Numerické řešení pohybové rovnice

Tomáš Záležák

1 Obecná pohybová rovnice

Pohybová rovnice vyjadřuje souvislost pohybu hmotného bodu (či tělesa) se silovým působením na něj. Můžeme ji zapsat v této podobě:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \tag{1}$$

V rovnici (1) vystupuje na levé straně straně součet všech sil působících na těleso, na pravé straně pak součin hmotnosti a zrychlení tělesa.
Síly na levé straně můžeme sečíst, dále pak lze vyjádřit, že obecně závisí na poloze tělesa $\vec{r}$ a jeho rychlosti $\vec{v}$. Navíc platí:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{a} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{2}$$

Potom můžeme přepsat pohybovou rovnici takto:

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}) = m\vec{a} \quad \text{či} \quad \vec{F}\left(\vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \tag{3}$$

To je diferenciální rovnice druhého řádu, kterou je možné obvykle analyticky řešit různými metodami. Pokud nás však z jakéhokoli důvodu analytické řešení nezajímá a potřebujeme pouze zjistit, po jaké dráze se bude těleso pohybovat, nebo ji analyticky řešit neumíme, můžeme ji řešit numericky. To znamená, že krátký časový úsek Δt zůstane konečně malý a veškeré pohyby v tomto čase budeme považovat za přibližně rovnoměrné.

2 O rovnoměrně zrychleném pohybu

Přesuneme-li se nyní od tří rozměrů k jedinému, bude řešení názornější. Označme polohu tělesa x, jeho rychlost v a zrychlení a. Těleso je na začátku umístěno v počátku, tj. $x = 0$.

1. Pohybuje-li se těleso rovnoměrně, tj. rychlost v se nemění a tedy zrychlení a je nulové, je poloha tělesa v čase t určena vztahem:
   $$x = vt$$
2. Pokud těleso rovnoměrně zrychluje tak, že na začátku má rychlost nulovou a na konci má rychlost v, bude jeho průměrná rychlost zřejmě poloviční. Nahradíme-li proto tento pohyb rovnoměrným, bude poloha tělesa v čase t určena vzorcem
   $$x = vt/2$$
   Rychlost tělesa roste rovnoměrně s časem, lze ji pomocí zrychlení vyjádřit součinem $v = at$. Dosazením do předchozího vztahu získáme
   $$x = at^2/2$$
3. Platí princip superpozice, takže můžeme předchozí dva případy sloučit dohromady. Navíc můžeme přidat počátační polohu tělesa $x(t_0)$, počáteční rychlost označme $v(t_0)$. Potom pro polohu tělesa v čase t platí:
   $$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \tag{4}$$
   Počátek pohybu je v čase t_0.

Máme tedy rovnici (4) rovnoměrně zrychleného pohybu, která dostatečně přesně popisuje dění v krátkém časovém úseku.

3 Vývoj v krátkém časovém úseku

Nyní je čas se vrátit k pohybové rovnici, opět však v jediném rozměru.

$$ma = F(x, v) \tag{5}$$

Řešení pohybové rovnice $x(t)$ neznáme a ani jej hledat nebudeme. Můžeme však předpokládat, že okamžik po začátku pohybu (tj. v čase $t = \Delta t$ od $t_0 = 0$) bude platit vztah daný rovnicí (4):

$$x(\Delta t) = x(0) + v(0)\Delta t + \frac{1}{2}a(0)(\Delta t)^2 \tag{6}$$

Zrychlení $a(0)$ známe, je možné jej vyjádřit z pohybové rovnice:

$$a(0) = \frac{F(x(0), v(0))}{m} \tag{7}$$

Po dosazení vyjde

$$x(\Delta t) = x(0) + v(0)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2m}F(x(0), v(0)) \tag{8}$$

Rovnice (8) určuje polohu tělesa v čase Δt, když známe počáteční polohu $x(0)$, rychlost $v(0)$ a vztah pro silové působení podle (5).

Ještě je potřeba najít rychlost v čase Δt, tedy $v(\Delta t)$. Tu můžeme vyjádřit opět ze vztahu pro polohu. Můžeme vyjádřit $x(0)$, když počáteční poloha je $x(\Delta t)$. Stačí jen dosadit $t = 0$ a $t_0 = \Delta t$ do rovnice (4), zároveň dosadíme zrychlení ze vztahu (7):

$$x(0) = x(\Delta t) - v(\Delta t)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2m}F(x(\Delta t), v(\Delta t)) \tag{9}$$

Odtud už lze vyjádřit vztah pro rychlost v čase Δt:

$$v(\Delta t) = \frac{x(\Delta t) - x(0)}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2m}F(x(\Delta t), v(\Delta t)) \tag{10}$$

Z rovnice (8) můžeme dosadit $x(\Delta t) - x(0) = v(0)\Delta t + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 F(x(0), v(0))/m$:

$$v(\Delta t) = v(0) + \frac{\Delta t}{2m}\left[F(x(0), v(0)) + F(x(\Delta t), v(\Delta t))\right] \tag{11}$$

Rovnici (11) lze přímo vyčíslit, pokud síla nezávisí na rychlosti. Pokud závisí na rychlosti málo, lze položit $F(x(\Delta t), v(\Delta t) \approx F(x(\Delta t), v(0))$.

4 Simulace pohybu tělesa

Výše odvozeným vztahům se říká Verletův rychlostní algoritmus. Lze jej použít k jednoduchým simulacím pohybu těles umístěním do cyklu s vhodným časovým krokem Δt. Vypočítaná poloha $x(\Delta t)$ a rychlost $v(\Delta t)$ se stávají počáteční polohou $x(0)$ a rychlostí $v(0)$ v dalším kroku.
Výše odvozené vztahy můžeme ihned vyzkoušet pro sílu ve tvaru

$$F(x, v) = -kx(1 + \alpha x^2) - \beta v$$

Člen $-kx$ odpovídá vratné síle např. u pružiny, kde k je její tuhost. Výraz $-k\alpha x^3$ potom představuje člen vyššího řádu, není-li vratná síla lineární (a tak tomu u skutečných pružin bývá). Člen $-\beta v$ vyjadřuje odporovou sílu prostředí, v němž pohyb probíhá.
Závislosti polohy na čase pro různé parametry jsou na obrázcích: