Několik řešených příkladů do Matematiky 1 (Vektory)

V tomto textu je spočteno několik ukázkových příkladů, které vám (snad) pomohou při řešení příkladů do cvičení. V textu se objeví i pár detailů, které jsem nestihl (na které jsem zapomněl) v cvičení.

Vektorový prostor

Vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{R}$ je množina V, pro jejíž prvky je definováno násobení skalárem (reálným číslem)

$$a\vec{u} \in V, \qquad a \in \mathbb{R}, \vec{u} \in V,$$

a sčítání

$$\vec{u} + \vec{v} \in V, \qquad \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Prvky vektorového prostoru nazýváme vektory. Násobení vektoru skalárem a sčítání vektorů má navíc tyto vlastnosti

$$\begin{aligned} a(b\vec{u}) &= (ab)\vec{u}, \\ (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} &= \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) \\ \vec{u}+\vec{v} &= \vec{v}+\vec{u} \\ a(\vec{u}+\vec{v}) &= a\vec{u}+a\vec{v}, \\ (a+b)\vec{u} &= a\vec{u}+b\vec{u}, \\ 1\vec{u} &= \vec{u}, \end{aligned}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$. Dále zde existuje nulový prvek $\vec{0}$, pro který platí

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{0},$$

kde $\vec{v} \in V$. A ke každému vektoru $\vec{u} \in V$ existuje vektor $-\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = (-\vec{u}) + \vec{u}.$$

Příkladem vektorového prostoru (nad $\mathbb{R}$) jsou všechny n-tice reálných čísel $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, pro které definujeme násobení skalárem a sčítání vektorů jako

$$\begin{aligned} a\vec{u} &= a(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (au_1, au_2, \ldots, au_n), \\ \vec{u}+\vec{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots, u_n+v_n). \end{aligned}$$

Tento vektorový prostor budeme označovat jako $\mathbb{R}^n$.

Poznámka: Vektoru tvaru

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_m\vec{u}_m,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m \in V$ říkáme lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$.

Báze a dimenze vektorového prostoru, lineární nezávislost

Uvažujme vektorový prostor V a v něm systém n vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$. O tomto systému řekneme, že je lineárně nezávislý, pokud pro rovnici

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n = 0, \tag{1}$$

s neznámými $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ existuje jediné řešení $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$. Pokud není systém vektorů lineárně nezávislý, tak říkáme, že je lineárně závislý.

Předpokládejme, že systém vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ je lineárně závislý. To znamená, že existuje řešení rovnice (1), takové, že alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ je nenulové. Předpokládejme, že je tímto nenulovým číslem například a_n a rovnici upravme do tvaru

$$\vec{u_n} = \frac{a_1}{a_n}\vec{u}_1 + \frac{a_2}{a_n}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}\vec{u}_{n-1}. \tag{2}$$

Vektor $\vec{u}_n$ tedy lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

Této vlastnosti můžeme užít k tomu, abychom lineární nezávislost vektorů definovali i jiným způsobem. Lineární nezávislost sytému vektorů můžeme definovat také pomocí požadavku, že žádný z vektorů tohoto systému nelze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů tohoto systému (s výjimkou případu, kdy máme puze jeden vektor, v tomto případě je systém lineárně nezávislý pokud je vektor nenulový).

Lineárně nezávislý systém vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ z vektorového prostoru V, pro který platí to, že přidáme-li k němu libovolný další vektor $\vec{u} \in V$ tak dostaneme lineárně závislý systém, nazýváme bází vektorového prostoru.

Lze ukázat, že existuje-li báze obsahující konečný počet vektorů, tak i všechny ostatní báze obsahují stejný počet vektorů, a počet těchto vektorů nazýváme dimenzí vektorového prostoru.

Příklad: Jsou dány vektory $\vec{u}_1 = (1, 2), \vec{u}_2 = (2, 4), \vec{u}_3 = (1, -1), \vec{u}_4 = (0, 1)$, určete, zda jsou tyto vektory lineárně nezávislé, pokud nejsou, tak z nich vyberte maximální počet lineárně nezávislých vektorů.

