Domácí úkol č. 5 z Matematiky 1 (F1711)

Toto je domácí úkol z cvičení ze dne 16.10.2012. Vypracované příklady mi neodevzdávejte (neměl bych čas je všechny opravit). Výsledky příkladů najdete v sekci za zadáním. Pokud si nebudete vědět s něčím rady, tak se mě můžete zeptat před cvičením, po cvičení, nebo si se mnou můžete domluvit konzultaci. Je možné (i když nepravděpodobné), že výsledky obsahují chyby, pokud nějakou najdete, tak mi dejte vědět.

1. Jsou dány dvě báze v $\mathbb{R}^2$. První báze je tvořena vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, druhá báze je tvořena vektory $\vec{f}_1, \vec{f}_2$. Bázové vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vyjádřené pomocí vektorů báze $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ jsou

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{f}_1 + 2\vec{f}_2, \\ \vec{e}_2 &= \vec{f}_1 + 3\vec{f}_2. \end{aligned}$$

Dále je dán vektor $\vec{v}$, který má v bázi $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ vyjádření

$$\vec{v} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

Vyjádřete vektor $\vec{v}$ v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.
Dále je dán vektor $\vec{u}$, který má v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vyjádření

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

Vyjádřete vektor $\vec{u}$ v bázi $\vec{f}_1, \vec{f}_2$.
2. Jsou dány dvě báze v $\mathbb{R}^3$. První báze je tvořena vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, druhá báze je tvořena vektory $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Bázové vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vyjádřené pomocí vektorů báze $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ jsou

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{f}_1 + \vec{f}_2, \\ \vec{e}_2 &= \vec{f}_2 + \vec{f}_3, \\ \vec{e}_3 &= \vec{f}_1 + \vec{f}_3. \end{aligned}$$

Dále je dán vektor $\vec{v}$, který má v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vyjádření

$$\vec{v} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Vyjádřete vektor $\vec{v}$ v bázi $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.
Dále je dán vektor $\vec{u}$, který má v bázi $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ vyjádření

$$\vec{u} = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_3.$$

Vyjádřete vektor $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.
3. Nechť $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ je ortonormální báze. Uvažujme změnu báze

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3, \\ \vec{f}_2 &= \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3, \\ \vec{f}_3 &= -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Je báze $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ortonormální?
Dále je zadán vektor

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3.$$

Vyjádřete tento vektor v bázi $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.
4. Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ normujte a doplňte je o další vektor tak, aby tvořili ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 3), \qquad \vec{u}_2 = (1, 2, -1).$$

Výsledky

1.

$$\vec{v} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{u} = 2\vec{f}_1 + 5\vec{f}_2$$

2.

$$\vec{v} = 2\vec{f}_1, \qquad \vec{u} = \tfrac{3}{2}\vec{e}_1 - \tfrac{3}{2}\vec{e}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{e}_3$$

3.

$$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \text{ je ortonormální}, \qquad \vec{u} = \frac{11}{3}\vec{f}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3.$$

4.

$$\vec{u}_1' = (\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}), \qquad \vec{u}_2' = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}), \qquad \vec{u}_3' = \pm(-\frac{7}{\sqrt{66}}, \frac{4}{\sqrt{66}}, \frac{1}{\sqrt{66}})$$