec	přev. koef.	n=10
délka	l	m	coul (c)	n^1	10
hmotnost	m	kg	unce (u)	n^3	1000
čas	t	s	mžik (z)	n^1	10
rychlost	v	m s^{-1}	cz^{-1}	n^0	1
síla	F	N, kg m s^{-2}	u c z^{-2}	n^2	100
zrychlení	a	m s^{-2}	c z^{-2}	n^{-1}	1/10
hustota	ρ	kg m^{-3}	u c^{-3}	n^0	1
energie	E	J, kg m^2 s^{-2}	u c^2 z^{-2}	n^3	1000
tlak	p	Pa,kg m^{-1} s^{-2}	u c^{-1} z^{-2}	n^0	1
povrch. nap.	σ	kg s^{-2}	u z^{-2}	n^1	10
viskozita	ν	m^2 s^{-1}	c^2 z^{-1}	n^1	10
akce	S	kg m^2 s^{-1}	u c^2 z^{-1}	n^4	10000

Povrchové napětí a viskozita

- V malých měřítkách je povrchové napětí efektivně větší, tíhové zrychlení je naopak efektivně menší; proto tam, kde se „utkávají“ tyto dva efekty, bude na malých škálách vítězit povrchové napětí a na velkých gravitace. Důsledky: kapky rosy visí na trávě a nespadnou, vodoměrky běhají po vodě, brouk potápník si nese zásobu vzduchu na zadečku díky nesmáčivé plošce
- Rovněž viskozita je na malých škálách významnější než na velkých: mravenec si neublíží při pádu z velké výšky díky odporu vzduchu, z velkého sudu vyteče med podobně jako voda, z malého hrnku poteče naopak velmi viskózně

Fundamentální konstanty

- Planckova
$$\hbar \approx 10^{-34} Js = n^4 \cdot 10^{-34}\, \mathrm{uc^2z^{-1}}$$
Jak velké musí být n, aby Plackova konstanta byla v řádu jednotek?
$\hbar \approx 1\ \mathrm{uc^2z^{-1}}$ pro $n \approx 3 \cdot 10^8 \ \Rightarrow \mathrm{c} = 3 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}$.
Pro takto velká tělesa se začne projevovat kvantová mechanika.
- Boltzmannova
$$k \approx 10^{-23} JK^{-1} = n^3 \cdot 10^{-23}\, \mathrm{uc^2z^{-2}K^{-1}}$$
Tedy $kT \approx 1\,\mathrm{uc^2z^{-2}}$ při $T = 300\,\mathrm{K}$ pro $n = 7 \cdot 10^6 \ \Rightarrow$ $\mathrm{c} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Pro takto velká tělesa se začnou projevovat tepelné fluktuace, Brownův pohyb atd.

Potíže v mikroskopickém světě

Kdybychom se hodně zmenšili, měli bychom docela problémy:

- Byli bychom kvantově rozmazaní
- Vypadali bychom jako postiženi Parkinsonovou chorobou
- Museli bychom se prodírat velmi viskózním vzduchem
- Sotva bychom se mohli nadechnout (ale to by nám nevadilo, protože bychom dýchali celým povrchem těla)
- Každá kapka by nás mohla lapit – museli bychom se potírat vodoodpudivým krémem
- Ale pak bychom se zase nenapili
- Každý krok obtížný – nutnost překonávat van der Waalsovy síly
- Při podání ruky příteli – možná by zůstala v jeho ruce

Kvantová teorie

- Schrödingerova rovnice pro atom vodíku

$$\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\, r}\,\psi$$

- Zvolme prostorovou a časovou jednotku l a l/c, kde l je zatím libovolné a c je rychlost světla, a zaveďme bezrozměrnou souřadnici $r' = r/l$ a bezrozměrný čas $t' = t/(l/c)$. V těchto jednotkách rovnici přepíšeme takto:

$$\frac{\mathrm{i} l m_e c}{\hbar}\,\frac{\partial\psi}{\partial t'} = -\Delta'\psi - 2\,\frac{e^2 m_e l}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}\,\frac{1}{r'}\,\psi$$