Řešení: Aby byly vektory lineárně nezávislé, tak musí mít rovnice

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 + a_4\vec{u}_4 = \vec{0}, \tag{3}$$

pro neznámé a_1, a_2, a_3, a_4 jediné řešení. Dosazením za $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ dostáváme

$$a_1(1, 2) + a_2(2, 4) + a_3(1, -1) + a_4(0, 1) = (a_1 + 2a_2 + a_3, 2a_1 + 4a_2 - a_3 + a_4) = (0, 0).$$

Jedná se o systém 2 rovnic o 2 neznámých, který můžeme přepsat pomocí matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kterou můžeme upravit na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{4}$$

Vidíme, že tato soustava má nekonečně mnoho řešení, zadaný systém vektorů tedy není lineárně nezávislý. Vynecháme-li však v matici ty sloupce, které neobsahují žádný vedoucí člen (vedoucí člen je první nenulový člen v řádku schodovité matice) tj. druhý a čtvrtý sloupec, tak dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array}\right),$$

která odpovídá soustavě rovnic mající jediné řešení. Uvědomíme-li si, že sloupce matice (4) odpovídají jednotlivým vektorům v rovnici (3), tak je jasné, že vynechání sloupců matice odpovídá vynechání patřičných vektorů v rovnici (3). To, že jsme v matici vynechali druhý a čtvrtý sloupec tedy znamená, že uvažujeme systém vektorů ve kterém jsme vynechali druhý a čtvrtý vektor, tj. systém $\vec{u}_1, \vec{u}_3$. Vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_3$ tedy tvoří lineárně nezávislou podmnožinu vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.

Příklad: Doplňte vektory $\vec{u}_1 = (1,1,1), \vec{u}_2 = (1,-1,1)$ o další vektor tak, aby tvořili bázi v $\mathbb{R}^3$.

První způsob řešení: Budeme předpokládat, že hledaný vektor $\vec{u}_3$ má složky (x, y, z). Aby byly vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineárně nezávislé, tak musí mít rovnice

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3 = (a_1 + a_2 + a_3x, a_1 - a_2 + a_3y, a_1 + a_2 + a_3z) = (0,0,0),$$

jediné řešení. Tuto soustavu zapíšeme pomocí matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x & 0 \\ 1 & -1 & y & 0 \\ 1 & 1 & z & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & -2 & y-x & 0 \\ 0 & 0 & z-x & 0 \end{array}\right)$$

Z tvaru této matice vidíme, že soustava má řešení pouze tehdy, platí li $z \neq x$, což splníme například volbou $x = 1, y = 0, z = 0$. Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ tedy můžeme doplnit o vektor $\vec{u}_3 = (1,0,0)$.

Druhý způsob řešení: Druhou možností jak řešit tento příklad je přidat k vektorům $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vektory $\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0), \vec{e}_3 = (0,0,1)$, které sami o sobě tvoří bázi v $\mathbb{R}^3$, a z tohoto systému 5 vektorů vybrat 3 lineárně nezávislé vektory tak, aby dva z nich byly $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Budeme tedy zkoumat rovnici

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{e}_1 + a_4\vec{e}_2 + a_5\vec{e}_3 = (a_1 + a_2 + a_3, a_1 - a_2 + a_4, a_1 + a_2 + a_5) = (0,0,0),$$

kterou zapíšeme pomocí matice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Vidíme, že čtvrtý a pátý sloupec matice upravené do schodovitého tvaru neobsahují vedoucí členy, čtvrtý a pátý vektor tedy vynecháme, a zbydou nám vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{e}_3$, které jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi v $\mathbb{R}^3$.

Vektor zapsaný v bázi, přechod mezi bázemi

Nechť V je n-dimenzionální vektorový prostor a $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ jeho báze. Přidáme-li k bázi další vektor $\vec{u}$, tak vzniklý systém $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{u}$ již nebude lineárně nezávislý (protože báze je tvořena maximálním počtem lineárně nezávislých vektorů) a podobným způsobem, jako jsme v rovnici (2) vyjádřili vektor $\vec{e}_n$, můžeme vyjádřit i vektor $\vec{u}$, tj.

