Několik řešených příkladů do Matematiky 1 (Vyšetřování průběhu funkce)

Zadání:

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = xe^{\dfrac{x-1}{3(x+2)}},$$

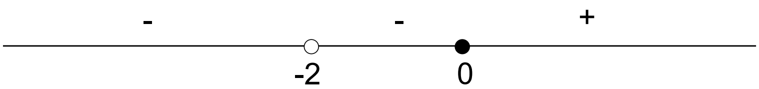
určete:

∘ definiční obor, kde je funkce kladná a záporná
∘ první derivaci, obor její existence, stacionární body, kde je funkce rostoucí a klesající
∘ druhou derivaci, obor její existence, kde je funkce konvexní a konkávní
∘ lokální extrémy, inflexní body, průsečíky s osami, zda je funkce sudá či lichá
∘ asymptoty (bez směrnice, se směrnicí), ostatní potřebné limity
∘ načrtněte graf

Řešení: Nejdříve vyšetříme definiční obor funkce. Jedinnou podmínkou omezující definiční obor zadané funkce je to, aby ve jmenovateli zlomku nebyla nula, tj. $x+2 \neq 0$, definičním oborem tedy je

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Dále vyšetříme, kdy je funkce kladná a záporná, využijeme toho, že funkce může měnit znaménko pouze v nulových bodech a v bodech nespojitosti. V našem případě se jedná o bod $x = 0$, což je nulový bod, a o bod $x = -2$, kde není funkce definována, a proto zde nemůže být spojitá.



Vidíme, že funkce protíná osu x v bodě $[0, 0]$, který je zároveň jejím průsečíkem s osou y (protože osa y je umístěna v bodě $x = 0$).

V dalším kroku vypočteme první derivaci

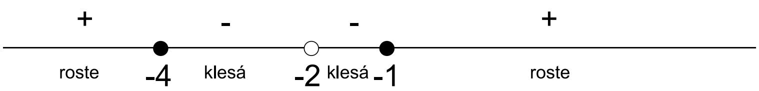
$$f'(x) = e^{\dfrac{x-1}{3(x+2)}} + x\left(e^{\dfrac{x-1}{3(x+2)}}\frac{x+2-x+1}{3(x+2)^2}\right) = e^{\dfrac{x-1}{3(x+2)}}\left(1 + \frac{x}{(x+2)^2}\right)$$

$$= e^{\dfrac{x-1}{3(x+2)}}\frac{x^2+5x+4}{(x+2)^2} = e^{\dfrac{x-1}{3(x+2)}}\frac{(x+4)(x+1)}{(x+2)^2}.$$

Tato funkce je definována pro všechna $x+2 \neq 0$, obor existence první derivace získáme jako průnik množiny, na které je tato funkce definována (tj. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$), s definičním oborem nederivované funkce (protože kde není funkce definována, nemůže existovat ani její derivace), tj.

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Nyní vyšetříme znaménko derivace, body ve kterých může f' měnit znaménko jsou nulové body $x = -1$, $x = -4$ a bod $x = -2$, ve kterém není funkce definována.



Znaménko první derivace vypovídá o tom, zda funkce v daném bodě roste (kldaná 1. derivace) či klesá (záporná 1. derivace). Body ve kterých je první derivace nulová, to jest $x = -4$ a $x = -1$, nazýváme stacionárními body.

A dále potřebujeme ještě druhou derivaci

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= e^{\frac{x-1}{3(x+2)}} \frac{1}{(x+2)^2} \frac{(x+4)(x+1)}{(x+2)^2} + e^{\frac{x-1}{3(x+2)}} \frac{(2x+5)(x+2)^2 - (x^2+5x+4)2(x+2)}{(x+2)^4} \\
&= e^{\frac{x-1}{3(x+2)}} \frac{5x+8}{(x+2)^4}
\end{aligned}
$$

Tato funkce je definována pro všechna $x+2 \neq 0$, obor existence druhé derivace určíme stejným způsobem jako v případě první derivace, to jest jako průnik množiny, na které je tato funkce definována, s definičním oborem první derivace, tj.

$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Opět vyšetříme znaménko, body ve kterých může f'' měnit znaménko je nulový bod $x = -\frac{8}{5}$ a bod $x = -2$, ve kterém není funkce definována.

Znaménko druhé derivace vypovídá o tom, zda je funkce v daném bodě konvexní (kldaná 2. derivace) či konkávní (záporná 2. derivace).

Nyní vyšetříme lokální extrémy. Lokální extrémy mohou být pouze v bodech, kde je první derivace funkce nulová (stacionární body), nebo v bodech, kde první derivace neexistuje. V našem případě jsou jedinnými kandidáty na lokální extrém stacionární body, tj $x = -4$ a $x = -1$. Vidíme, že funkce na levé straně bodu -4 roste (1. derivace je kladná), a na pravé straně bodu -4 klesá (1. derivace je záporná), v bodě $x = -4$ tedy funkce nabývá lokálního maxima $f(-4) = -4e^{5/6}$ (to je vidět také z toho, že druhá derivace je v bodě $x = -4$ záporná). Podobně je funkce na levé straně bodu -1 klesající, a na pravé straně bodu -1 rostoucí, v bodě $x = -1$ tedy funkce nabývá lokálního minima $f(-1) = -e^{-2/3}$ (to je vidět také z toho, že druhá derivace je v bodě $x = -1$ kladná).

