Delta funkce

V jedné dimenzi

Označení δ-funkce, ačkoli se běžně užívá, může být poněkud matoucí, neboť se nejedná o funkci a její korektní zavedení vyžaduje teorii distribucí (což zde nebudu provádět). Pro většinu účelů si vystačíme s představou funkce, která je nulová ve všech bodech kromě bodu $x = 0$, kde nabývá nekonečné hodnoty a vytváří zde nekonečně úzký a nekonečně vysoký vrchol takový, že plocha pod tímto vrcholem je rovna jedné. Můžeme tedy psát

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Odsud je vidět, že se ve skutečnosti nejedná o funkci, neboť integrál z funkcí lišících se pouze v jednom bodě je stejný, a jelikož se δ-funkce liší od funkce $f(x) = 0$ jen v jednom bodě, výsledek integrálu by měla být nula.

Nejdůležitější vlastnost kterou budeme potřebovat je, že máme-li spojitou funkci $f(x)$ a bod $a \in \mathbb{R}$, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)\mathrm{d}x = f(a).$$

Pokud bychom neintegrovali přes celé $\mathbb{R}$ ale pouze přes nějaký interval, pak bychom dostali nenulový výsledek pouze tehdy, když by bod a náležel tomuto intervalu.

Následující věta popisuje chování δ-funkce při záměně proměnných

Věta 1. *Nechť $g(x)$ je spojitá funkce, která nabývá nulové hodnoty pouze v izolovaných bodech. Množinu těchto bodů označme $Z = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 0\}$. Navíc budeme předpokládat, že funkce $g(x)$ má v těchto bodech nenulovou derivaci. Pak platí*

$$\delta\left(g(x)\right) = \sum_{z \in Z} \frac{\delta(x-z)}{|g'(z)|}.$$

Příklad: Pokud $g(x) = ax$, kde $a \neq 0$ pak jediným kořenem $g(x)$ je bod $x = 0$, derivace v tomto bodě je $g'(0) = a$, platí tedy $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$.

Příklad: Pokud $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, pak kořeny $g(x)$ jsou body $x_1 = -2$ a $x_2 = 1$, derivace v těchto bodech jsou $g'(-2) = -3$, $g'(1) = 3$, platí tedy $\delta(x^2 + x - 2) = \dfrac{\delta(x+2)}{3} + \dfrac{\delta(x-1)}{3}$.

Ve více dimenzích

Delta funkci v n-dimenzích definujeme jako

$$\delta^n(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n),$$

přičemž $\vec{x}$ značí n-dimenzionální vektor.

Pro spojitou funkci $f(\vec{x})$ a bod $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta^n(\vec{x} - \vec{a})f(\vec{x})\mathrm{d}^n x = f(\vec{a}).$$

Záměna proměnných v mnohadimenzionální delta-funkci je podobná jako v případě jedné dimenze, jediným rozdílem je, že místo derivace funkce musíme užít Jakobián.

Věta 2. *Nechť $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce, která nabývá nulové hodnoty pouze v izolovaných bodech. Množinu těchto bodů označme $Z = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; g(\vec{x}) = \vec{0}\}$. Navíc budeme předpokládat, že funkce g má v těchto bodech nenulový Jakobián. Pak platí*

$$\delta^n\left(g(\vec{x})\right) = \sum_{\vec{z} \in Z} \frac{\delta^n(\vec{x} - \vec{z})}{|J(\vec{z})|},$$

kde $J(\vec{z})$ je hodnota jakobiánu g v bodě $\vec{z}$.