Zde čárkované veličiny se vztahují k novým jednotkám

- Volba l není ničím omezena. Zvolíme je tedy tak, aby faktor v potenciální energii byl roven jedné:

$$\frac{e^2 m_e l}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e} = r_B$$

  – tedy l nám vyšlo jako přirozená jednotka délky pro atom, tzv. Bohrův poloměr atomu.
- Člen u časové derivace:

$$\frac{l m_e c}{\hbar} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar c}{e^2} = \frac{1}{\alpha}\,,$$

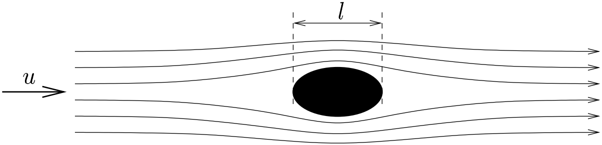
  kde α je tzv. konstanta jemné struktury. To je jediný parametr, na němž rovnice závisí.

Konstanta jemné struktury

- Proč se zde objevuje rychlost světla? Ne kvůli samotnému atomu, ale při vyzáření fotonu bude na c záviset poměr vlnové délky fotonu a l. Tedy na c závisí λ měřené v jednotkách l.
- Dva světy jsou si podobné, jestliže jsou si rovny konstanty jemné struktury.
- α – naprosto fundamentální konstanta. Právě tím, že nemá fyzikální rozměr a proto ji už nelze nijak škálovat.
- Změna některé základní fyzikální konstanty $(\hbar, c, e, \dots)$ – ekvivalentní změně α plus přeškálování
- Změnu některé ze základních fyzikálních konstant $(\hbar, c, e, \varepsilon_0)$ lze poznat jedině skrze změnu konstanty jemné struktury

Reynoldsovo číslo

- Navier–Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou viskózní kapalinu
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nu\,\Delta\boldsymbol{v}$$
Situace – např. obtékání tělesa o charakteristickém rozměru l kapalinou rychlostí u.



- Převedeme rovnici dobezrozměrných veličin: rychlosti měříme v jednotkách u souřadnice v jednotkách l, čas v jednotkách l/u a poměr p/ρ v jednotkách u^2. Zavádíme tedy bezrozměrné veličiny
$$\boldsymbol{r} = l\boldsymbol{r}', \quad \boldsymbol{v} = u\boldsymbol{v}', \quad t = \frac{l}{u}\,t', \quad \frac{p}{\rho} = u^2\left(\frac{p}{\rho}\right)'$$

- Dosazením

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t'} + (\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\nabla}')\boldsymbol{v}' = -\nabla'\left(\frac{p}{\rho}\right)' + \frac{\nu}{ul}\,\Delta'\boldsymbol{v}'$$

Kdy budou dvě proudění podobná? Když tato bezrozměrná rovnice bude pro obě stejná, tedy jestliže poměr ν/ul bude stejný. Bezrozměrné Reynoldsovo číslo

$$R = \frac{ul}{\nu} = \frac{\rho ul}{\eta}$$

určuje charakter proudění
- pokud je R stejné pro dvě situace obtékání geometricky podobných těles, bude i charakter obtékání stejný (turbulentní, laminární apod.).

Aplikace – odporová síla na těleso obtékané kapalinou

- Vektor rychlosti v daném bodě

$$\boldsymbol{v} = uf\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l}, R\right)$$

- Tlak v daném bodě kapaliny

$$p = \rho u^2 f\left(\frac{\boldsymbol{r}}{l}, R\right)$$

- odporová síla působící na těleso

$$F = \rho u^2 l^2 f(R) = \rho u^2 l^2 f\left(\frac{\rho u l}{\eta}\right)$$

- Stokesův vzorec $F = 6\pi\eta r u$ splňuje rovnici pro $f(R) = 6\pi/R$; charakteristický rozměr $l = r$ – poloměr obtékané koule.
- Newtonův vzorec $F = C\rho u^2 S$ splňuje rovnici pro $f(R) = C$