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \cdots + u_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\vec{e}_i.$$

Soubor čísel $u_1, u_2, \ldots, u_n$ pak nazýváme souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ a často je zapisujeme jako řádkovou matici

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \end{pmatrix}.$$

Uvažujme nyní jinou bázi $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ vektorového prostoru V. Prvky nové čárkované báze jsou vektory vektorového prostoru V, takže je můžeme vyjádřit pomocí vektorů nečárkované báze

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= T_{11}\vec{e}_1 + T_{12}\vec{e}_2 + \ldots + T_{1n}\vec{e}_n, \\ \vec{e}'_2 &= T_{21}\vec{e}_1 + T_{22}\vec{e}_2 + \ldots + T_{2n}\vec{e}_n, \\ &\vdots \\ \vec{e}'_n &= T_{n1}\vec{e}_1 + T_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + T_{nn}\vec{e}_n, \end{aligned}$$

což zapíšeme jako

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\vec{e}_j. \tag{5}$$

Uspořádáme-li čísla T_{ij} do matice tak, že v i-tém řádku a j-tém sloupci bude číslo T_{ij}, tj. složka j-tá souřadnice vektoru $\vec{e}_i'$ v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, (řádky matice T jsou tedy tvořeny souřadnicemi vektorů čárkované báze v nečárkované bázi), tak budeme moci tento vztah zapsat také v maticovém zápisu jako

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vdots \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Matici T nazýváme maticí přechodu. Stejným způsobem můžeme vyjádřit také bázové vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ nečárkované báze jako lineární kombinaci vektorů čárkované báze, tj.

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}\vec{e}_j'.$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vdots \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

Přičemž řádky matice S jsou tvořeny souřadnicemi vektorů nečárkované báze v čárkované bázi. Dosadíme-li (7) do (6) tak získáme rovnici

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vdots \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = TS \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vdots \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (TS - I) \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vdots \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix} = 0,$$

která bude splněna tehdy, když $TS = I$, tj. tehdy když $S = T^{-1}$ ($T = S^{-1} = (T^{-1})^{-1}$), matice T a S jsou tedy vzájemně inverzní. Pro vyjádření vektoru $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ dostáváme

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vdots \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix}$$

přičemž v poslední rovnosti jsme užili (7) Porovnáme-li tento výraz s vyjádřením vektoru $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i'\vec{e}_i' = \begin{pmatrix} u_1' & u_2' & \dots & u_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vdots \\ \vec{e}_n' \end{pmatrix},$$

tak vidíme, že souřadnice vektoru $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ vypočteme z jeho souřadnic v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ pomocí vztahu

$$\begin{pmatrix} u_1' & u_2' & \dots & u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} T^{-1} \tag{8}$$

Podobně pro přepočet souřadnic vektoru $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ na souřadnice v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ dostáváme

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1' & u_2' & \dots & u_n' \end{pmatrix} T. \tag{9}$$

Příklad: Uvažujte změnu báze

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \qquad \vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2, \qquad \vec{e}_3' = 2\vec{e}_3,$$

vyjádřete vektor $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ pomocí čárkované báze a vektor $\vec{v} = \vec{e}_1' - \vec{e}_2' + \vec{e}_3'$ pomocí nečárkované báze.

