Domácí úkol č. 4 z Matematiky 1 (F1711)

Toto je domácí úkol z cvičení ze dne 8.10.2012. Vypracované příklady mi neodevzdávejte (neměl bych čas je všechny opravit). Výsledky příkladů najdete v sekci za zadáním. Pokud si nebudete vědět s něčím rady, tak se mě můžete zeptat před cvičením, po cvičení, nebo si se mnou můžete domluvit konzultaci. Je možné (i když nepravděpodobné), že výsledky obsahují chyby, pokud nějakou najdete, tak mi dejte vědět.

1. Vypočtěte determinanty z matic

$$a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad \begin{pmatrix} i & 2 & -i \\ 1 & i & 3 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & 5 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 6 & -3 & 7 \\ -3 & 4 & -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Jsou zadány matice A, B, vypočtěte $\det A$, $\det B$, $\det(A^T)$, $\det(A^{-1})$, $\det(A\cdot B^T)$, $\det(A\cdot B^{-1})$, $\det(A+B)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Určete inverzní matici s užitím determinantů

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Vyřešte soustavu lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla

$$\begin{aligned} x + y &= 13 \\ x - z &= 5 \\ y - z &= 2 \end{aligned}$$

5. Je zadána homogenní soustava 3 rovnic o 3 neznámých, určete pro které hodnoty parametru a má tato soustava nekonečně mnoho řešení. (Řešení nemusíte vyjadřovat.) (Nápověda: Nekonečně mnoho řešení bude existovat pokud determinant z matice soustavy bude roven 0).

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 0 \\ -x + ay &= 0 \\ 2x + az &= 0 \end{aligned}$$

6. Je zadán systém vektorů, rozhodněte, zda je tento systém lineárně nezávislý, pokud ne, vyberte z něj maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

$$a)\qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b)\qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$c)\qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}$$

7. Určete, pro kterou hodnotu parametru a je daný systémy vektorů lineárně nezávislý

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\a\\-1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$$

8. Doplňte zadanou dvojici vektorů o další vektor tak, aby výsledná trojice vektorů tvořila bázi v $\mathbb{R}^3$ (tj. trojici lineárně nezávislých vektorů).

$$a)\qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \qquad b)\qquad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Výsledky

1.

$$a)\quad -10, \qquad b)\quad -7, \qquad c)\quad 23$$

2.

$$\det A = -2, \qquad \det B = 21, \qquad \det(A^T) = -2, \qquad \det(A^{-1}) = -\frac{1}{2},$$

$$\det(A\cdot B^T) = -42, \qquad \det(A\cdot B^{-1}) = -\frac{2}{21}, \qquad \det(A+B) = 72$$

3.

$$a)\quad A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\1 & -1 & 0\\-1 & 2 & 1\end{pmatrix}, \qquad b)\quad A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4.

$$(x,y,z) = (8,5,3)$$

5.

$$a = 0, 1, -1$$

6.

a)lin. nezávislé

b)lin. závislé; lin. nezávislé jsou dvojice vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_3$; $\vec{u}_1, \vec{u}_4$; $\vec{u}_2, \vec{u}_3$; $\vec{u}_2, \vec{u}_4$; $\vec{u}_3, \vec{u}_4$

c)lin. závislé; libovolná dvojice vektorů je lin. nezávislá

7.

$$a \neq 2 \wedge a \neq -1$$

8.

$$a)\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad x - 3y - z \neq 0 \qquad b)\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad x \neq z$$