Domácí úkol č. 2 z Matematiky 1 (F1711)

Toto je domácí úkol z cvičení ze dne 25.9.2012. Vypracované příklady mi neodevzdávejte (neměl bych čas je všechny opravit). Výsledky příkladů najdete v sekci za zadáním. Pokud si nebudete vědět s něčím rady, tak se mě můžete zeptat před cvičením, po cvičení, nebo si se mnou můžete domluvit konzultaci. Je možné (i když nepravděpodobné), že výsledky obsahují chyby, pokud nějakou najdete, tak mi dejte vědět.

1. Určete vzájemnou polohu 2 přímek

a)
$$p: \begin{array}{l} x - 3z + 6 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{array} \qquad q: \begin{array}{l} x + z - 2 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{array}$$

b)
$$p: \begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x + z - 5 = 0 \end{array} \qquad q: \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 6 + t \\ z = 12 - t \end{array}$$

c)
$$p: \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{array} \qquad q: \begin{array}{l} 2x - y - 2 = 0 \\ 3x - z - 2 = 0 \end{array}$$

d)
$$p: \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + t \end{array} \qquad q: \begin{array}{l} x = 6 - t \\ y = 10 - 2t \\ z = 6 - t \end{array}$$

2. Určete vzájemnou polohu přímky a roviny

$$p: \begin{array}{l} x = 4 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array} \qquad \rho: \quad x + 2y + 3z - 10 = 0$$

3. Určete vzájemnou polohu tří rovin

a) $\rho_1: \; x + y - z = 0, \qquad \rho_2: \; 2x + 3y - z - 2 = 0, \qquad \rho_3: \; x - 2z - 1 = 0$

b) $\rho_1: \; x + y + z - 3 = 0, \qquad \rho_2: \; x - y + z - 1 = 0, \qquad \rho_3: \; -x - y + z + 1 = 0$

4. Převeďte z algebraického tvaru na goniometrický tvar

a) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

b) $z = 1 - i$

5. Upravte komplexní výrazy

a) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$

b) $\dfrac{(1+3i)\overline{(-1+i)}}{2-i}$

c) $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i} - \dfrac{i}{-1+i}$

6. Najděte všechna řešení komplexní rovnice. řešení hledejte dvěma způsoby:
a) hledejte řešení ve tvaru $z = x + iy$, (tento předpokládaný tvar dosaďte do rovnice a rovnice, které pak vzniknou porovnáním reálných a imaginárních částí na obou stranách rovnice řešte pro neznámé x a y)
b) hledejte řešení ve tvaru $z = |z|e^{i\phi}$ (tento předpokládaný tvar dosaďte do rovnice, pravou stranu rovnice rovněž převeďte na geometrický tvar a rovnice vzniklé porovnáním absolutních velikostí a úhlů řešte pro neznáme $|z|$ a ϕ)
Užijte obě možnosti!

$$z^3 = -1$$

7. Najděte všechna řešení rovnic, řešení rozepište do algebraického tvaru.

$$\begin{aligned} &a) \qquad z^6 = -1 \\ &b) \qquad z^2 = -9i \end{aligned}$$

Výsledky

1.

$a)$ průsečík $(0, 1, 2)$ $b)$ mimoběžné $c)$ splývající $d)$ rovnoběžné

2.

průsečík $(3, 2, 1)$

3.

$a)$ A společný směr $(2, -1, 1)$ $b)$ průsečík $(1, 1, 1)$

4.

$a)$ $z = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}$ $b)$ $z = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi}$

5.

$a)$ 0 $b)$ $\frac{8-6i}{5}$ $c)$ $\frac{1+i}{2}$

6.

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

7.

$$a) \qquad e^{i\frac{1}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, e^{i\frac{1}{2}\pi} = i, e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i, e^{i\frac{11}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$b) \qquad 3e^{i\frac{3}{4}\pi} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 3e^{i\frac{7}{4}\pi} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$