Řešení: Ze vztahů zadávajících změnu báze určíme matici přechodu T

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

K této matici vypočteme matici inverzní

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Souřadnice vektoru $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

souřadnice v čárkované bázi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ vypočteme pomocí vzorce (8)

$$\begin{pmatrix} u_1' & u_2' & u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Vektor $\vec{u}$ tedy pomocí báze $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ zapíšeme jako

$$\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{e}_1' - \frac{1}{2}\vec{e}_2' + \frac{3}{2}\vec{e}_3'.$$

Souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ jsou

$$\begin{pmatrix} v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

souřadnice v nečárkované bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vypočteme pomocí vzorce (9)

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' & v_2' & v_3' \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\vec{v}$ tedy pomocí báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ zapíšeme jako

$$\vec{v} = 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

Poznámka: Vztah mezi bází $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a bází $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ jsme zapsali pomocí matice T jako

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} \vec{e}_1' &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' &= 2\vec{e}_3 \end{aligned}$$

což jsou vztahy uvedené v zadání. Matici T^{-1} pak užijeme k tomu abychom dostali řešení této soustavy rovnic pro vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \vec{e}_3' \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{1}{2}\vec{e}_1' + \frac{1}{2}\vec{e}_2' \\ \vec{e}_2 &= \frac{1}{2}\vec{e}_1' - \frac{1}{2}\vec{e}_2'. \\ \vec{e}_3 &= \frac{1}{2}\vec{e}_3' \end{aligned}$$

Vektor $\vec{u}$ vyjádřený v bázi $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ tedy získáme tím, že vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vyjádříme pomocí báze $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$, tj.

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{2}\vec{e}_1' + \frac{1}{2}\vec{e}_2'\right) + 2\left(\frac{1}{2}\vec{e}_1' - \frac{1}{2}\vec{e}_2'\right) + 3\left(\frac{1}{2}\vec{e}_3'\right) = \frac{3}{2}\vec{e}_1' - \frac{1}{2}\vec{e}_2' + \frac{3}{2}\vec{e}_3'.$$

A to je přesně to, co je skryto v nepěkně vypadajícím vzorci (8).

Skalární součin

Uvažujme vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$. Skalární součin je zobrazení $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, které dvěma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$ z vektorového prostoru V přiřadí reálné číslo $\vec{u}\vec{v}$. Pro skalární součin platí

$$\begin{aligned} (a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2)\vec{v} &= a_1\vec{u}_1\vec{v} + a_2\vec{u}_2\vec{v}, \\ \vec{u}(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) &= a_1\vec{u}\vec{v}_1 + a_2\vec{u}\vec{v}_2, \\ \vec{v}\vec{u} = \vec{u}\vec{v}, \vec{u}\vec{u} \geq 0, &\qquad \vec{u}\vec{u} = 0 \text{ právě tehdy, když } \vec{u} = \vec{0}. \end{aligned} \tag{10}$$

Pro vektory $\vec{u}, \vec{v}$ vyjádřené v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, tj.

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i\vec{e}_i, \qquad \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{e}_i,$$

dostáváme

$$\vec{u}\vec{v} = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\vec{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} v_j\vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j(\vec{e}_i\vec{e}_j), \tag{11}$$

přičemž při úpravách jsme užili první dvě pravidla z (10). Uvažujme bázi, pro kterou platí

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{12}$$

Takovou bázi nazýváme ortonormální bází, a výraz (11) pro skalární součin se zjednoduší na

$$\vec{u}\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Poznámka: V $\mathbb{R}^n$ budeme uvažovat skalární součin

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots u_nv_n.$$

Poznámka: Definujeme-li velikost vektoru $\vec{u}$ jako

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\vec{u}},$$

pak dostaneme pro skalární součin vyjádření

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos\phi,$$

kde ϕ je úhel mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. O vektorech $\vec{u}$ a $\vec{v}$ tedy řekneme, že jsou na sebe kolmé pokud $\vec{u}\vec{v} = 0$.

Poznámka: Máme-li nenulový vektor $\vec{u}$ jenž nemá jednotkovou velikost, můžeme ho normovat, což znamená, že vytvoříme nový vektor

$$\vec{u}' = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{\vec{u}\vec{u}}}\vec{u},$$

který je násobkem původního vektoru a platí pro něj $|\vec{u}| = 1$.

