Několik řešených příkladů do Matematiky 1 (Limity)

Označme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ a definujme

$$
\begin{aligned}
&|\pm\infty| = +\infty, && \\
&x + \infty = \infty, && \infty + \infty = +\infty, \\
&x - \infty = -\infty, && -\infty - \infty = -\infty, \\
&x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & x > 0, \\ -\infty & x < 0 \end{cases} && x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty & x > 0, \\ +\infty & x < 0 \end{cases} \\
&\frac{1}{\pm\infty} = 0, &&
\end{aligned}
$$

kde $x \in \mathbb{R}$ je reálné číslo. Nedefinovány zůstaly výrazy

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{x}{0}.$$

Dále definujme okolí

$$
\begin{aligned}
O_\epsilon(x) &= (x - \epsilon, x + \epsilon), \\
O_h(+\infty) &= (h, \infty), \\
O_h(-\infty) &= (-\infty, h).
\end{aligned}
$$

a ryzí okolí

$$
\begin{aligned}
P_\epsilon(x) &= (x - \epsilon, x) \cup (x, x + \epsilon), \\
P_h(+\infty) &= (h, \infty), \\
P_h(-\infty) &= (-\infty, h).
\end{aligned}
$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ a $h \in \mathbb{R}$.

Definice Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, pokud ke každému okolí $O(a)$ bodu a existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(a)$.

Věta 1. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \\
&\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab, \\
&\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \\
&\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|.
\end{aligned}
$$

Věta 2. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = a$ a nechť existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro $x \in P(x_0)$ je $f(x) \neq y_0$. Pak je $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = a$.

Věta 3. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a funkce $g(x)$ je omezená na nějakém ryzím okolí $P(x_0)$ bodu x_0 (to znamená, že existuje kladné číslo M takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ je $f(x) \leq M$). Pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

Příklad 1. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = 2.$$

kde jsme užili vztahu $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, dále druhého vztahu z věty 1, a toho, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Příklad 2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$. Při výpočtu této limity užijeme druhé věty. Označme

$$f(x) = \arctan x, \qquad\qquad g(y) = \frac{y}{\tan y}.$$

Pak platí

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \arctan x = 0 = y_0,$$
$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\tan y} = \frac{\lim\limits_{y\to 0} \cos x}{\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin x}{x}} = 1.$$

Dále pro $x \in P_{\frac{\pi}{2}}(0) = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\arctan x \neq 0$, existuje tedy ryzí okolí bodu 0 takové, že $g(x) \neq y_0$ pro všechna x z tohoto ryzího okolí. Předpoklady věty 2 jsou splněny a pro limitu složené funkce $g \circ f$ dostáváme

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\tan(\arctan x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1,$$

kde jsme užili toho, že $\tan(\arctan x) = x$.

Příklad 3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x}{2x^2-1}$. U příkladů tohoto typu postupujeme tak, že čitatel i jmenovatel podělíme nejvyšší mocninnou x, která se vyskytuje ve jmenovateli, v našem případě tedy x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x}{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \dfrac{3}{x}}{2 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(x + \dfrac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{\infty}{2} = \infty.$$

Příklad 4. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. Postupujeme stejně jako u předchozího příkladu, nejvyšší mocninnou ve jmenovateli je nyní $\sqrt[3]{x^3} = x$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{3}{x}}{\sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^3}}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{x^3}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Příklad 5. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+3x})$. Jedná se o výraz typu $\infty - \infty$, který upravíme dle následujícího vzorce

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

kde $a = x^2 - x$ a $b = x^2 + 3x$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 3x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - (x^2 + 3x)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = -2,\end{aligned}$$

přičemž v předposledním kroku jsme podělili čitatel i jmenovatel výrazem x.

Příklad 6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$. Využijeme třetí věty. Označme

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad\qquad g(x) = \sin x.$$

Platí

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,\\ &g(x) = \sin x \le 1 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R} \qquad \text{(funkce } g \text{ je tedy omezená na } \mathbb{R})\end{aligned}$$

Podle věty 3 tedy dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0.$$

Věta 4. (L'Hospitalovo pravidlo) Nechť f, g jsou funkce a $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť platí buď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$. Existuje-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = a$, kde $a \in \mathbb{R}^*$, pak platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = a$.

Příklad 7. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$. Nejdříve upravíme limitu následujícím způsobem

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} (e^{\ln x})^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x}.$$

Bude nás tedy zajímat limita výrazu $x \ln x$. Jedná se o výraz typu $0 \cdot (-\infty)$ ($\lim\limits_{x\to 0+} x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$). Postupujeme tak, že výraz x zapíšeme jako $\frac{1}{\frac{1}{x}}$, a pak užijeme L'Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

Výsledná limita pak je

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Příklad 8. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$. Jedná se o výraz typu $\infty - \infty$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0.$$

Výraz jsme nejdříve převedli na společného jmenovatele a pak jsme dvakrát užili L'Hospitalova pravidla.

Příklad 9. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$.

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2} - x}{x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x} - 1}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2}}{-\dfrac{2}{x^3}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2 - \sqrt{1+x^2}^2)}{-2\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}} = \frac{1}{2}$$