Nyní se podíváme na inflexní body. V našem případě nám bude stačit jednoduché kritérium, které říká, že existuje-li v nějakém bodě a jeho okolí druhá derivace, pak má funkce v tomto bodě inflexní bod právě tehdy, když druhá derivace mění v tomto bodě znaménko. Vidíme, že druhá derivace mění v bodě $x = -\frac{8}{5}$ znaménko, funkce tedy má v bodě $x = -\frac{8}{5}$ inflexní bod, $f(-\frac{8}{5}) = \frac{8}{5}e^{\frac{1}{18}}$

Dále se podíváme, zda je funkce sudá či lichá, tj. musíme se podívat zda náhodou neplatí $f(-x) = f(x)$ (sudá funkce) nebo $f(-x) = -f(x)$ (lichá funkce).

$$f(-x) = -xe^{\frac{-x-1}{3(-x+2)}} \neq \pm f(x),$$

funkce tedy není ani sudá ani lichá.

Zbývá určit asymptoty a ostatní potřebné limity, tj. je třeba spočíst limity pro všechny body nespojitosti (v našem případě pro $x = -2$) a pokusit se najít asymptoty pro $x \to \pm\infty$. Limity pro $x \to -2$ zprava a zleva jsou

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2-} xe^{\frac{x-1}{3(x+2)}} &= \lim_{x \to -2-} x \lim_{x \to -2-} e^{\frac{x-1}{3(x+2)}} = -2 \lim_{y \to \infty} e^y = -\infty, \\
\lim_{x \to -2+} xe^{\frac{x-1}{3(x+2)}} &= \lim_{x \to -2+} x \lim_{x \to -2+} e^{\frac{x-1}{3(x+2)}} = -2 \lim_{y \to -\infty} e^y = 0,
\end{aligned}
$$

přičemž jsme využili toho, že

$$\lim_{x\to-2-}\frac{x-1}{3(x+2)}=\lim_{x\to-2-}\frac{x-1}{3}\lim_{x\to-2-}\frac{1}{x+2}=(-1)(-\infty)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to-2+}\frac{x-1}{3(x+2)}=\lim_{x\to-2+}\frac{x-1}{3}\lim_{x\to-2+}\frac{1}{x+2}=(-1)(+\infty)=-\infty.$$

Je-li alespoň jedna limita (zprava nebo zleva) v nějakém bodě x_0 nevlastní, pak nazýváme přímku $x=x_0$ asymptotou (bez směrnice) funkce f. Zbývá najít asymptoty (se směrnicí) pro $x\to\pm\infty$, což jsou přímky $y=ax+b$, pro které platí $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$. Pro $x\to\infty$ dostáváme

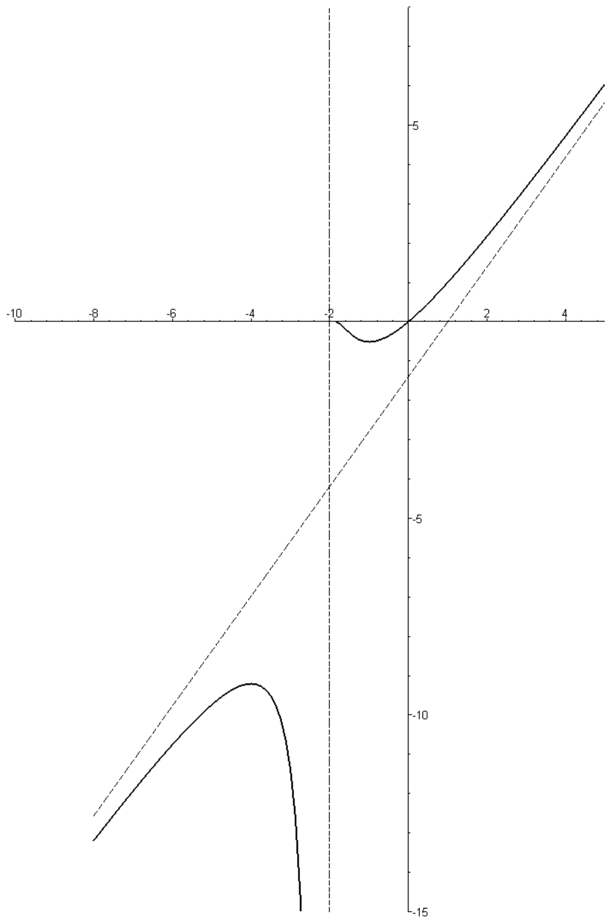
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{3(x+2)}}=e^{\frac{1}{3}},$$
$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}-e^{\frac{1}{3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}-e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}\frac{1}{(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{(x+2)^2}=-e^{\frac{1}{3}},$$

přičemž při výpočtu parametru b jsme užili L'Hospitalova pravidla. Asymptotou pro $x\to\infty$ je tedy přímka $y=e^{\frac{1}{3}}(x-1)$. Stejný výpočet provedeme i pro $x\to-\infty$

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{3(x+2)}}=e^{\frac{1}{3}},$$
$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}-e^{\frac{1}{3}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}-e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}\frac{1}{(x+2)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{x-1}{3(x+2)}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(x+2)^2}=-e^{\frac{1}{3}},$$

asymptotou pro $x\to-\infty$ je tedy přímka $y=e^{\frac{1}{3}}(x-1)$.

Nyní již nezbývá nic jiného, než načrtnout graf. Postupujeme tak, že zakreslíme všechny zajímavé body, to jest ty kde protíná funkce osy x a y, kde má stacionární body, body nespojitosti, body ve kterých přechází z konvexní na konkávní a také zakreslíme všechny asymptoty. Přes tyto body pak nakreslíme funkci tak, aby byla v příslušných intervalech kladná/záporná, rostoucí/klesající a konvexní/konkávní podle toho, jak jsme to určili ze znamének funkce a jejích derivací.



A takhle nějak by to mělo vypadat.