Uvažujme ortonormální bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Budeme-li dále uvažovat další ortonormální bázi $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ ke které přejdeme z báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ pomocí matice přechodu T, pak dostáváme podmínku

$$I_{ij} = \vec{e}'_i\vec{e}'_j = \left(\sum_{k=1}^{n} T_{ik}\vec{e}_k\right)\left(\sum_{l=1}^{n} T_{jl}\vec{e}_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} T_{ik}T_{jl}\vec{e}_k\vec{e}_l = \sum_{k=1}^{n} T_{ik}T_{jk} = (TT^T)_{ij},$$

kde I značí jednotkovou matici a kde jsme užili (5) a (12). Dostáváme tedy podmínku $TT^T = I$ a to znamená, že platí $T^{-1} = T^T$. Změnu ortonormální báze na jinou ortonormální bázi, tj. změnu báze zadanou maticí pro kterou platí $TT^T = I$ ($T^T = T^{-1}$) nazýváme ortonormální změnou báze.

Příklad: Je zadána změna ortonormální báze

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \qquad \vec{e}'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2,$$

ověřte, že báze $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ je rovněž ortonormální a zapište vektor $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ pomocí této báze.

Řešení: Ze zadané změny báze určíme matici přechodu

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

Aby byla touto maticí přechodu zadána změna ortonormální báze, musí být výraz TT^T roven jednotkové matici, tj.

$$TT^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Matice T tedy zadává ortonormální změnu báze. Inverzní matice k matici T je rovna matici transponované

$$T^{-1} = T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ze souřadnic vektoru $\vec{u}$ v bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

vypočteme podle vzorce (8) jeho souřadnice v bázi $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$

$$\begin{pmatrix} u_1' & u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{u}$ tedy pomocí báze $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ vyjádříme jako

$$\vec{u} = \frac{3}{\sqrt{2}} \vec{e}_1' + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2'.$$

Příklad: Jsou dány vektory

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0), \qquad \vec{u}_2 = (1, -1, 1).$$

Vektory normujte a doplňte je o další vektor $\vec{u}_3$ tak, aby vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ tvořili ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Přímým výpočtem zjistíme, že pro vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ platí

$$\vec{u}_1 \vec{u}_1 = 2, \qquad \vec{u}_1 \vec{u}_2 = 0, \qquad \vec{u}_2 \vec{u}_2 = 3,$$

tj. že jsou na sebe kolmé a jejich velikost je $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$. Tyto vektory potřebujeme doplnit o další vektor $\vec{u}_3$ tak, aby platilo

$$\vec{u}_1 \vec{u}_3 = 0 \qquad \vec{u}_2 \vec{u}_3 = 0 \qquad \vec{u}_3 \vec{u}_3 = 1. \tag{13}$$

Budeme předpokládat, že vektor $\vec{u}_3$ má tvar

$$\vec{u}_3 = (x, y, z),$$

kde x, y, z jsou zatím neurčené neznámé. Dosadíme-li tento výraz do podmínek (13), tak získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 \vec{u}_3 &= x + y = 0, \\ \vec{u}_2 \vec{u}_3 &= x - y + z = 0, \\ \vec{u}_3 \vec{u}_3 &= x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostáváme $y = -x$. Odtud dosadíme za y do druhé rovnice, čímž dostaneme $z = -2x$. Do třetí rovnice dosadíme za y a z, čímž dostaneme $x^2 + (-x)^2 + (-2x)^2 = 6x^2 = 1$, tj. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Řešením jsou tedy vektory

$$\vec{u}_3 = (x, y, z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

Dostáváme tedy dvě možnosti jak zvolit vektor $\vec{u}_3$. Zbývá normovat vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, tj.

$$\begin{aligned} \vec{u}_1' &= \frac{1}{|\vec{u}_1|} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ \vec{u}_2' &= \frac{1}{|\vec{u}_2|} \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Trojice vektorů

$$\vec{u}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \vec{u}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \vec{u}_3 = (x, y, z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{1}{\sqrt{6}}, \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \right).$$

tedy tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^3$. (Jiný postup, který můžeme užít nalezení vektoru kolmého k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je vypočíst vektor jejich vektorový součin, tj. $\vec{u} \times \vec{v}$ a ten poté normovat.)