Domácí úkol č. 1 z Matematiky 1 (F1711)

Toto je domácí úkol z cvičení ze dne 18.9.2012. Vypracované příklady mi neodevzdávejte (neměl bych čas je všechny opravit). Výsledky příkladů najdete v sekci za zadáním. Pokud si nebudete vědět s něčím rady, tak se mě můžete zeptat před cvičením, po cvičení, nebo si se mnou můžete domluvit konzultaci. Je možné (i když nepravděpodobné), že výsledky obsahují chyby, pokud nějakou najdete, tak mi dejte vědět.

1. Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavu rovnic o neznámých x, y, z, u. Uveďte rovněž hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy.

$$a) \quad \begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ x + 3y + 4z &= 4 \\ 2x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} x + 2y + 8z - 3u &= 7 \\ x + 4y + 14z &= 23 \\ -2x - 4y - 16z + 9u &= -8 \\ x + 2z - 3u &= -3 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} 3x - 7y + 11z - 15u &= 3 \\ x - 4y + 2z &= 1 \\ y + z - 3u &= 0 \\ 4x - 11y + 13z - 15u &= 4 \end{aligned}$$

2. Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavu rovnic o neznámých x, y, z a určete, pro které hodnoty parametrů a, b má daná soustava
a) jedno řešení, toto řešení vyjádřete
b) nekonečně mnoho řešení, řešení vyjádřete
c) žádné řešení
V každém z případů uveďte hodnost matice soustavy a rozšířené matice soustavy.

$$a) \quad \begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 5y - (a+2)z &= 1 \\ x + (2+b)y - (1+b)z &= 1 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} -2x + (2-3a)y - 5z &= -b + 3 \\ x - y - 2z &= b - 1 \\ 3x + (a-6)z &= 3b - 3 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} 2x - ay + (a^2 - 1)z &= 9 \\ x + ay + (1 - a^2)z &= 0 \\ 3x + 2ay &= 9 + 2b \end{aligned}$$

$$d)\quad \begin{aligned} x-2y-2(a+2)z&=-7\\ 3x-5y-5(a+2)z&=a-18\\ -x+(2-a)y+(a+2)z&=-a^2-2a+6\end{aligned}$$

$$e)\quad \begin{aligned} x+2y+(a-1)z&=3+b\\ 2x+y+2(a-1)z&=3+2b\\ 3x-y&=2\end{aligned}$$

$$f)\quad \begin{aligned} x+2y+2z&=b+3\\ 2x+5y+(4-a)z&=-2b+6\\ x+(2-a)y+6z&=1\end{aligned}$$

$$g)\quad \begin{aligned} x+y+(2-2b)z&=4a-b\\ 2x+3y+(2-2b)z&=8a-b\\ x+2y+(ab-a)z&=7a\end{aligned}$$

Výsledky

1.

$$\begin{aligned} &a)\quad (x,y,z)=(7,-5,3)\\ &b)\quad (x,y,z,u)=(3-2t,5-3t,t,2)\\ &c)\quad (x,y,z,u)=(1-6t+12s,3s-t,t,s)\end{aligned}$$

2.

$$a)\quad \begin{array}{lll} 1) & a\neq 1\wedge b\neq 0, & (x,y,z)=(\frac{a-2}{a-1},\frac{1}{a-1},\frac{1}{a-1})\\ \infty) & b=0, & (x,y,z)=(3+(1-2a)t,-1+at,t)\\ \emptyset) & a=1\wedge b\neq 0 & \end{array}$$

$$\text{Upravená matice}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & -1\\ 0 & 0 & b(a-1) & b\end{array}\right)$$

$$b)\quad \begin{array}{lll} 1) & a\neq \pm 3, & (x,y,z)=(b-1+(2-\frac{a}{3})\frac{b+1}{a^2-9},-\frac{a}{3}\frac{b+1}{a^2-9},\frac{b+1}{a^2-9})\\ \infty) & a=\pm 3\wedge b=-1, & (x,y,z)=(b-1+2t\mp t,\mp t,t)\\ \emptyset) & a=\pm 3\wedge b\neq -1 & \end{array}$$

$$\text{Upravená matice}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & b-1\\ 0 & 3 & a & 0\\ 0 & 0 & a^2-9 & b+1\end{array}\right)$$

$$c)\quad \begin{array}{lll} 1) & a \neq \pm 1, a \neq 0, & (x,y,z) = (3, \dfrac{b}{a}, \dfrac{b+3}{a^2-1}) \\ \infty) & a = \pm 1, b = -3 & (x,y,z) = (3, \mp 3, t) \\ \infty) & a = 0, b = 0 & (x,y,z) = (3, t, -3) \\ \emptyset) & (a = 0, b \neq 0) \text{ nebo } (a = \pm 1, b \neq 3) & \end{array}$$

$$d)\quad \begin{array}{lll} 1) & a \neq 1, a \neq -2, & (x,y,z) = (2a-1, a+2, \dfrac{1}{a+2}) \\ \infty) & a = 1, & (x,y,z) = (1, 4-3t, t) \\ \emptyset) & a = -2 & \end{array}$$

$$e)\quad \begin{array}{lll} 1) & a \neq 1, & (1, 1, \dfrac{b}{a-1}) \\ \infty) & a = 1 \wedge b = 0, & (1, 1, t) \\ \emptyset) & a = 1 \wedge b \neq 0 & \end{array}$$

$$f)\quad \begin{array}{lll} 1) & a \neq \pm 2, & (x,y,z) = (b+3-(2a+2)\dfrac{b+2}{a^2-4}, a\dfrac{b+2}{a^2-4}, \dfrac{b+2}{a^2-4}) \\ \infty) & a = \pm 2 \wedge b = -2, & (x,y,z) = (1-2t \mp 4t, \pm 2t, t) \\ \emptyset) & a = \pm 2 \wedge b \neq -2 & \end{array}$$

Upravená matice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b+3 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & b+2 \end{array}\right)$

$$g)\quad \begin{array}{lll} 1) & a \neq 0 \wedge b \neq 1, & (x,y,z) = (4a-2b+12, b-6, \dfrac{3}{b-1}) \\ \infty) & a = 0, & (x,y,z) = (-2b+2(2b-2)t, b-(2b-2)t, t) \\ \emptyset) & a \neq 0 \wedge b = 1 & \end{array}$$